

$20 \mu\text{F}$ 电容并联, 这里的并联电阻可以看做是实际电容的两个极板之间的电介质所具有的电阻 (理想电容具有无穷大的电阻)。

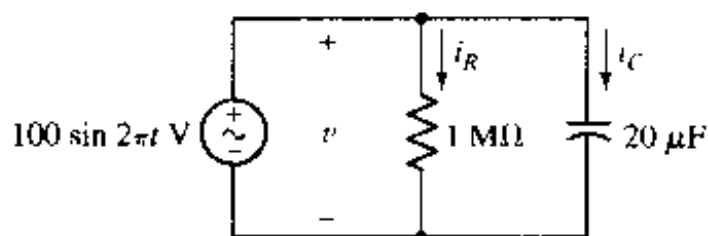


图 7.5 将正弦电压源接到并联 RC 网络中, $1 \text{ M}\Omega$ 电阻表示实际电容的电介质层的电阻

例题 7.2 求图 7.5 中的电容在时间区间 $0 < t < 0.5 \text{ s}$ 内储存的最大能量和电阻消耗的能量

● 弄清问题的目标:

储存在电容中的能量是随时间变化的, 本题所要求解的是在给定时间区间内能量的最大值, 同时要求出电阻在该时间段内消耗的总能量。实际上这是两个完全不同的问题。

● 收集已知信息:

电路中唯一的能量来源是独立电压源, 其大小为 $100 \sin 2\pi t \text{ V}$ 。这里只对时间区间 $0 < t < 0.5 \text{ s}$ 感兴趣。图中已正确标出了各量。

● 选择最适合问题的已有方法:

可以先求出电压值再求出电容储存的能量。为了求出电阻在相同时间区间内所消耗的能量, 需要对消耗的功率 $p_R = i_R^2 \cdot R$ 进行积分。

● 建立适当的方程组:

储存在电容中的能量为:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = 0.1 \sin^2 2\pi t \text{ J}$$

于是得到电阻消耗功率的表达式, 以电流 i_R 表示:

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4} \sin 2\pi t \text{ A}$$

所以, 电阻在 $0 \sim 0.5 \text{ s}$ 所消耗的能量为:

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R dt = \int_0^{0.5} 10^{-2} \sin^2 2\pi t dt \text{ J}$$

● 确定是否还需其他信息:

这对, 已经求出了储存在电容的能量表达式, 图 7.6 画出了该表达式的图形。电阻消耗能量的表达式中不包含任何未知量, 所以很容易计算出来。

● 试解:

从图 7.6 可以看出, 能量从 $t = 0$ 时刻的零增长到 $t = \frac{1}{4} \text{ s}$ 时刻的最大值 100 mJ , 并在另一个 $\frac{1}{4} \text{ s}$ 后减为零, 所以, $w_{C_{\max}} = 100 \text{ mJ}$ 。根据前面求得的电阻消耗的能量积分表达式, 可以计算出 $w_R = 2.5 \text{ mJ}$ 。

● 证实所得解是否合理和满足要求:

由于实际电容存在内阻, 所以在储存和释放过程中, 它储存的最大能量 (100 mJ) 有 2.5%

被消耗了。而理想电容只储存能量,不消耗能量,这在数学模型上是正确的,但对实际电容而言它并不正确。

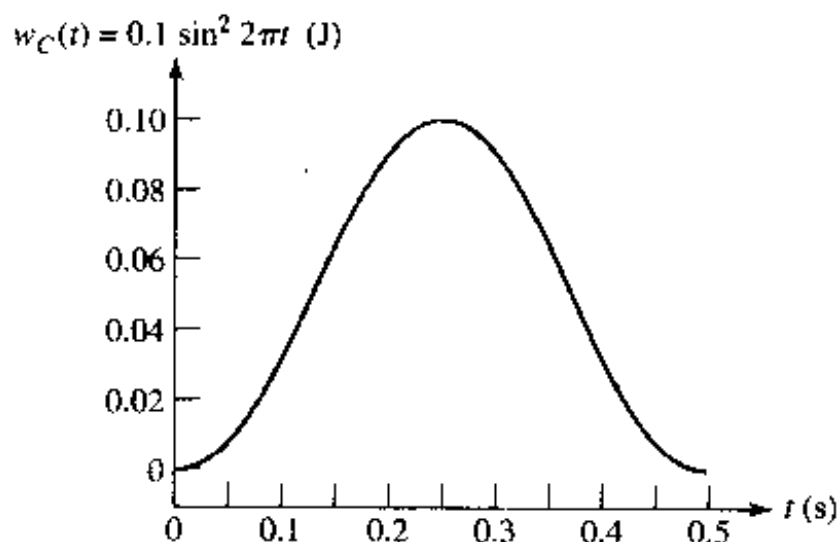


图 7.6 储存在电容的能量随时间变化的曲线

练习

- 7.2 如果 $1\,000\ \mu\text{F}$ 电容两端的电压为 $1.5 \cos 10^5 t\ \text{V}$, 计算电容在 $t = 50\ \mu\text{s}$ 储存的能量。
答案: $90.52\ \mu\text{J}$

7.2.4 理想电容的重要特性

1. 如果电容两端的电压不随时间变化, 那么就没有电流流过它, 因而对于直流而言电容相当于开路。
2. 即使流过电容的电流为零, 它也可以储存能量, 例如在电容两端具有恒定电压时。
3. 不可能在零时间间隔内改变电容两端的电压, 因为这要求流过电容的电流为无穷大。可以将电容对于电压突变的抵抗类比弹簧对于位移突变的抵抗。
4. 理想电容只储存能量不消耗能量, 这从数学模型而言是正确的, 但对于实际电容而言它并不正确, 因为实际电容具有一定的电阻。

实际应用

混合电池: 超级电容器件

数字蜂窝电话和卫星电话具有两个基本工作模式: 接收模式和发送模式。典型的信号接收并不要求电池提供大的电流, 但是发送却需要较大的电流(图 7.7)。不过, 如图所示, 用于发送的时间通常只是这种设备总工作时间的一小部分。

从第 5 章可以知道, 电池仅能在小电流时保持恒定电压, 因此当所需的电流增大时, 电池电压将下降(图 7.8)。这样会产生一些问题, 因为大多数电路具有一个最低的工作电压, 称为截止电压。低于截止电压时, 电路将不能正常工作。

如果电路吸收电流的最大值使得电池电压降到截止电压以下, 那么就需要更换容量更大

的电池。但对于便携式设备来说,这样做通常不能满足实际需要,因为它们通常要求使用小和轻的电池。另一种办法是使用一种混合器件,这种器件由一个标准电池和一个经过特别设计的电容(有时称为电化学电容或超级电容)组成。图 7.9 给出了这种器件的结构图。

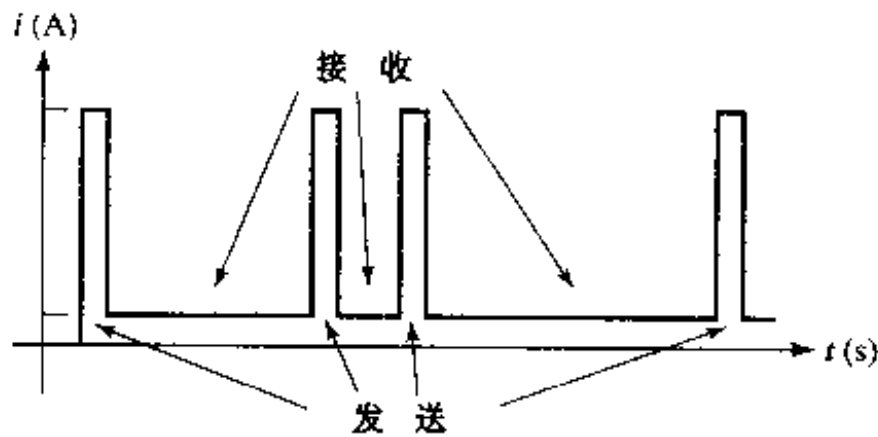


图 7.7 蜂窝电话系统的典型工作电流示意图,表示了发送和接收时所需的电流大小

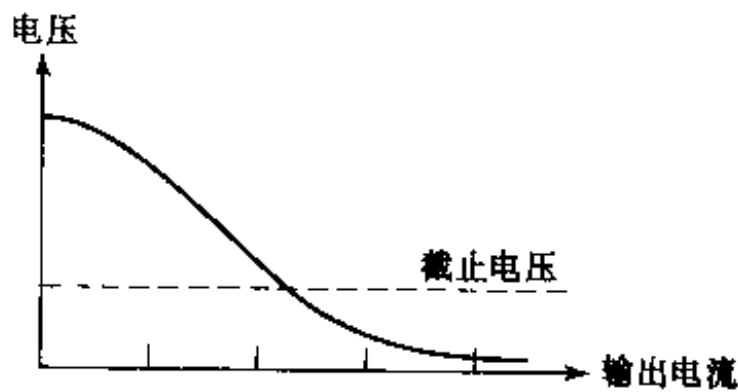


图 7.8 电池电压 - 电流关系的例子

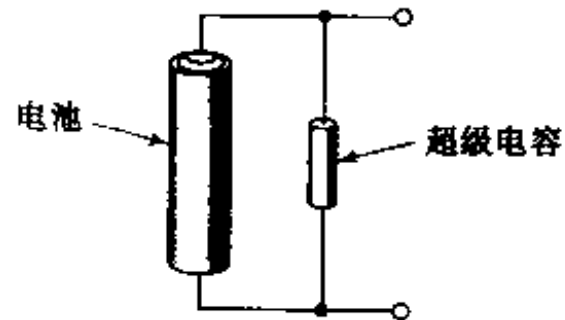


图 7.9 电池 - 超级电容混合器件

这种器件的工作原理如下:当电池处于维持电路工作所要求的电流时(例如电话处于接收模式),电容从电池那里储存能量($\frac{1}{2} CV^2$)。如果需要的电流突然增大(例如电话处于发送模式),则电池电压将下降。这时,由于 dv/dt 发生变化,那么将产生额外的电流从已充电的电容中流出。如果电话电路的戴维南等效电阻要比电池的内阻小得多,那么该电流将流过电话电路,而不是流过电池。因为电荷离开电容的速度非常快,所以电流“增加”的时间很短。不过,如果发送操作的时间也很短,则该电容将有效地辅助了电池,从而防止了电路的截止。第 8 章将研究如何估算电容辅助时间的大小,假定已知电池和电路的戴维南等效电阻。

7.3 电感

7.3.1 理想电感模型

在严格地从电路角度(即通过电压 - 电流关系)定义电感之前,了解一些关于磁场理论的历史发展将有助于更好地理解电感的定义。在 19 世纪早期,丹麦科学家奥斯特发现,当导体中有电流流过时,导体周围将产生磁场(例如,有电流流过的导线,将影响附近的指南针)。不久,安培做了几个精密的测量实验,结果表明磁场和产生它的电流成线性关系。大约在 20 年

后,英国实验物理学家法拉第和美国发明家亨利几乎同时发现:变化的磁场可以使附近的电路产生电压。他们指出,这个电压与产生磁场的电流随时间的变化率成正比,这个比例系数即为现在所说的感应系数,用符号 L 表示,所以:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (7.4)$$

必须注意, v 和 i 都是时间的函数,当需要强调这一点时,可以使用符号 $v(t)$ 和 $i(t)$ 来表示。

电感的电气符号如图 7.10 所示,需要注意的是,与电阻和电容一样,已采用了无源符号规则。电感的单位为亨利(H),由定义公式可以看出亨利只是伏特·秒/安培的简洁表示。

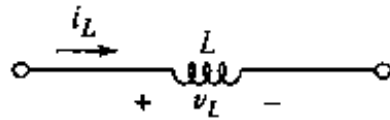


图 7.10 电感的电气符号和其电流-电压规定

式(7.4)所定义的电感是一个数学模型,是一个用来近似实际器件的理想元件。实际电感可以通过将一定长度的导线绕成线圈而制成,这样等效于增大产生磁场的电流,同时也增大了感应出法拉第电压电路的“数目”。综合这两方面产生的效果,线圈的电感大致与电感匝数的平方成正比。例如,一个外形类似有很小螺距的长螺旋杆的电感线圈,其电感为 $\mu N^2 A/s$,其中 A 为横截面积, s 为螺旋杆轴向长度, N 为线圈匝数, μ 为与螺旋杆内部材料有关的常量,称为磁导率,在真空中(和空气中非常接近), $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 4 \pi \text{ nH/cm}$ 。图 7.11 画出了几种电感的外形。

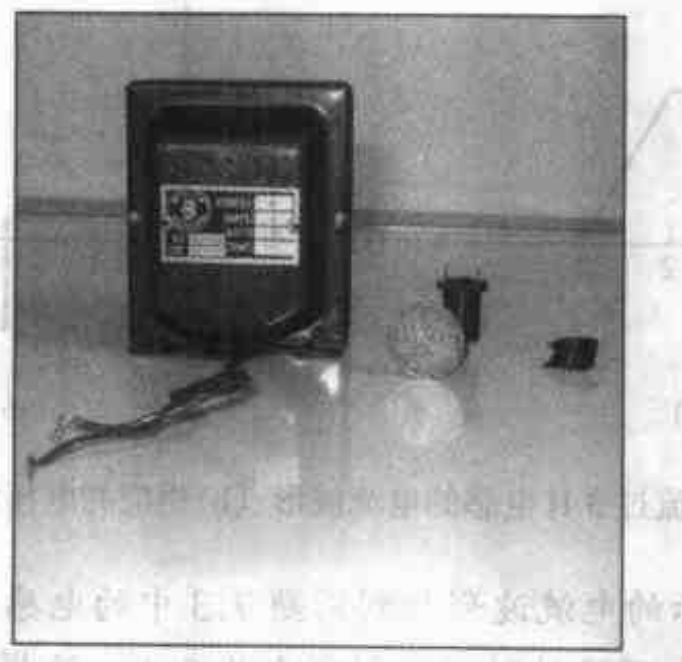


图 7.11 几种常见的电感,有时也称它们为扼流圈

现在来仔细考察式(7.4)以得到该数学模型的一些有用的电学特性。式(7.4)表明,电感两端的电压与流过它的电流随时间的变化率成正比,特别是,当电感流过恒定的电流时,不管电流的数值是多少,它两端的电压都为零,因此可以将电感看做“直流短路”。

还可以从式(7.4)得出另外一个结论。根据这个公式可知,电流的突变或者电流的不连续变化必然导致电感两端电压为无穷大,换句话说,如果试图使电感电流产生突变,那么必须在电感两端加上无穷大的电压。尽管从理论上说可以存在电压为无穷大的激励函数,但对于实际器件,这种情况永远不会出现。后面将看到,电感电流的突变还要求储存在电感上的能量产生突变,能量的突变要求在该时刻具有无穷大的能量,而无穷大的能量在实际物理世界中同样

不存在。为了避免出现无穷大的电压和无穷大的能量,不允许电感电流瞬间从一个值跳变到另一个值。

如果将实际电感的电流突然截断,那么在开关处将产生电弧。某些汽车的点火系统正是利用了这一点,在那里,流过火花线圈的电流被分流器截断,于是在火花塞上将产生电弧。尽管这不是瞬时产生的,但发生在一个很短的时间间隔里,从而可以产生一个很大的电压。在很短的间隔上产生很大电压等同于存在一个很大的电场,储存的能量将通过空气电离后的电弧路径而释放。

式(7.4)还可以用图形的方式来描述(及求解),如例题 7.3 所示。

例题 7.3 流过 3 H 电感的电流波形如图 7.12(a)所示,求出电感电压并画出草图

电流在 $t = -1$ s 之前为零,在下一个 1 s 内线性增加到 1 A,并维持 2 s,然后在下一个 1 s 减小到零,其后一直保持为零。如果该电流流过 3 H 的电感,并且电压和电流的定义符合无源符号规则,那么可以应用式(7.4)得到电压波形。

因为电流在 $t < -1$ s 时为零,所以电压在该时间区间也为零。然后电流以 1 A/s 的速率线性增大,这时将产生一个 $L di/dt = 3$ V 的恒定电压。在随后的 2 s 时间区间里,电流为常量,因此电压为零。最后,电流线性减小且 $di/dt = -1$ A/s,这时 $v = -3$ V。对于 $t > 3$ s, $i(t)$ 是常量(为零),所以在该时间区间 $v(t) = 0$ 。完整的电压的波形如图 7.12(b)所示。

下面来研究电流在 0~1 A 之间上升和下降速度更快时对电压产生的影响。

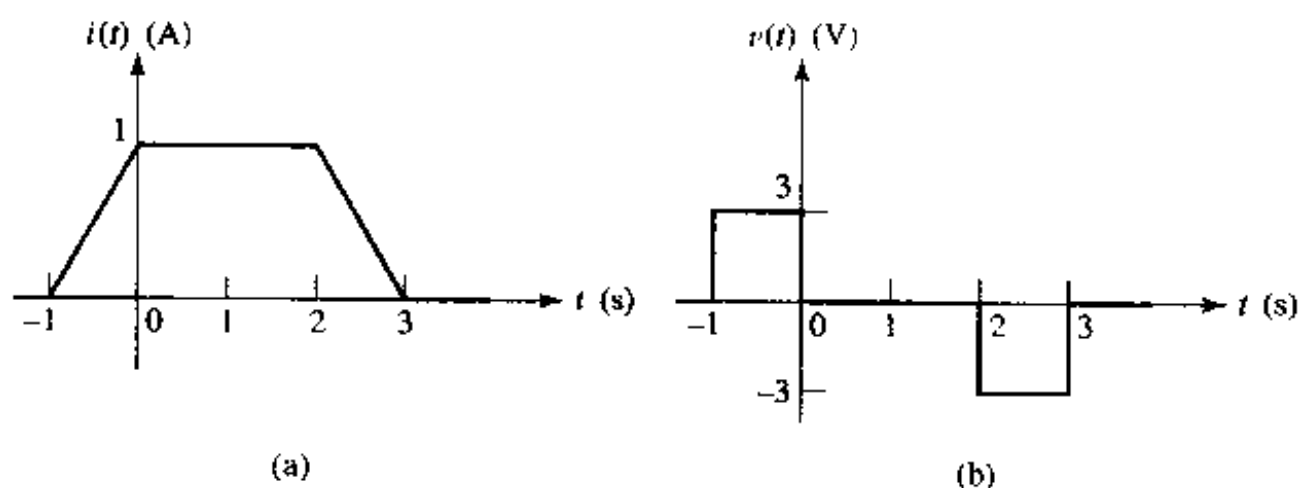


图 7.12 (a)流过 3 H 电感的电流波形;(b)相应的电压波形, $v = 3 di/dt$

例题 7.4 将图 7.13(a)所示的电流波形加到例题 7.3 中的电感上,求相应的电感电压

注意到,这时电流上升和下降的时间区间减小为 0.1 s,这样,相应导数的幅度均增大为原来的 10 倍,这时的电流和电压曲线分别如图 7.13(a)和图 7.13(b)所示。有趣的是,对于图 7.12(b)和 7.13(b)所示的电压波形,各电压脉冲的面积均为 $3 \text{ V}\cdot\text{s}$ 。

继续减小这两个时间区间的长度将使电压幅度成比例增大,但这只发生在电流上升或者下降区间。电流的突变将产生无穷大的电压尖峰(每个尖峰的面积均为 $3 \text{ V}\cdot\text{s}$),如图 7.14(a)和图 7.14(b)所示。或者从相反但同样有效的另一个角度来看,产生无穷大电压尖峰需要电流的突变。

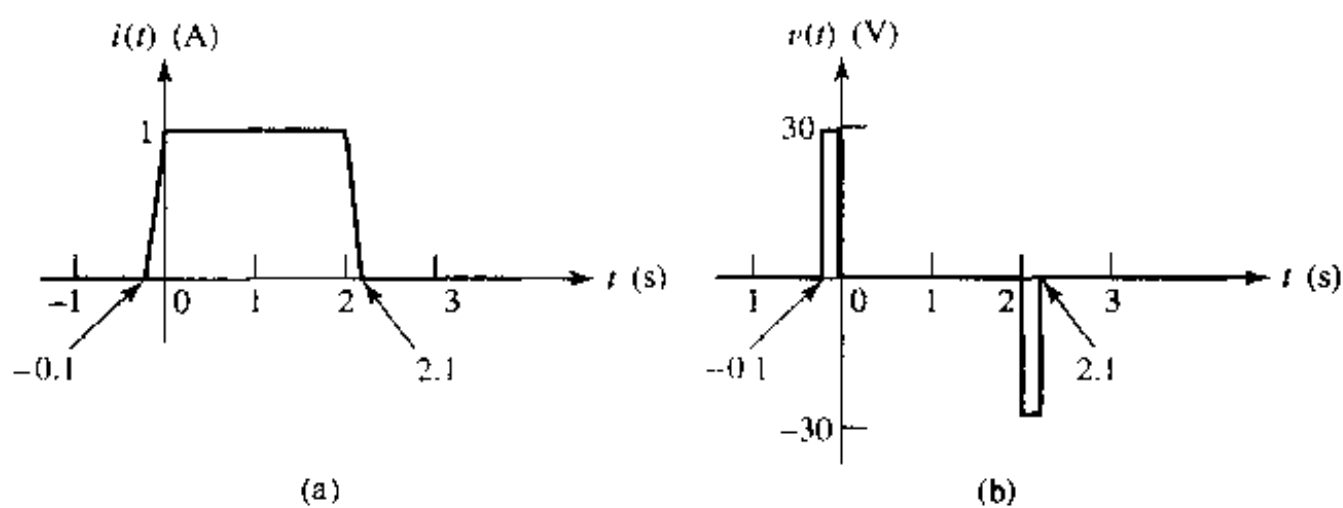


图 7.13 (a)图 7.12(a)中的电流从 0 A 变到 1 A,从 1 A 变到 0 A 的时间区间减小为原来的 1/10;(b)相应的电压波形。为清晰起见,放大了脉冲宽度

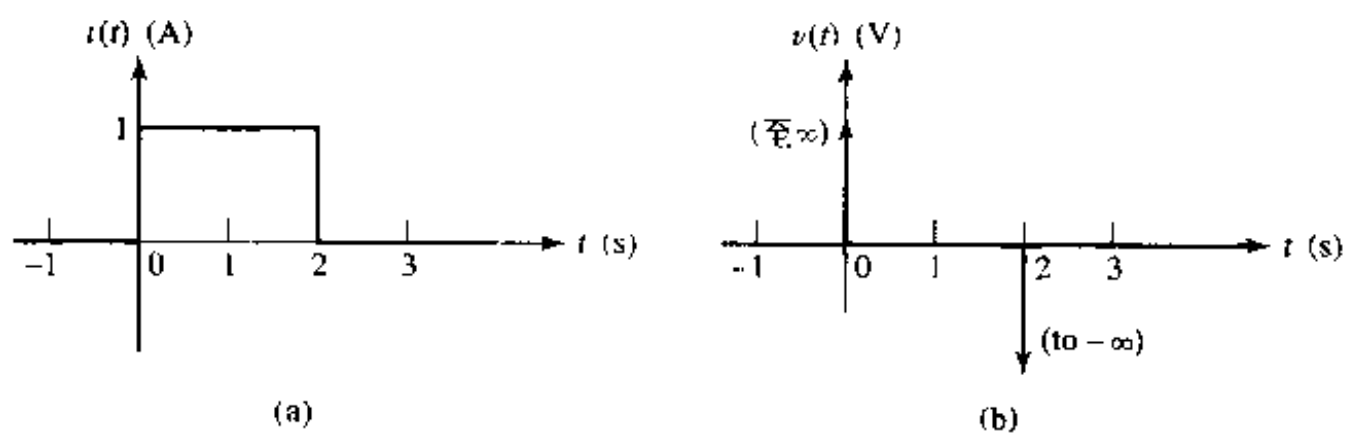


图 7.14 (a)图 7.13(a)中电流从 0 A 变到 1 A 和从 1 A 变到 0 A 所要求的时间减小到 0,上升和下降为突变;(b)3 H 电感上的电压由一个正无穷大尖峰和一个负无穷大尖峰组成

练习

- 7.3 某个 0.2 H 电感上流过的电流如图 7.15 所示,采用无源符号规则,求出 t 为下列值时的 v_L :(a)0;(b)2 ms;(c)6 ms。

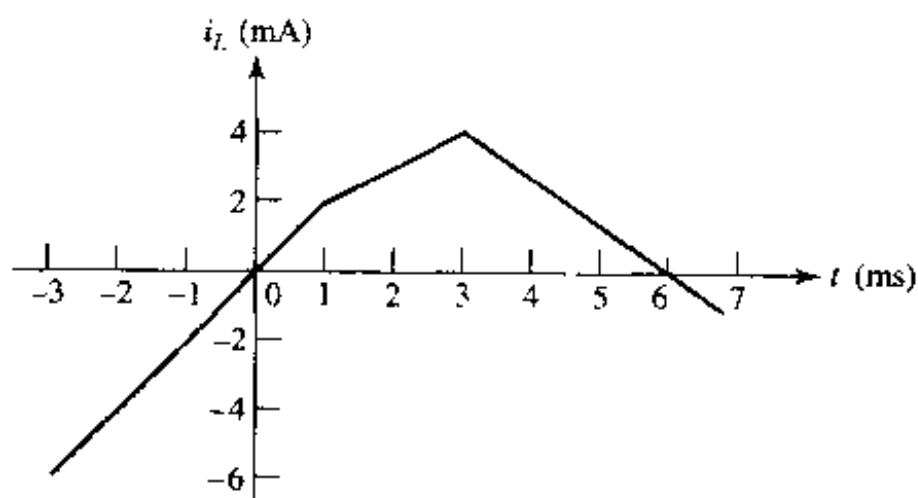


图 7.15

答案:0.4 V;0.2 V; -0.267 V

7.3.2 电压 - 电流的积分关系

前面采用了下面简单的微分公式来定义电感:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

并且,根据这个关系式已经得到了电感的几个特性。比如,对于直流电流而言,可以将电感视为短路;另外,不允许电感电流从一个值跳变到另一个值,因为这要求电感具有无穷大的电压和功率。从这个简单的电感定义式中还可以得到其他信息。将公式改写成稍微不同的形式:

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

然后来考虑对它的积分。首先考虑两个积分的积分限,因为需要求出时刻 t 的电流 i ,所以这两个值就分别规定了公式两边的积分上限;同样,对于下限,不失一般性,假定电流在时刻 t_0 的电流为 $i(t_0)$,于是:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

这样可以得到下面的公式:

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt'$$

或

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' + i(t_0) \quad (7.5)$$

式(7.4)以电流来表示电压,而式(7.5)则以电压来表示电流。式(7.5)还可以有其他表示形式,例如可以将定积分写成不定积分加上积分常数 k 的形式:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt + k \quad (7.6)$$

进一步假定求解的是一个实际问题,这时可选取 t_0 为 $-\infty$,以保证电感初始时没有任何电流和能量。因此,如果 $i(t_0) = i(-\infty) = 0$,那么:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt' \quad (7.7)$$

下面通过分析电感两端电压为确定值的一个例子来看上面几个积分的应用。

例题 7.5 一个 2 H 电感两端电压为 $6 \cos 5t$ V,如果 $i(t = -\pi/2) = 1$ A,求电感电流
根据式(7.5)有:

$$i(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 6 \cos 5t' dt' + i(t_0)$$

或

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5} \right) \sin 5t - \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5} \right) \sin 5t_0 + i(t_0) \\ &= 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin 5t_0 + i(t_0) \end{aligned}$$

第一项表明电感电流以正弦形式变化;第二项和第三项代表一个常量,当给定某个时刻的电流值后就可以求出这个常量。因为已知 $t = -\pi/2$ s 时的电流为 1 A,即当 t_0 为 $-\pi/2$ 时 $i(t_0) = 1$,于是得到:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin(-2.5\pi) + 1$$

或

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

还可以从式(7.6)出发得到相同的结果。已经有:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + k$$

通过令 $t = -\pi/2$ 时电流为 1 A, 可以得到 k 的值为:

$$1 = 0.6 \sin(-2.5\pi) + k$$

或

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

于是, 和前面一样, 得到:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

如果使用式(7.7)求解, 则对于这个特定的电压值而言将会出现问题。因为该公式是建立在 $t = -\infty$ 时电流为零的基础之上, 这对于实际的物理世界来说是正确的, 但现在处理的只是一个数学模型, 其中的元件和激励函数都是理想的。应用式(7.7)产生的困难在于积分后将得到:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t' \Big|_{-\infty}^t$$

试试通过积分下限求出该积分:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin(-\infty)$$

但是正弦函数在 $\pm\infty$ 处的值是不确定的, 不能求出该表达式。所以只有当求解的函数在 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于零时才能使用式(7.7)。

但是, 不能简单地得出结论说以后将只采用哪个公式, 因为这些公式各有其优越性, 这取决于不同的问题和应用。式(7.5)是一种通用的方法, 它明显地表明了积分常数为电流。式(7.6)是式(7.7)的简洁形式, 但是它没有很好地体现出积分常数的性质。最后需要指出的是, 式(7.7)是一个很好的表达式, 因为其中不含有任何常数, 但是, 它只适用于当 $t = -\infty$ 时电流为零或者当 $t = -\infty$ 时电流有确切解析表达式的情形。

7.3.3 电感储存的能量

下面来看功率和能量。吸收功率用电压和电流的乘积表示为:

$$p = vi = Li \frac{di}{dt}$$

电感吸收的能量 w_L 储存在线圈周围的磁场中, 可用功率在所求时间区间的积分表示:

$$\int_{t_0}^t p dt' = L \int_{t_0}^t \frac{di}{dt'} dt' = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i di = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \}$$

于是:

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \}$$

这里再一次假定了电流在时刻 t_0 为 $i(t_0)$ 。在使用该能量表达式时, 通常假定 t_0 选取为电流为零的时刻; 通常还假定该时刻的能量为零, 于是电感储存的能量可以用下面的表达式简单表示为:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2$$

根据以上分析可以知道,能量为零的参考时刻就是电感电流为零的任何时刻。在参考时刻后面的任何时刻,如果电流为零,则线圈中就没有储存能量,而只要电流不为零,无论其方向或符号如何,都必然有能量储存在电感中。从而,功率可以在某段时间传送到电感,然后又会被释放出来,对于理想电感而言,所有储存的能量都可以被释放出来。但是,实际线圈都是用实际的导线来制造的,这样必然具有一定的电阻,这时,能量就不能够无损耗地储存和释放。

可以用一个简单的例子来说明上面的结论。在图 7.16 中,3 H 电感与 0.1 Ω 电阻以及正弦电流源 $i_s = 12 \sin \frac{\pi t}{6}$ A 相串联,电阻可以看做为实际线圈的导线中必然存在的电阻。

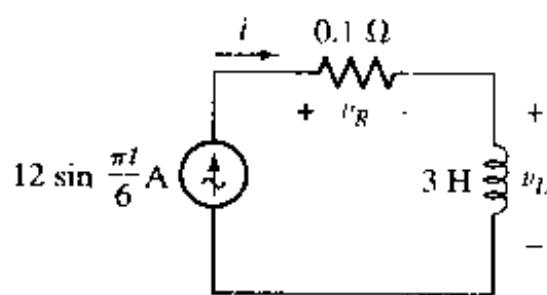


图 7.16 将正弦电流作为激励函数接入到串联 RL 电路中,其中的 0.1 Ω 代表制造电感的实际导线的电阻

例题 7.6 求图 7.16 中电感中能储存的最大能量,并计算有多少能量在电感的储存和释放的过程中被消耗

电感储存的能量为:

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi t}{6} \text{ J}$$

该能量从 $t=0$ 时的零增加到 $t=3$ s 时的 216 J,因此在电感中储存的最大能量为 216 J。

电阻两端的电压为:

$$v_R = Ri = 1.2 \sin \frac{\pi t}{6} \text{ V}$$

电感两端的电压可由电感的定义式给出:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{d}{dt} \left(12 \sin \frac{\pi}{6} t \right) = 6\pi \cos \frac{\pi}{6} t \text{ V}$$

能量在 $t=3$ s 达到峰值后,又逐渐被电感完全释放出来。下面来看 216 J 能量在 6 秒的时间内由于储存和释放所消耗的部分。容易求得电阻消耗的功率为:

$$p_R = i^2 R = 14.4 \sin^2 \frac{\pi t}{6} \text{ W}$$

于是可以得到在 6 s 的时间内在电阻上转变为热量的能量为:

$$w_R = \int_0^6 p_R dt = \int_0^6 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t dt$$

或

$$w_R = \int_0^6 14.4 \times \left(\frac{1}{2} \right) \times \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} t \right) dt = 43.2 \text{ J}$$

即在 6 s 的时间内储存和释放 216 J 能量的过程中,一共消耗了 43.2 J 的能量。这个数值

相当于所储存的最大能量的 20%，不过，对于具有这么大电感的线圈来说这是合理的；对于电感值为 $100 \mu\text{H}$ 左右的线圈，可以估计出这个值大约为 2% 到 3%。

练习

- 7.4 假定图 7.17 中的电感 $L = 25 \text{ mH}$ ，(a) 如果 $i = 10 te^{-100t}$ ，求 $t = 12 \text{ ms}$ 时的 v ；(b) 如果 $v = 6te^{-12t}$ ， $i(0) = 10 \text{ A}$ ，求 $t = 0.1 \text{ s}$ 时的 i 。如果 $i = 8(1 - e^{-40t}) \text{ mA}$ ，求 (c) $t = 50 \text{ ms}$ 时传送到电感的功率和 (d) $t = 40 \text{ ms}$ 时电感储存的能量。

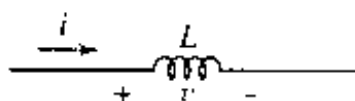


图 7.17

答案：-15.06 mV；24.0A；7.49 μW ；0.510 μJ

下面来概括一下由定义式 $v = L di/dt$ 导出的电感的 4 个重要特性。

7.3.4 理想电感的重要特性

1. 如果流过电感的电流不随时间变化，则电感两端的电压为零，因此，电感是“直流短路”的。
2. 电感两端的电压为零时仍然可以储存能量，例如当流过它的电流为恒定值时。
3. 不可能在零时间间隔内改变流过电感的电流，因为这要求电感两端的电压为无穷大。可以将电感对于电流突变的抵抗类比为物体对于速度突变的抵抗。
4. 理想电感只储存能量不消耗能量。这在数学模型上是正确的，但是对于实际电感而言它并不正确，因为实际电感总存在一定的电阻。

如果将上面这几句话的某些词语用它们的“对偶”词语来替换，即将“电感”替换为“电容”，“电流”替换为“电压”，“流过”替换为“两端”，短路替换为“开路”，就得到了前面给出的关于电容的特性的表达，反之亦然。这是一件很有趣的事，在 7.7 节中将详细讨论这种对偶关系。

7.4 电感和电容的组合

既然认为电感和电容为无源元件，那么需要验证一下以前得到的电阻电路的分析方法是否还有效。同时，采用类似于第 3 章中电阻组合的方法，可以把电感或电容串联或并联组合用它们的等效电路来替换。

首先来看两个基尔霍夫定律，这两个定律的正确性是不言而喻的。因为这两个定律成立的前提对组成网络的元件类型并没有什么限制，所以对于电感和电容它们都是正确的。

7.4.1 电感的串联

现在开始将以前用于简化电阻组合的过程应用到简化电感和电容组合上。首先，考虑将一个理想电压源加到由 N 个电感串联的组合上，如图 7.18(a) 所示。需要求出单个等效电感 L_{eq} ，用它代替串联的电感组合后电流 $i(t)$ 不改变。等效电路图如图 7.18(b) 所示。对原电路运用 KVL，有：

$$v_s = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

$$\begin{aligned}
 &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N) \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

或者,简写为:

$$v_s = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \sum_{n=1}^N L_n$$

而对于等效电路,有:

$$v_s = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}$$

从而得到等效电感为:

$$L_{\text{eq}} = (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)$$

或

$$L_{\text{eq}} = \sum_{n=1}^N L_n$$

串联电感组合的等效电感值为各电感的和,这与串联电阻组合所得到的结果完全相同。

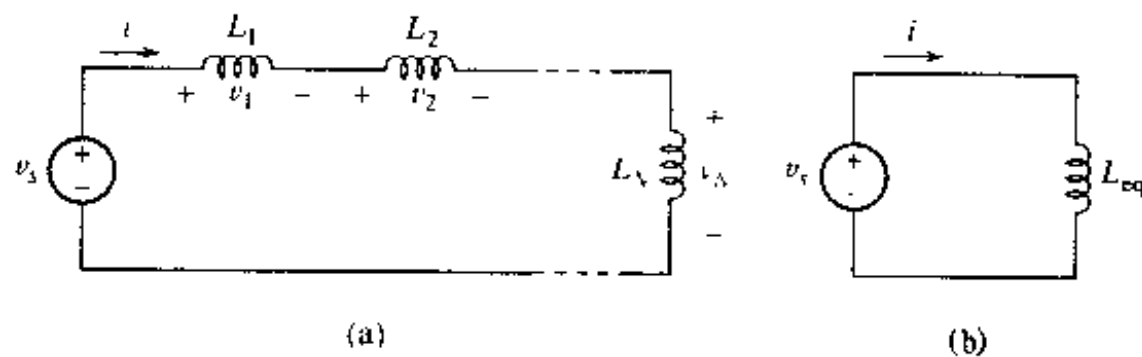


图 7.18 (a) N 个电感的串联;(b) 其等效电路,其中 $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$

7.4.2 电感的并联

对原电路列出惟一的节点方程,可以得到并联电感组合的等效电感,如图 7.19(a)所示:

$$\begin{aligned}
 i_s &= \sum_{n=1}^N i_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v dt + i_n(t_0) \right] \\
 &= \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^t v dt + \sum_{n=1}^N i_n(t_0)
 \end{aligned}$$

将它与图 7.19(b)所示的等效电路得到的结果相比较:

$$i_s = \frac{1}{L_{\text{eq}}} \int_{t_0}^t v dt + i_s(t_0)$$

根据基尔霍夫电流定律可知, $i_s(t_0)$ 必须等于 t_0 时刻各支路的电流和,所以这两个积分必然相等,因此:

$$L_{\text{eq}} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N}$$

对于两个电感并联的特殊情形:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

可以看到, 并联电感组合与并联电阻组合的结果完全相同。

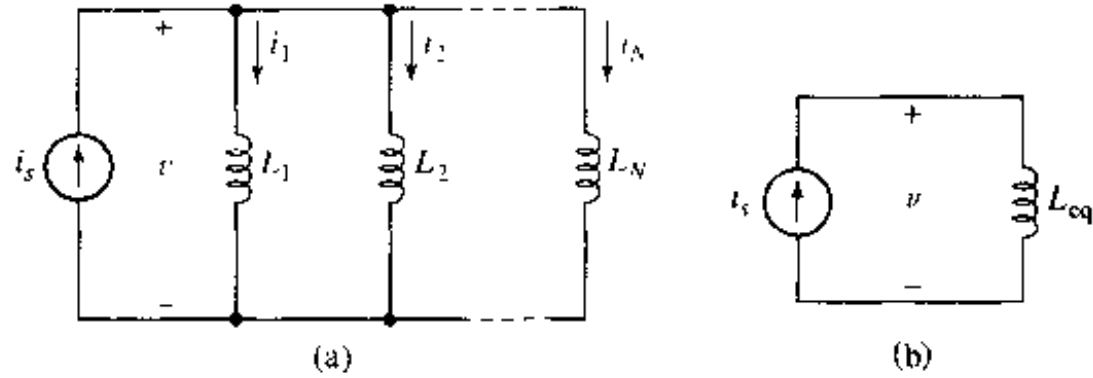


图 7.19 (a) N 个电感的并联; (b) 其等效电路, 其中 $L_{eq} = [1/L_1 + 1/L_2 + \dots + 1/L_N]^{-1}$

7.4.3 电容的串联

为求出 N 个串联电容的等效电容, 利用图 7.20(a) 的电路以及图 7.20(b) 的等效电路可以写出:

$$\begin{aligned} v_s &= \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i dt + v_n(t_0) \right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^t i dt + \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \end{aligned}$$

和

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i dt + v_s(t_0)$$

根据基尔霍夫电压定律可知, $v_s(t_0)$ 必须等于 t_0 时刻的各电容电压的和, 从而:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N}$$

可以看到, 串联电容组合与串联电导组合的结果相同, 或者说与并联电阻组合的结果相同。对于两个电容的串联情形, 有:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

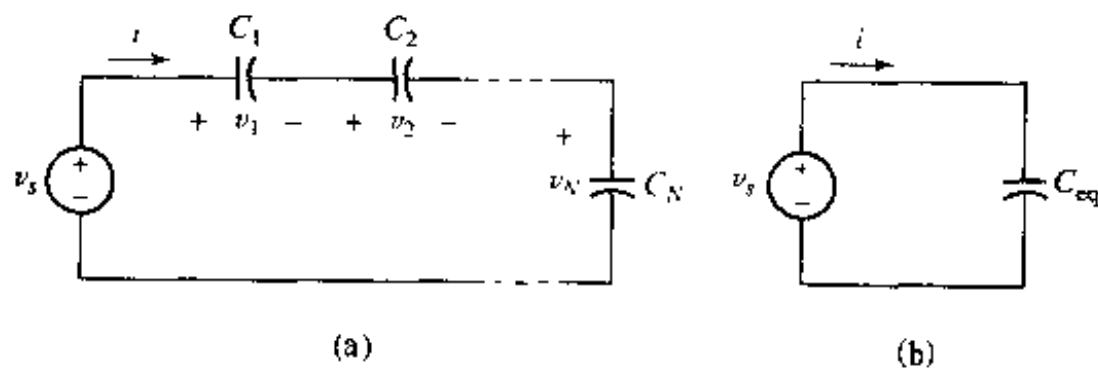


图 7.20 (a) N 个电容的串联; (b) 其等效电路, 其中 $C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N]^{-1}$

7.4.4 电容的并联

最后,利用图 7.21 中的电路,可以得到与 N 个并联电容等效的电容值为:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

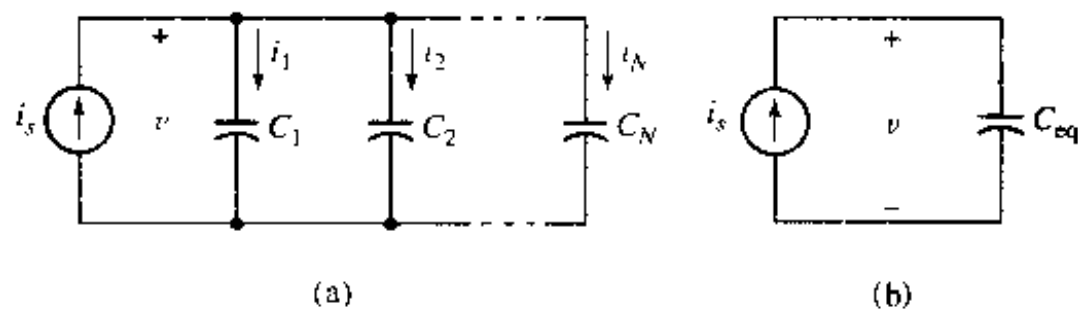


图 7.21 (a) N 个电容的并联;(b)其等效电路,其中 $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$

得到这个结果并不让人感到惊讶,即并联电容组合与前面串联电阻组合的结果相同,这就是说,简单地将所有的电容相加即可。

上面这些公式都非常有用,因此值得记住它们。电感的并联和串联公式与相应的电阻公式相同,因而它们通常被认为是“显然”的,而对于电容的串联和并联相应的表达式需要特别注意,因为它们的形式与电阻或电感相反,如果不注意的话,往往会犯错误。

例题 7.7 利用串联和并联组合的简化方法,化简图 7.22(a)所示的网络

首先把串联的 $6 \mu\text{F}$ 和 $3 \mu\text{F}$ 电容组合成等效的 $2 \mu\text{F}$ 电容,然后该电容又与 $1 \mu\text{F}$ 电容并联,得到等效电容为 $3 \mu\text{F}$ 。另外, 3H 和 2H 电感已用等效的 1.2H 代替,并且把它和另外的 0.8H 加起来,得到总的等效电感为 2H 。这个大大简化后的等效网络如图 7.22(b)所示。

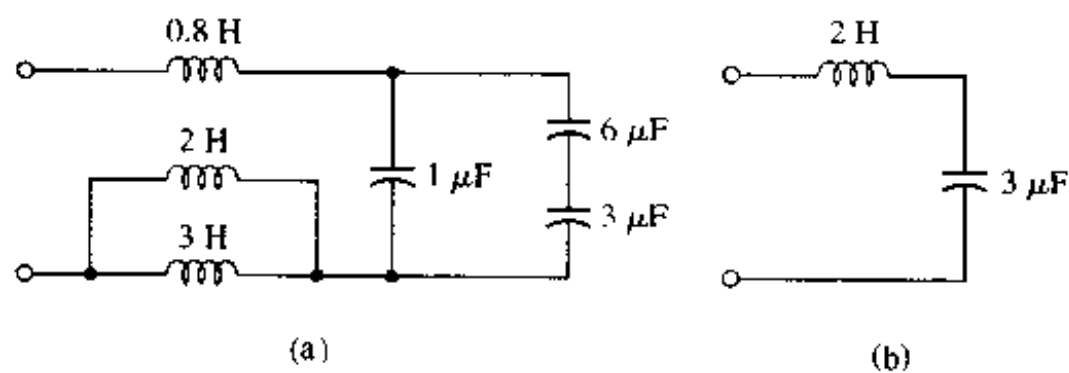


图 7.22 (a) 给出的 LC 网络;(b)简化后的等效电路

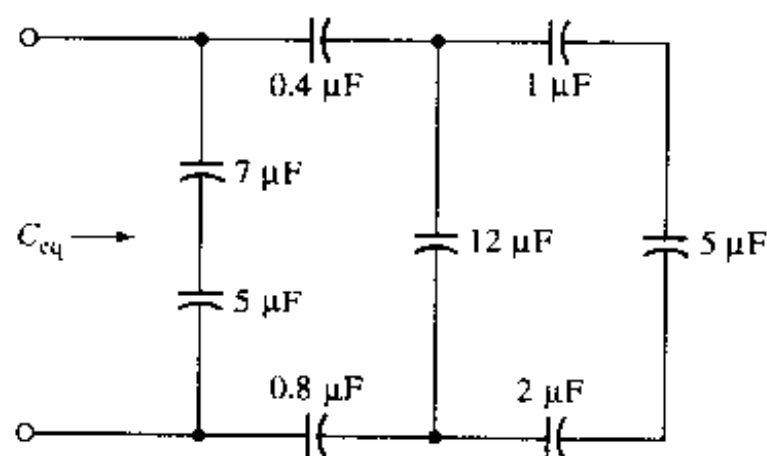


图 7.23

练习

7.5 求图 7.23 所示网络的 C_{eq} 。

答案: $3.18 \mu\text{F}$

图 7.24 所示网络含有 3 个电感和 3 个电容,但是其中并没有任何并联或串联的电感或电容可以合并,所以不能用上面的方法来简化该网络。

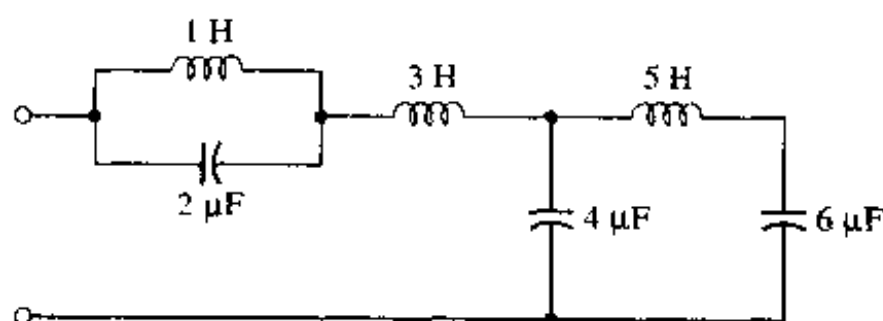


图 7.24 一个 LC 网络,其中没有任何可合并的并联或串联的电感或电容

7.5 线性推论

下面开始讨论节点和网孔分析。既然知道基尔霍夫定律对电感和电容仍然适用,那么根据这个定律对要分析的电路列出足够多的独立方程组应该不会有困难。但是,这些方程是常系数线性积分微分方程,很难将它们描述出来,更不用说去求解。所以,这里写出它们的目的是为了熟悉如何在 RLC 电路中应用基尔霍夫定律,在后面的章节中将讨论简单情形下的求解。

例题 7.8 如图 7.25 所示电路,写出正确的节点方程

选取节点电压如图 7.25 所示,对流出中间节点的电流求和,有:

$$\frac{1}{L} \int_{t_0}^t (v_1 - v_2) dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} = 0$$

其中, $i_L(t_0)$ 是在积分起始时刻的电感电流的值。对于右边的节点:

$$C_1 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

重新写出上面这两个公式,得到:

$$\frac{v_1}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_1 dt - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_s dt - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1 \frac{dv_2}{dt} = C_1 \frac{dv_1}{dt} + i_s$$

这些就是前面说过的积分微分方程,它们有几个有趣的特性。首先可以看到,电压源 v_s 恰好分别以积分和微分的形式出现在两个公式中,而不是简单地以 v_s 的形式出现。因为所有电源在所有时刻的值都是确定的,所以可以求出它们的积分或者微分。其次,电感的初始电流 $i_L(t_0)$ 相当于中间节点方程中的(并且是恒定的)电流源。

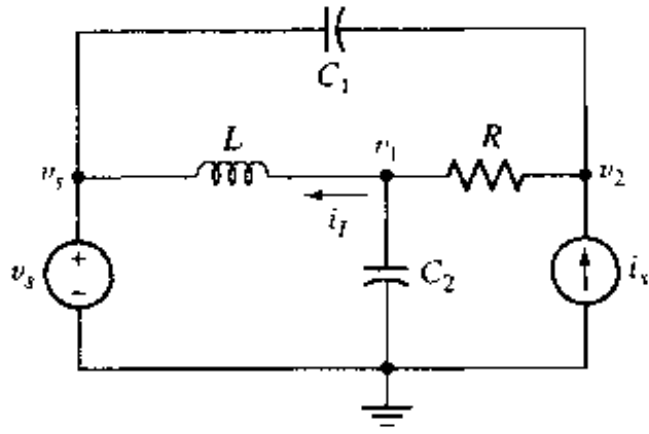


图 7.25 一个 4 节点 RLC 电路, 已标出各节点电压

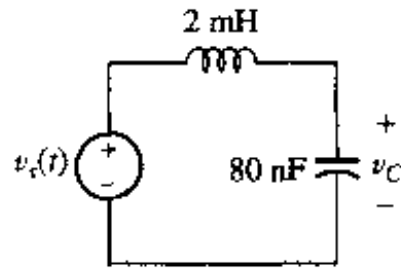


图 7.26

练习

7.6 如图 7.26 所示电路中 $v_s(t) = 4 \cos 10^5 t$ V, 求 $v_c(t)$ 。

答案: $-2.4 \cos 10^5 t$ V。

现在不去求解积分微分方程。不过,有必要指出的是,当电压激励函数为正弦函数时,可以分别对三个无源元件定义电压 - 电流比(称为阻抗),或者电流 - 电压比(称为导纳)。这样,上面方程中的两个节点电压前的因子将简化为简单的因子,于是方程组变成了线性的代数方程组,这样就可以和以前一样采用行列式或者简单的线性消元法来求解。

把线性性质应用于 RLC 电路中将会简化分析。根据前面对线性电路的定义知,RLC 电路也是线性电路,因为电感和电容的电压 - 电流关系为线性关系。例如对于电感,有:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

将电流乘以某个常量 K ,电压也会增大为原来的 K 倍。对于积分形式:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' + i(t_0)$$

可以看到,如果各项都乘以因子 K ,那么电流的初始值也必然增大相同的倍数。

对电容进行类似的分析可知它也是线性的。于是,由独立电源、线性受控源和线性电阻、电感和电容组成的电路都是线性电路。

同样,这些线性电路中响应和激励函数也成正比,这可以通过从一般的积分微分方程组出发去证明它。首先,将各方程中的含有 Ri , $L di/dt$, $1/C \int i dt$ 的项放在方程左边,而将独立电源的电压放在右边。比如其中的一个方程可能具有下面的形式:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v_c(t_0) = v_s$$

如果现在令每个独立电源都增大 K 倍,那么每个方程的右边都增大了 K 倍。现在在左边的各项或者是含有某个回路电流,或者是初始电容电压的线性项。为了使得所有响应(回路电流)也增大 K 倍,很显然必须把初始电容电压也增大 K 倍,这就是说,必须将电容初始电压看做独立电源,这样它也增大 K 倍。同样地,在节点分析中电感初始电流也应当看做独立电源。

这样,激励源和响应之间的比例关系可以扩展到一般的 RLC 电路,这样叠加原理依然适用。需要强调的是,在应用叠加原理时,电容初始电压和电感初始电流必须当成独立电源看待。在第 5 章中我们知道,叠加原理是电阻电路线性特性的必然结果。电阻电路的线性性质

是因为电阻的电压-电流关系和基尔霍夫定律均是线性的

但是,在对 RLC 电路应用叠加原理之前,首先有必要导出只存在一个独立电源时的求解电路方程组的方法。这时应该很明确,线性电路的响应幅度和激励源的幅度成正比。在以后使用叠加原理时,要考虑到 $t = t_0$ 时的电感电流或者电容电压相当于电源,并且在适当的时候将它们移去。

戴维南定理和诺顿定理成立的基础是电路的线性性质、基尔霍夫定律和叠加原理。一般的 RLC 电路都满足这些要求,因此,任何线性电路都可以用这两个定理来分析,其中线性电路可以包含独立电压源和电流源,线性受控电压源和电流源,以及线性电阻、电感和电容等等。在这里没有必要重复这两个定理,因为前面关于它们的表述同样适用于一般的 RLC 电路。

7.6 带电容的简单运放电路

前一章已经介绍了几种基于理想运放的放大电路,可以发现几乎在所有的情形下,都是通过电阻比值的组合形式将输出与输入电压联系起来。如果将其中的一个或多个电阻替换成电容,那么可以得到一些有趣的电路,它们的输出与输入电压的微分或者积分成正比。这些电路广泛应用于许多实际电路中,例如可以将速度传感器和运放电路连接起来得到与加速度成正比的信号,又如可以对一段给定时间内所测量的电流积分而得到表示向金属电极注入总电荷的输出信号。

使用理想运放来构造积分器时,可以将运放的同相输入端接地,然后将理想电容作为反馈元件接到输入端和输出端之间,再将电源 v_s 通过一个理想电阻接到反相输入端,如图 7.27 所示。

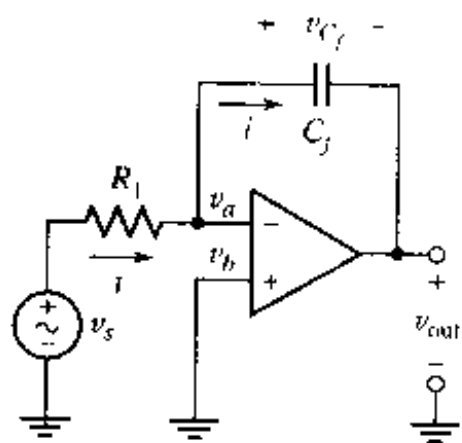


图 7.27 用理想运放构造的积分器

对反相输入端应用节点分析,有:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

可以将电流 i 与电容两端的电压联系起来:

$$i = C \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

于是得到:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

根据理想运放规则 2 可知 $v_a = v_b = 0$, 所以:

$$0 = \frac{-v_1}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

对 v_{out} 积分并求解可以得到:

$$v_{C_f} = v_a - v_{out} = 0 - v_{out} = \frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_1 dt' + v_{C_f}(0)$$

或

$$v_{out} = -\frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_1 dt' - v_{C_f}(0) \quad (7.8)$$

这样,就用一个电阻、一个电容和一个运放得到了积分器。可以看到,输出的第一项是 $1/RC$ 乘以输入在 $t'=0$ 到 t 区间的积分的负值,第二项是 $(RC)^{-1}$ 的初始值的负值。如果需要,可以通过选取合适的 R 和 C 值使 $(RC)^{-1}$ 等于 1, 比如取 $R = 1 \text{ M}\Omega$ 和 $C = 1 \mu\text{F}$, 而取其他值时则 $(RC)^{-1}$ 不等于 1, 这时输出电压将相应增大或者减小。

在结束对积分电路的讨论以前,喜欢思考的读者可能会问:“可以用电感来替换电容来得到一个微分电路吗?”确实可以,不过在电路设计中,考虑到电感的尺寸大、重量大、成本高以及它的寄生电阻和电容,因此总是尽可能地少用电感。事实上,如果将图 7.27 中电阻和电容的位置交换,就可以得到微分器。

例题 7.9 如图 7.28 所示的运放电路,导出输出电压的表达式

首先,在反相输入端写出节点公式,已知 $v_{C_1} \triangleq v_a - v_1$:

$$0 = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f}$$

根据理想运放规则 2, 有 $v_a = v_b = 0$, 于是:

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{out}}{R_f}$$

解出 v_{out} :

$$v_{out} = R_f C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}$$

因为 $v_{C_1} = v_a - v_1 = -v_1$, 所以:

$$v_{out} = -R_f C_1 \frac{dv_1}{dt}$$

所以,交换图 7.28 所示电路中电阻和电容的位置,就得到了微分电路。

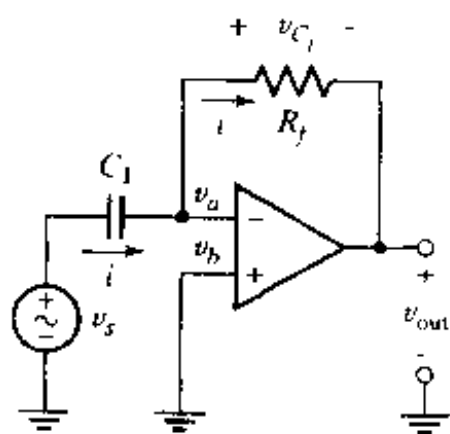


图 7.28 用理想运放构成微分器

练习

7.7 如图 7.29 所示电路, 导出以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

答案: $v_{out} = -L_f/R_1 dv_{in}/dt$

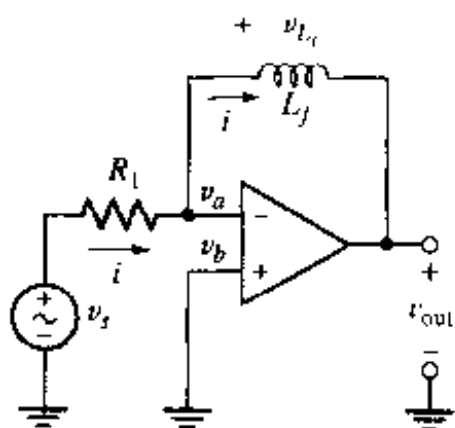


图 7.29

7.7 对偶

对偶性可以应用于很多基本的工程概念中, 本节将以电路方程组的形式来定义对偶。如果描述一个电路特性的网孔方程组与描述另一个电路特性的节点方程组具有相同的数学形式, 则称两个电路是对偶的。如果一个电路的各网孔方程均与另一个电路相应的节点方程在数值上也相同, 则称它们为完全对偶(exact duals)。当然, 电流变量与电压变量本身不可能相同, 对偶性本身仅是指对偶电路所表现出来的性质。

下面通过列出图 7.30 所示电路的两个网孔方程来解释该定义, 并且用这个定义来构造一个完全对偶电路。设两个网孔电流为 i_1 和 i_2 , 则网孔方程为:

$$3i_1 + 4 \frac{di_1}{dt} - 4 \frac{di_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (7.9)$$

$$-4 \frac{di_1}{dt} + 4 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t i_2 dt + 5i_2 = -10 \quad (7.10)$$

注意到上式假定了 $t=0$ 时电容电压 v_C 为 10 V。

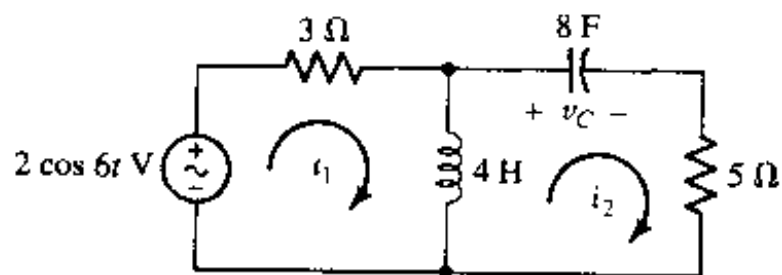


图 7.30 用对偶的定义求该电路的对偶电路

现在就可以根据以上两个方程构造出另外两个方程, 它们描述了所给电路的对偶电路。因为希望它们为节点方程, 所以首先把方程(7.9)和方程(7.10)中的网孔电流 i_1 和 i_2 替换成相对参考节点的节点电压 v_1 和 v_2 , 得到:

$$3v_1 + 4 \frac{dv_1}{dt} - 4 \frac{dv_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (7.11)$$

$$-4 \frac{dv_1}{dt} + 4 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t i_2 dt + 5v_2 = -10 \quad (7.12)$$

下面来构造上面两个节点方程所表示的电路。

首先画一条线用来代表参考节点,然后可以在 v_1 和 v_2 的正参考处放置两个节点。

方程(7.11)表明节点 1 和参考节点之间存在一个 $2 \cos 6t$ A 的电流源,它提供了流入节点 1 的电流。这个公式还表明在节点 1 和参考节点之间存在一个 3 S 电导。下面来看方程(7.12),首先考虑非公共项,这就是说没有出现在方程(7.11)中的项,这个非公共项说明在节点 2 和参考节点之间存在一个 8 H 电感和一个 5 S 电导(它们相互并联)。方程(7.11)和方程(7.12)中类似的两项说明节点 1 和 2 之间存在一个 4 F 电容。方程(7.12)右边的常数项为电感电流在 $t=0$ 时的值,换句话说, $i_l(0) = 10$ A。构造出的对偶电路如图 7.31 所示,因为这两组方程在数值上也相同,所以两个电路为完全对偶。

事实上,可以用更简单的方法来得到对偶电路,因为没有必要列出方程。为构造电路的对偶,可以通过考虑该电路的网孔方程来得到。因为每一个网孔需要有一个非参考节点与之对应,另外还必须有一个参考节点,所以可以在所给电路中的各网孔分别放置一个节点,然后在电路图附近画一条线或者画一个将电路图围起的环作为参考节点。位于两个网孔之间的每个公共元件产生相应网孔方程中的相同项(不包括符号),必须将它替换为这样一个元件,使之产生两个节点方程中的对偶项,于是这个对偶元件必然连接在公共元件所在的两个网孔内的两个非参考节点之间。

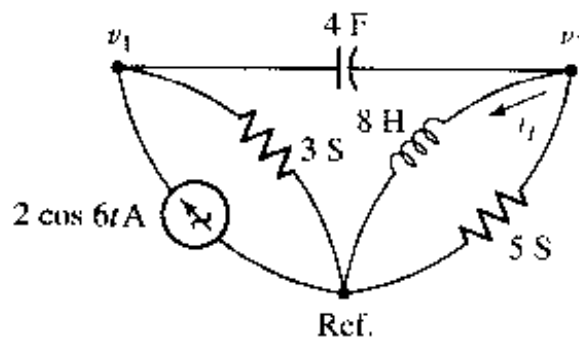


图 7.31 图 7.30 所示电路的完全对偶

如果将电感替换成电容,电容替换成电感,电导替换成电阻,电阻替换成电导,则两组方程的数学模型相同。因此图 7.30 所示电路中网孔 1 和网孔 2 之间的 4 H 电感在对偶电路中对应于节点 1 和 2 之间的 4 F 电容。

如果某个元件只位于单个网孔中,则该元件的对偶必然位于这个网孔在对偶电路中对应的节点与参考节点之间。重新来看图 7.30,电压源 $2 \cos 6t$ V 仅在网孔 1 中,则它的对偶电流源 $2 \cos 6t$ A 位于非参考节点 1 和参考节点之间。因为电压源为顺时针方向,所以电流源的方向必然为流入非参考节点。最后,还要求出给定电路中 8 F 电容初始电压的对偶。从前面两个方程组可以看出,电容初始电压的对偶为对偶电路中流过电感的初始电流,其大小与初始电压相同;通过将所给电路中初始电压和对偶电路中的初始电流均视为电源,容易判断出该电流的方向。因此,如果将所给电路中的 v_c 看做电源,那么它将以 $-v_c$ 的形式出现在网孔方程的右边;在对偶电路中,如果将电流 i_l 看做电源,那么它将以 $-i_l$ 的形式出现在网孔方程的右边。两个对偶方程组的形式完全一样,因此将 v_c 和 i_l 看做电源时,这两个电源必然具有相同的符号,所以如果 $v_c(0) = 10$ V,那么 $i_l(0)$ 必然为 10 A。

将图 7.30 所示电路重新画出,如图 7.32 所示,可以直接在原电路图上进行操作得到其完全对偶电路。对原电路图的每一个元件,采用下面的方法依次画出其对偶,其对偶元件位于以该元件为公共元件的两个网孔内的两个对偶节点之间。在所给电路外围画一条线表示参考节点,可以更加直观。将求得的对偶电路画成更标准的形式后如图 7.31 所示。

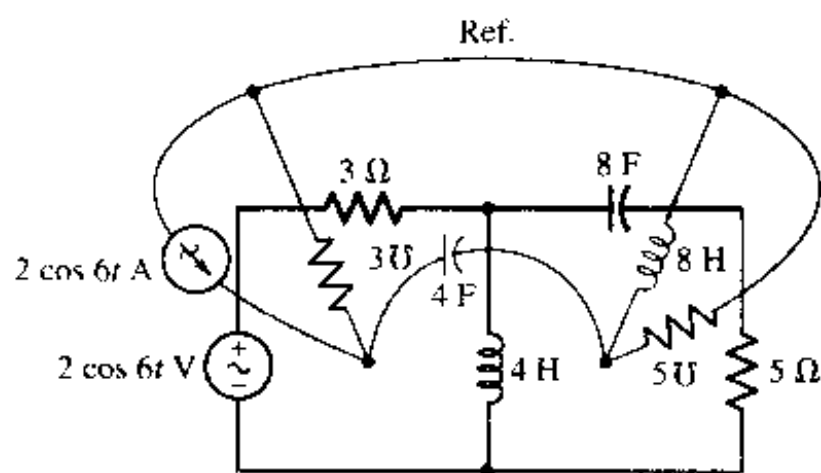


图 7.32 直接从图 7.28 电路构造出的对偶电路

构造对偶电路的另一个例子如图 7.33(a)和图 7.33(b)所示。因为没有确定任何元件的值,所以这两个电路是对偶电路,但不一定是完全对偶的。通过在图 7.33(b)所示对偶电路中的 5 个网孔中分别放置一个节点,然后按前面的步骤可以重构原电路。

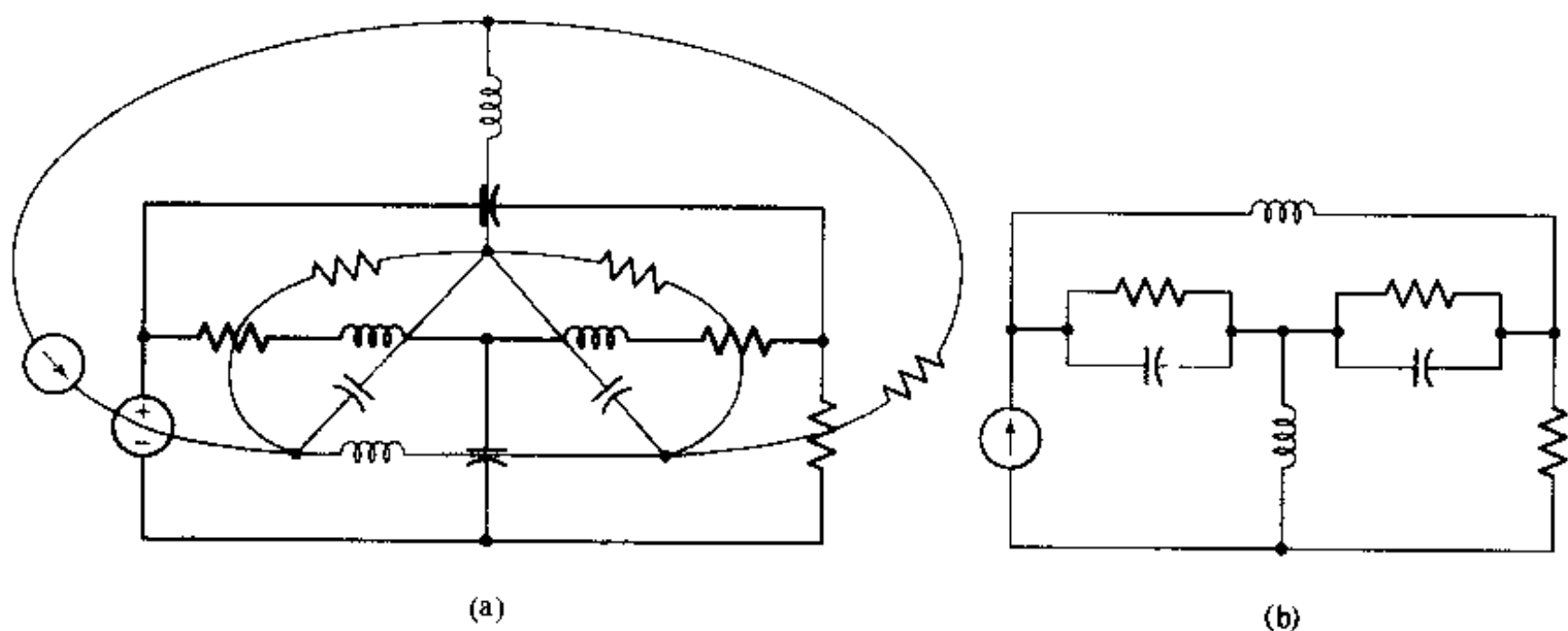


图 7.33 (a)在所给电路图(粗体)中直接画出原电路的对偶;(b)为便于与原来的电路相比较,以更标准的形式画出的对偶电路

对偶的概念还可以运用到电路分析的过程和描述电路工作情况的语言表述中。例如,如果给定一个电压源与一个电容的串联,那么可以做出下面的结论:“电压源将产生流过电容的电流”,而用对偶语言可将其表述为:“电流源将产生电感两端的电压。”对于不那么严格的表述,例如“电流沿串联电路流过,”则需要一些创造性才可以得到其对偶表述^①。

前面已经说过了对偶元件、对偶语言表述和对偶电路,那么什么是对偶网络呢?考虑由电阻 R 与电感 L 串联组成的网络,这是一个双端网络,它的对偶存在,通过给该网络连接一个理想电源可以得到其对偶。这时,首先得出电源的对偶,然后将对偶电源并联一个与电阻 R 大

^① 有人建议为,“电压存在于整个并联电路中”。