

小相等的电导 G , 再并联一个与电感 L 大小相等的电容 C , 就得到了对偶网络。可以将对偶网络看做是连接到对偶电源的双端网络, 它由 G 和 C 并联组成。

在结束对偶的讨论之前, 需要指出的是, 对偶是以网孔和节点方程为基础定义的。因为非平面电路不能用网孔方程组描述, 所以非平面电路不存在对偶。

应该使用对偶性来减少工作量, 因为对于一些简单的标准电路, 如果已经分析过其对偶电路, 就不必再分析了。所以当已分析了串联 RL 电路, 那么就不需要仔细分析并联 RC 电路了, 但并不是因为它没那么重要, 而是因为已经知道了分析该网络的对偶方法。因为一些复杂电路并不是那样易于分析, 所以使用对偶的方法通常并不能加速求解。

练习

7.8 写出图 7.34(a) 所示电路的节点方程, 并通过直接代入来验证 $v = -80e^{-10^6 t}$ mV 为其解。根据这个结论, 对图 7.34(b) 所示电路, 求 (a) v_1 ; (b) v_2 ; 和 (c) i 。

答案: $-8e^{-10^6 t}$ mV; $16e^{-10^6 t}$ V; $-80e^{-10^6 t}$ mA

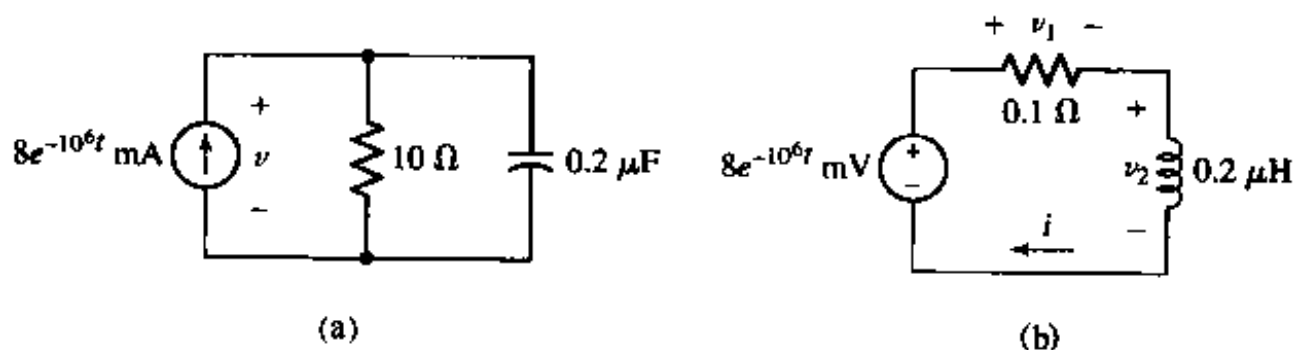


图 7.34

7.8 用 PSpice 对电容和电感建模

用 PSpice 来分析包含电感和电容的电路时, 往往需要能够确定各元件的初始条件[例如 $v_C(0)$ 和 $i_L(0)$]。这可以通过双击元件符号来完成, 双击后将产生图 7.35 所示的对话框。可以看到, 除了可设定电容的值(默认值为 1 nF)外, 还可设定初始条件(IC =)。双击电感的符号也得到一个类似的对话框。如果希望初始条件显示在原理图上(这总是一个好想法), 则可以单击 Change Display 按钮, 然后做相应的选择即可。要注意的是, 在原理图中放置电容时, 初始为水平放置, 初始电压的正参考端为它的左端。

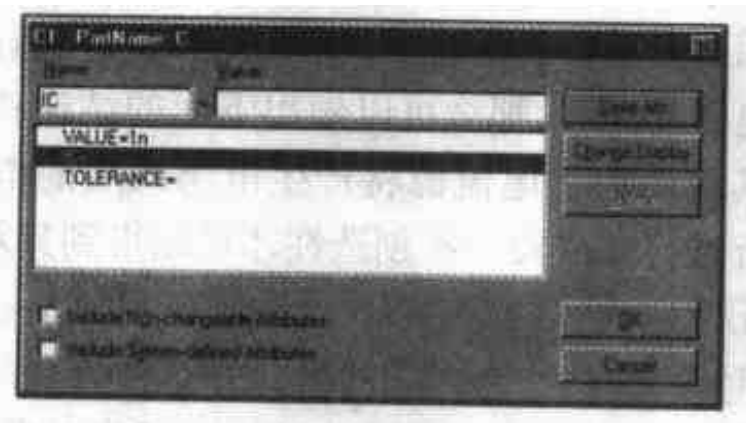


图 7.35 设置电容值和初始条件的对话框

7.8.1 PSpice

对图 7.36 所示电路的输出电压波形进行仿真, 设 $v_i = 5 \sin 100t$ V, $R_1 = 100$ k Ω , $C_f = 4.7$ μ F, 以及 $v_c(0) = 2$ V。

首先, 用原理图绘制工具画出该电路, 并设置好电容两端电压的初始条件(图 7.37)。注意到, 仿真前必须先把频率 100 rad/s 转换为 $100/2\pi = 15.92$ Hz。

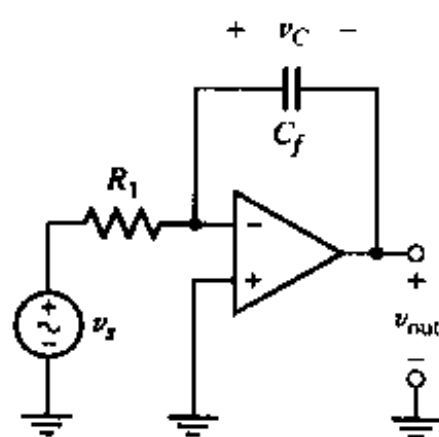


图 7.36 一个积分运放电路

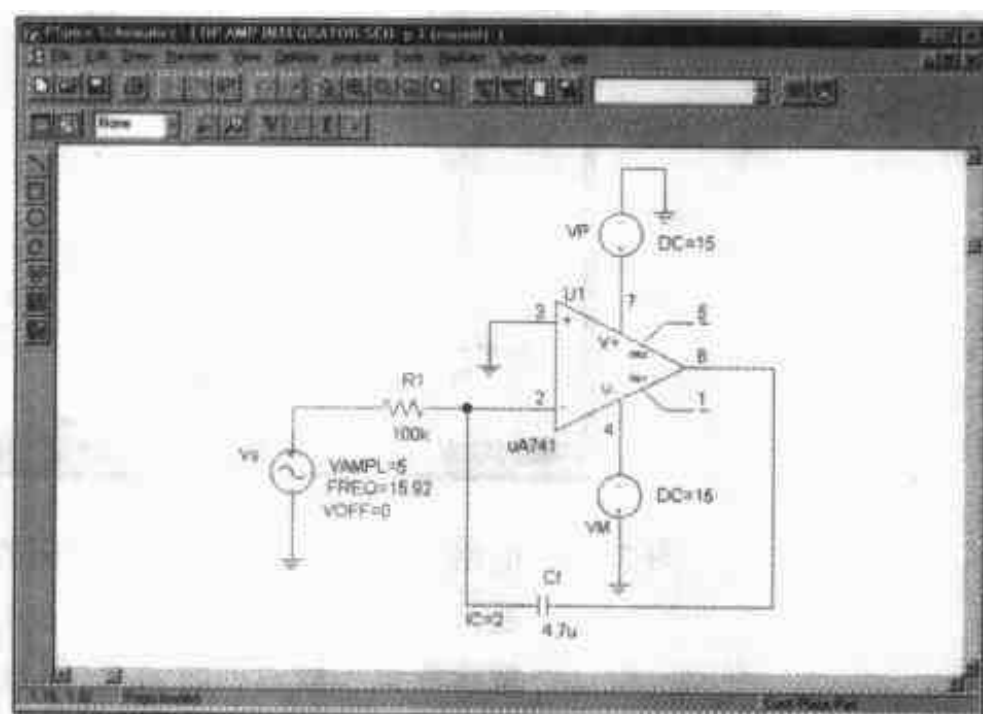


图 7.37 原理图绘制工具画出的图 7.36 所示的电路

为得到随时间变化的电压和电流, 需要进行暂态分析。在 Setup 菜单中选择 Transient Analysis, 将弹出如图 7.38 所示的对话框。其中 Final Time 表示仿真的结束时间, PSpice 将自动选择计算电压和电流值的离散时间点。有时 PSpice 会给出一个暂态解不收敛的出错信息, 这时, 需要在 Step Ceiling 中输入一个值, 这个值表示计算时采用的最大时间步长(步长越小越好)。

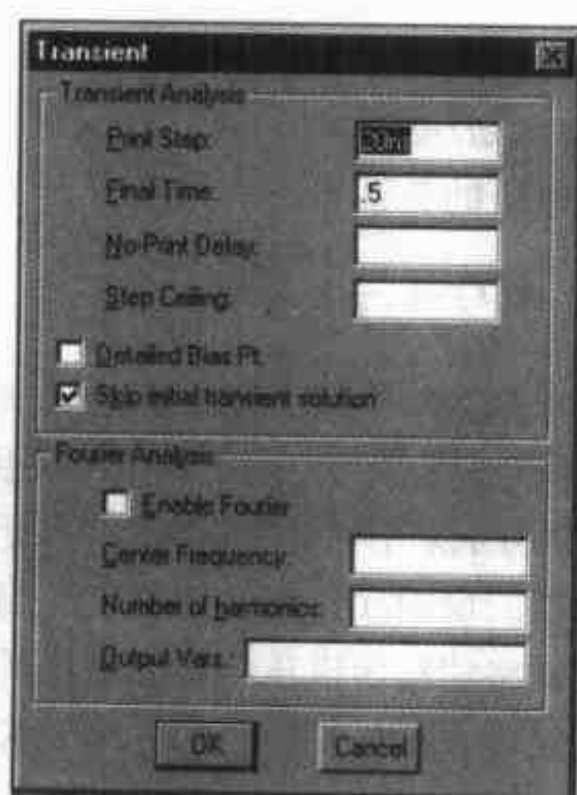


图 7.38 设置暂态分析的对话框。为了获得几个周期的结果($1/15.92 \approx 0.06$ s), 选取最终时间为 0.5 s

根据以前的分析,输出波形与输入波形的积分的相反数成正比,这可从图 7.39 中看出。电容上的 2 V 初始电压使得输出产生了 -2 V 的直流偏移,或者,根据式(7.8)可以知道输出电压的平均值为 -2 V。图 7.39 画出了输入和输出波形。

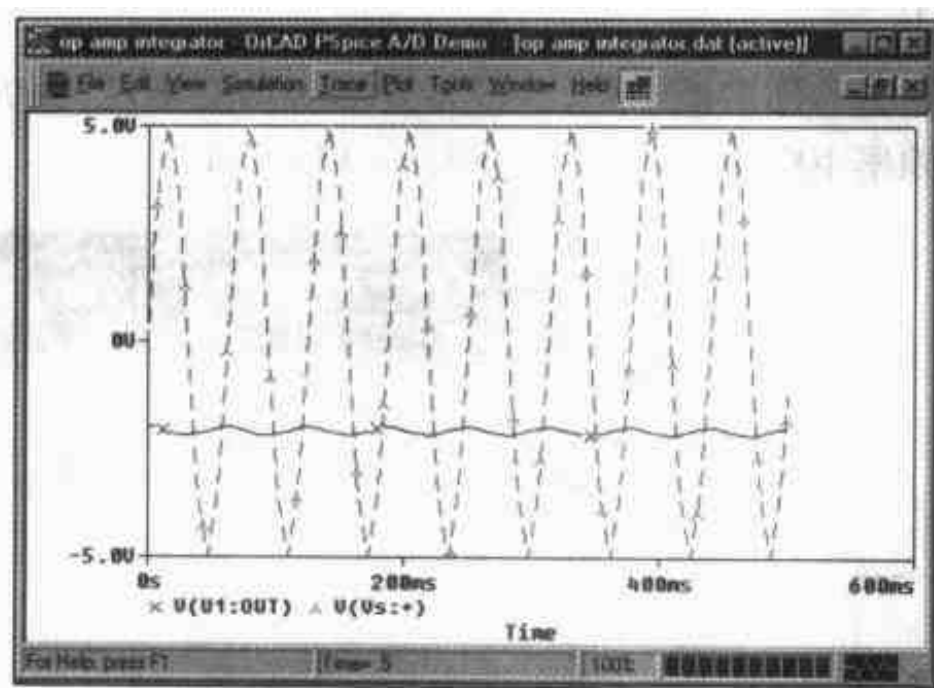


图 7.39 电路的仿真输出结果。如果需要得到更平滑的曲线,可以通过设置更小的 Step ceiling 而得到,更小的 Step ceiling 意味着更多数目的时间点(但也增加了仿真运行的时间)

7.9 小结与复习

- 流过电容的电流表示为 $i = C dv/dt$ 。
- 电容两端的电压与流过它的电流的关系为:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0)$$

- 电容对于直流电流可以视为开路。
- 电感两端的电压给出为 $v = L di/dt$ 。
- 流过电感的电流与它两端电压的关系为:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' + i(t_0)$$

- 电感对于直流电流可视为短路。
- 串联和并联电感的组合,可以分别采用与电阻串联和并联组合相同形式的方程来表示。
- 串联和并联电容的组合,可以分别采用与电阻并联和串联组合相同形式的方程来表示。
- 将电容作为反相运算放大器的反馈元件将使输出电压与输入电压的积分成正比。交换输入电阻和反馈电容的位置将使输出电压与输入电压的微分成正比。
- 因为电容和电感均为线性元件,所以仍然可以将 KVL, KCL, 叠加原理,戴维南和诺顿定理,以及节点和网孔分析应用于电容和电感组成的电路。
- 对偶概念从另外一个角度上建立了含有电感的电路与含有电容的电路之间的联系。
- PSpice 中可以设置电容两端的初始电压和流过电感的初始电流。使用 PSpice 的暂态分

析,可以得到含有这类元件的电路的时域响应。

习题

1. 某电容由两块薄铝片构成,铝片直径为 1 cm,相隔 100 μm (0.1 mm)。(a)计算其电容,假定两块金属板之间为空气;(b)确定电容两端加上多大电压时,其储存的能量为 1 mJ。(c)在某个应用中可以提供 100 V 的电压,如果需要电容储存 2.5 μJ 的能量,则要求两块金属片板之间的相对介电常数 ϵ/ϵ_0 为多大?

2. 一个硅材料面结型二极管的结电容可以用下式表示:

$$C_j = \frac{K_s \epsilon_0 A}{W}$$

其中,对于硅 $K_s = 11.8$, ϵ_0 为真空介电常数, A 为横截面积, W 为耗尽层厚度。 W 不仅与二极管的构造有关,还与接到两端的电压有关:

$$W = \sqrt{\frac{2K_s \epsilon_0}{qN} (V_b - V_A)}$$

二极管大量用于电子电路中,因为可以将二极管用做压控电容。假定上式的参数为 $N = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $V_b = 0.57 \text{ V}$, 并令 $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 分别计算出横截面积为 $A = 1 \mu\text{m} \times 1 \mu\text{m}$ 的二极管在加上电压 $V_A = -1, -5$ 和 -10 V 时的电容。

3. 设计一个电容,其电容值可通过旋转手柄在 100 pF 和 1 nF 之间进行调节,并画出相应的电路图来解释你的设计。
4. 将电压 $v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3e^{-10^5 t} \text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$ 加到 300 μF 电容的两端。(a)计算电容在 $t = 2 \text{ ms}$ 时储存的能量;(b)电容储存的能量在何时下降到其最大值的 37% (以秒为单位取整,四舍五入)? (c)确定 $t = 1.2 \text{ s}$ 时流过电容的电流;(d)计算在 $t = 2 \text{ s}$ 时电容向外部电路传送的功率。
5. 流过 47 μF 电容的电流如图 7.40 所示,计算电容两端在下列情况的电压:(a) $t = 2 \text{ ms}$; (b) $t = 4 \text{ ms}$; (c) $t = 5 \text{ ms}$ 。
6. 已知流过电容的电流为 $i(t) = 7 \sin \pi t \text{ mA}$, 如果在 $t = 200 \text{ ms}$ 电容储存的能量为 3 μJ , 计算该电容的大小。
7. (a)如果图 7.1 所示的电容大小为 0.2 μF , 令 $v_C = 5 + 3 \cos^2 200t \text{ V}$, 求 $i(t)$ 。(b)电容储存的最大能量为多少? (c)如果 $t < 0$ 时 $i_C = 0$, $t < 0$ 时 $i_C = 8e^{-100t} \text{ mA}$, 求 $t < 0$ 时的 $v_C(t)$; (d)如果 $t > 0$ 时 $i_C = 8e^{-100t} \text{ mA}$, $v_C(0) = 100 \text{ V}$, 求 $t > 0$ 时的 $v_C(t)$ 。
8. 将图 7.41 所示的电流波形接入到一个 2 mF 的电容上, 给定 $v_C(0) = 250 \text{ V}$, 假定遵循无源符号规则, 那么在哪段时间内 v_C 的值在 2 000 到 2 100 V 之间?
9. 电阻 R 与一个 1 μF 的电容并联, 在 $t \leq 0$ 时, 储存在电容的能量为 $20e^{-1000t} \text{ mJ}$ 。(a)求 R ; (b)通过积分, 证明电阻 R 在时间 $0 \leq t \leq \infty$ 消耗的能量为 0.02 J。

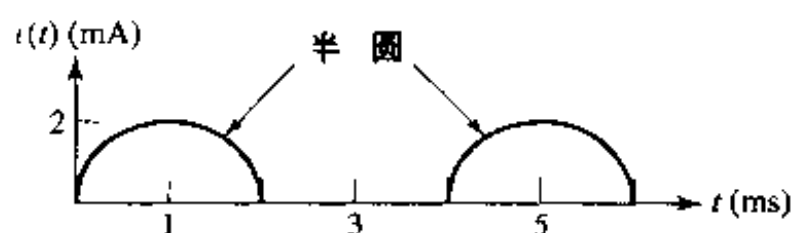


图 7.40

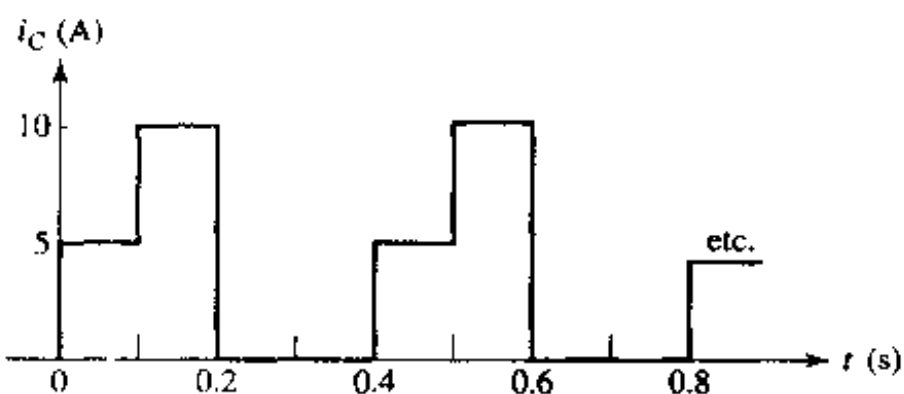


图 7.41

10. 如图 7.42 所示电路, (a) 计算各电容两端的电压; (b) 用 PSpice 验证你的解答。

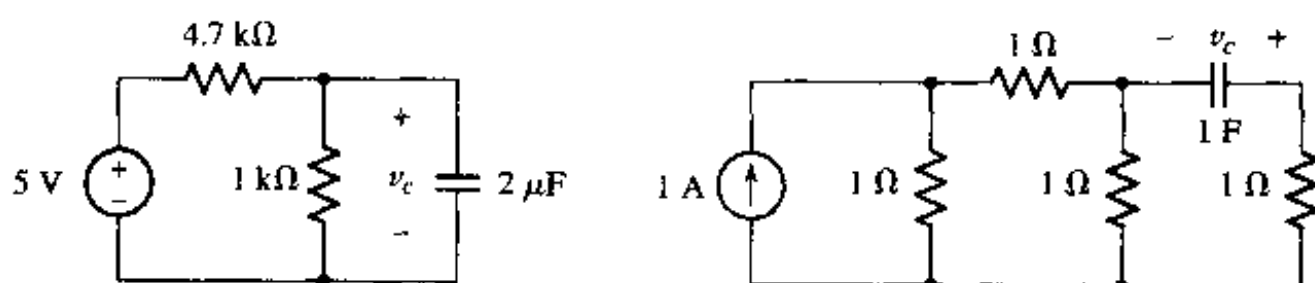


图 7.42

11. 参看图 7.43: (a) 画出 $0 < t < 60$ ms 时 v_L 随时间变化的曲线; (b) 求电感吸收功率达到最大时的时刻; (c) 求电感提供最大功率时的时刻; (d) 求 $t = 40$ ms 时电感储存的能量。

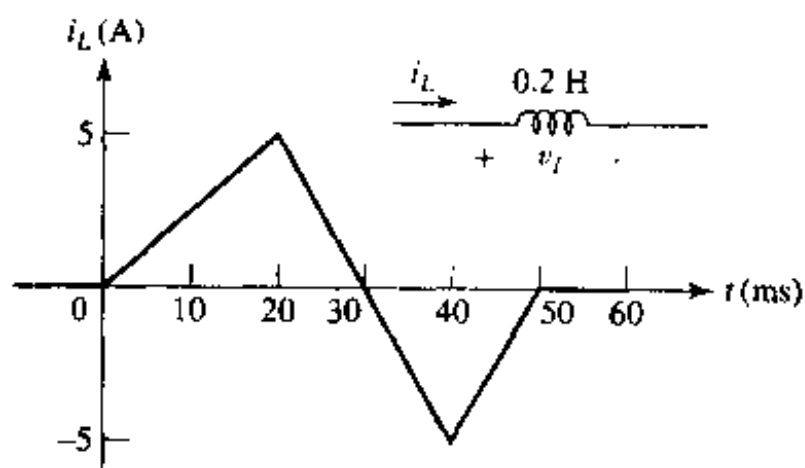


图 7.43

12. 在图 7.10 中, 设 $L = 50$ mH, 且 $t < 0$ 时 $i_L = 0$, $t > 0$ 时 $i_L = 80te^{-100t}$ mA, 求 $|i_L|$ 和 $|v|$ 的最大值以及在何时达到最大值。
13. (a) 如图 7.44(a) 所示电路, 如果 $t > 0$ 时 $i_s = 0.4t^2$ A, 求出并画出 $t > 0$ 时的 $v_m(t)$ 。
(b) 如果 $t > 0$ 时 $v_s = 40t$ V, $i_L(0) = 5$ A, 求出并画出图 7.44(b) 所示电路中 $t > 0$ 时的 $i_m(t)$ 。
14. 将电压 $20 \cos 1000t$ V 加到一个 25 mH 的电感上, 如果在 $t = 0$ 时电感电流为零, 求出并画出 ($0 \leq t \leq 2\pi$ ms): (a) 电感吸收的功率; (b) 电感储存的能量。
15. 一个 0.2 H 的电感在 $0 < t \leq 10$ ms 时两端的电压 v_L 为 100 V, 并在时间 $10 < t < 20$ ms 内线性减小到零, 在 $20 \leq t < 30$ ms 内为零, 在 $30 < t < 40$ ms 内为 100 V, 此后一直为零, 假定 v_L 和 i_L 遵循无源符号规则, 如果 $i_L(0) = -2$ A, (a) 如果 $v_L(0) = -2$ A, 计算

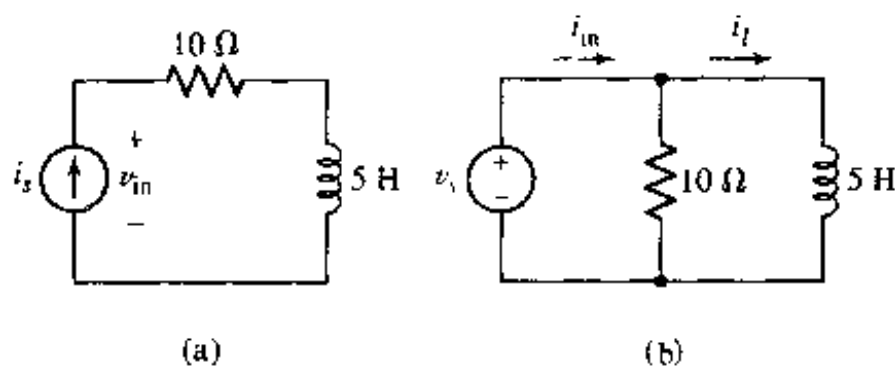


图 7.44

$t = 8 \text{ ms}$ 时的 i_l ; (b) 如果 $i_l(0) = 0$, 求 $t = 22 \text{ ms}$ 时电感储存的能量; (c) 如果图 7.45 所示的电路已经工作了很长时间, 求 i_x 。

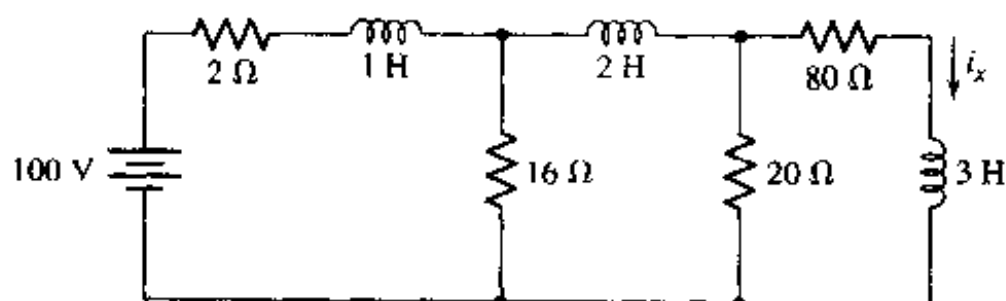


图 7.45

16. 一个 5 H 电感两端的电压为 $v_L = 10(e^{-t} - e^{-2t}) \text{ V}$, 如果 $i_L(0) = 80 \text{ mA}$, 且 v_L 和 i_L 均遵循无源符号规则, 求 (a) $v_L(1 \text{ s})$; (b) $i_L(1 \text{ s})$; (c) $i_L(\infty)$ 。
17. 假设图 7.46 所示电路已经工作了很长时间, 如果 (a) x 和 y 之间为电容; (b) x 和 y 之间为电感, 分别求 v_x 。

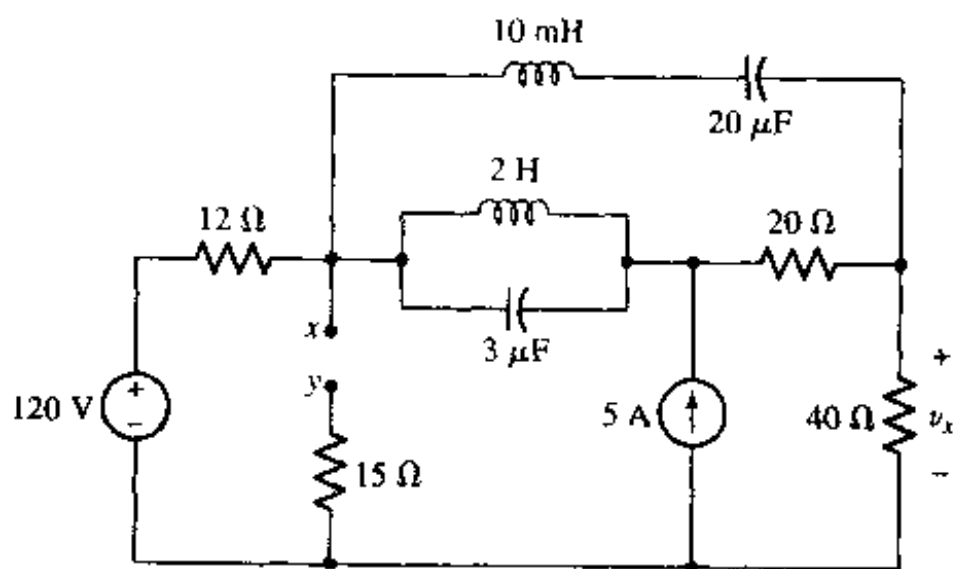


图 7.46

18. 参看图 7.47 所示的电路, 求 (a) w_L ; (b) w_C ; (c) 电路各元件两端的电压; (d) 各电路元件上的电流。
19. 如图 7.48 所示电路, 设 $t > 0$ 时 $v_s = 400t^2 \text{ V}$, $i_L(0) = 0.5 \text{ A}$, 计算 $t = 0.4 \text{ s}$ 时下面各能量的值: (a) 储存在电容上的能量; (b) 储存在电感上的能量; (c) 自 $t = 0$ 在电感消耗的能量。

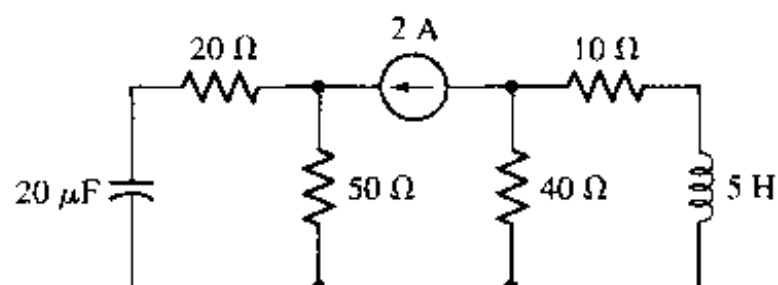


图 7.47

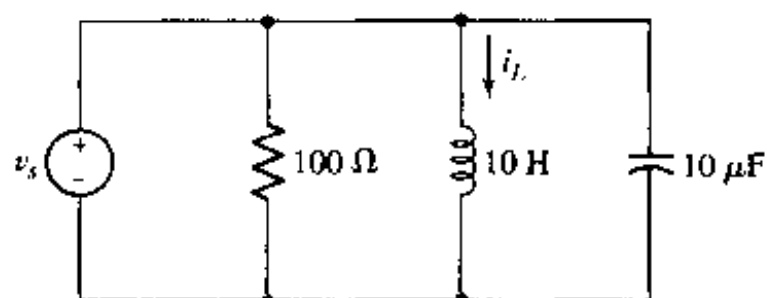


图 7.48

20. 对图 7.49 的电路, (a) 分别计算 $7\ \Omega$ 和 $10\ \Omega$ 电阻消耗的功率; (b) 用 PSpice 验证你的答案。

21. 如果所有电容为 $10\ \mu\text{F}$, 求图 7.50 所示网络的等效电容。

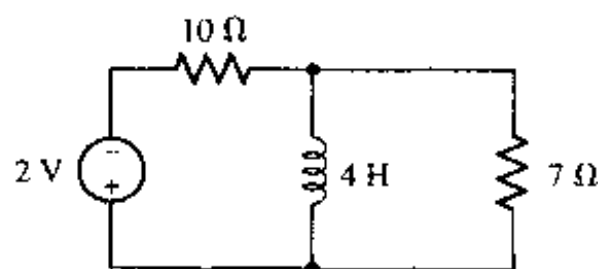


图 7.49

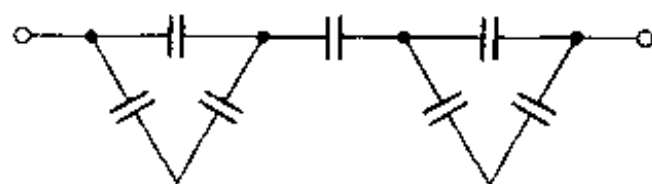


图 7.50

22. 如果所有电感为 $77\ \text{pH}$, 求图 7.51 所示网络的等效电感。

23. 对图 7.52 的电路, (a) 利用串联和并联组合方法对电路进行化简, 直至含有最少可能元件时为止; (b) 如果所有电阻为 $10\ \text{k}\Omega$, 所有电容为 $50\ \mu\text{F}$ 和所有电感为 $1\ \text{mH}$, 求 v_x 。

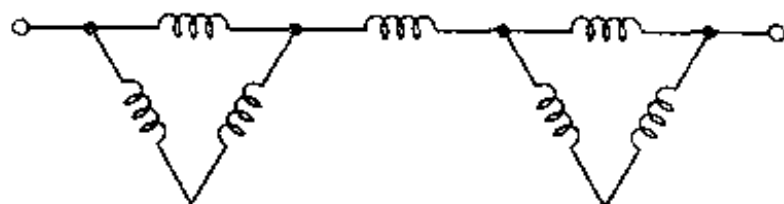


图 7.51

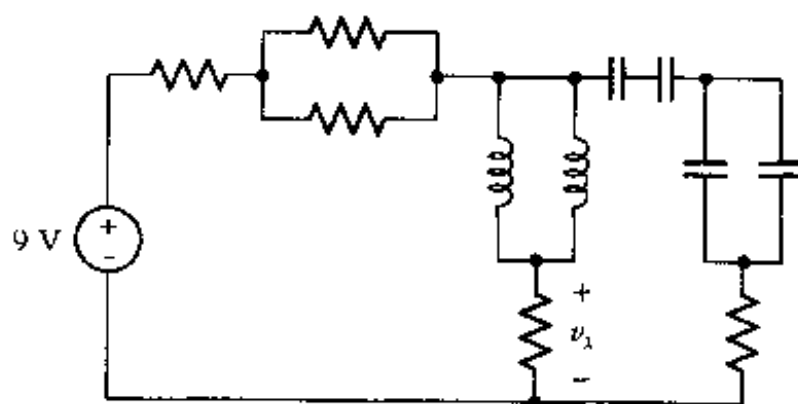


图 7.52

24. 对图 7.53 所示电路, (a) 利用串联和并联组合方法, 用最少可能元件重新画出该电路; (b) 设所有电阻为 $1\ \Omega$, 所有电容为 $50\ \mu\text{F}$ 和所有电感为 $10\ \text{nH}$, 求 V_x 。

25. 化简图 7.54 所示网络, 使得从 ab 端看过去为单个电容。

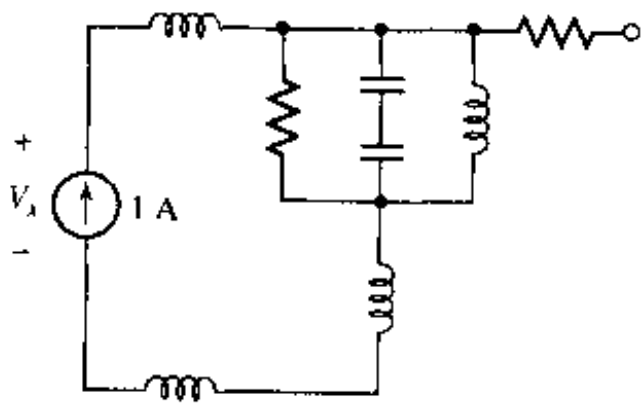


图 7.53

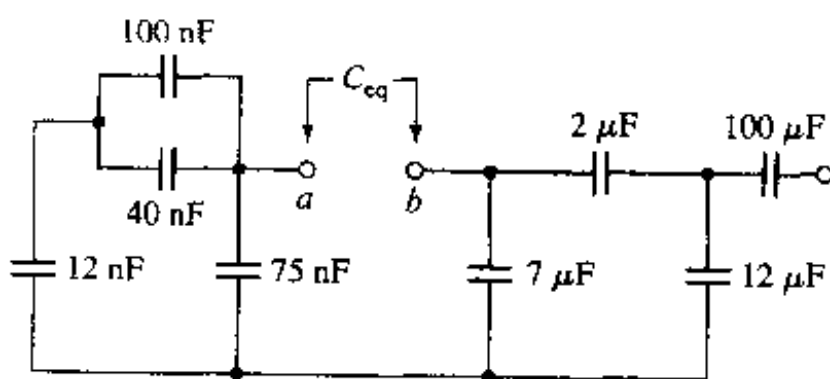


图 7.54

26. 化简图 7.55 所示网络,使得从 ab 端看过去为单个电感。

27. 如图 7.56 所示网络,当 ab 端接入 2.5 V 电压时储存能量为 $534.8\text{ }\mu\text{J}$,则 C_x 的值是多少?

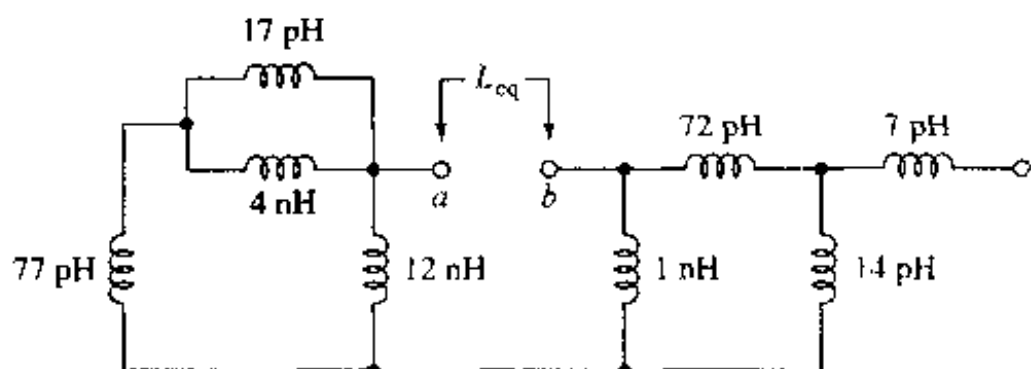


图 7.55

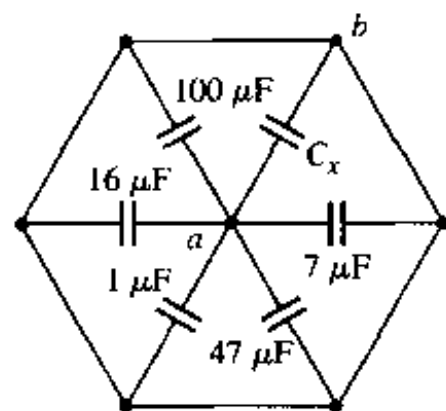


图 7.56

28. 如图 7.57 所示网络由三级并联电感网络串联而成,每级的电感数等于该级的序号。

(a) 如果所有电感为 1.5 H ,求等效电感;(b) 当级数为 N 时,求该网络的等效电感表达式。

29. 对图 7.57 所示网络, $L_1 = 1\text{ H}$, $L_2 = L_3 = 2\text{ H}$, $L_4 = L_5 = L_6 = 3\text{ H}$ 。(a) 求等效电感;(b) 当级数为 N 时,求该网络的等效电感表达式,假定第 N 级由 N 个电感组成,每个电感的电感值为 N 亨利。

30. 将 Δ -Y 变换的概念应用于图 7.58 所示网络中以简化网络,假定所有元件为 2 pF 电容。

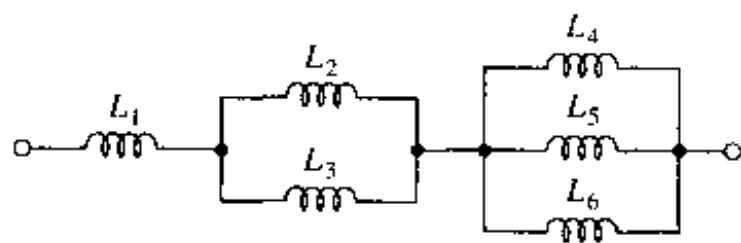


图 7.57

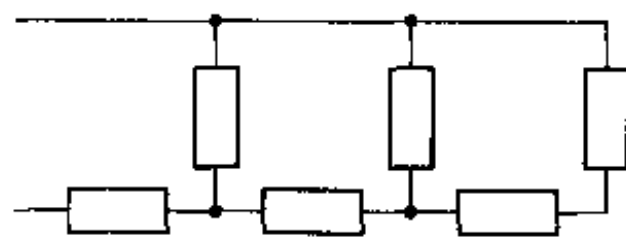


图 7.58

31. 将 Δ -Y 变换的概念应用于图 7.58 所示网络中以简化网络,如果所有元件为 1 nH 电感。

32. 给你足够多的 $1\text{ }\mu\text{H}$ 电感,说明如何(用尽可能少的元件)得到如下的等效电感:
(a) $2.25\text{ }\mu\text{H}$; (b) 750 nH ; (c) 450 nH 。

33. 参看图 7.59 所示电路,求(a) R_{eq} ,假定各元件为 $10\text{ }\Omega$ 电阻;(b) L_{eq} ,假定各元件为 10 H 电感;(c) C_{eq} ,假定各元件为 10 F 电容。

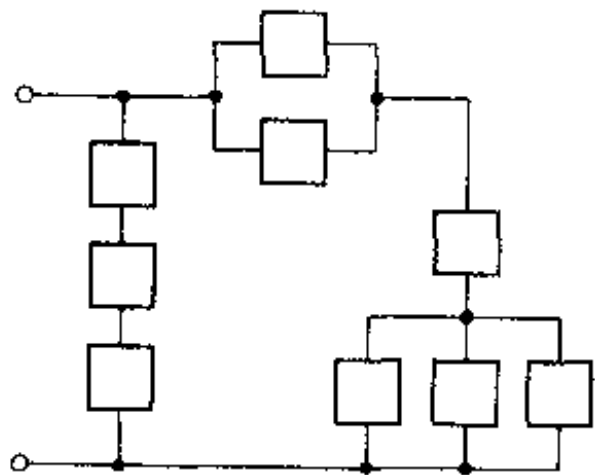


图 7.59

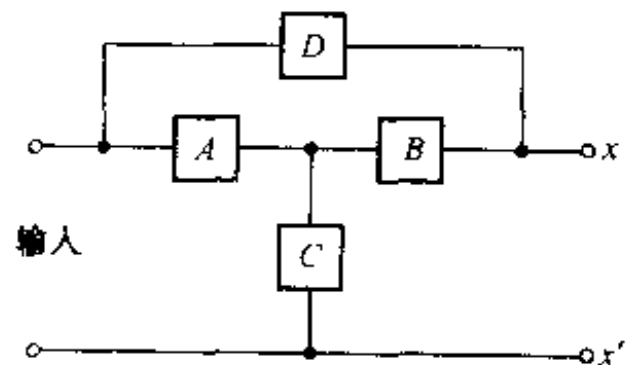


图 7.60

34. 图 7.60 中, 设元件 A, B, C 和 D 分别为 (a) $1\text{ H}, 2\text{ H}, 3\text{ H}$ 和 4 H 的电感, 分别求出 $x-x'$ 开路 and 短路时的输入电感; (b) $1\text{ F}, 2\text{ F}, 3\text{ F}$ 和 4 F 电容, 分别求出 $x-x'$ 开路 and 短路时的输入电容。
35. 给你足够多的 1 nF 电容, 使用尽可能少的元件, 说明如何得到下面的等效电容: (a) 2.25 nF ; (b) 0.75 nF ; (c) 0.45 nF 。
36. 如图 7.61 所示电路, 设 $i_s = 60e^{-300t}\text{ mA}$, $i_1(0) = 20\text{ mA}$ 。 (a) 求 $v(t)$ 的表达式; (b) 求 $t \geq 0$ 时 $i_1(t)$ 的表达式; (c) 求 $t \geq 0$ 时 $i_2(t)$ 的表达式。

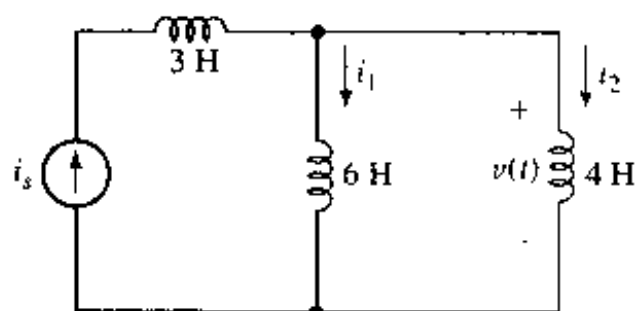


图 7.61

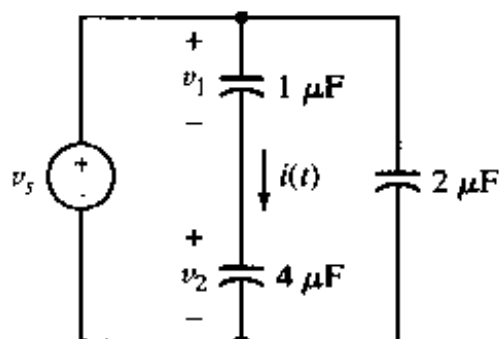


图 7.62

37. 如图 7.62 所示电路, 设 $v_s = 100e^{-80t}\text{ V}$, $v_1(0) = 20\text{ V}$ 。 (a) 求 $i(t)$ 的表达式; (b) 求 $t \geq 0$ 时 $v_1(t)$ 的表达式; (c) 求 $t \geq 0$ 时 $v_2(t)$ 的表达式。
38. (a) 对 7.63 所示电路列出节点方程组; (b) 对同样的电路列出网孔方程组。
39. 如果假定图 7.64 所示电路已工作了很长的时间, 利用叠加原理求 $v_C(t)$ 和 $v_L(t)$ 。

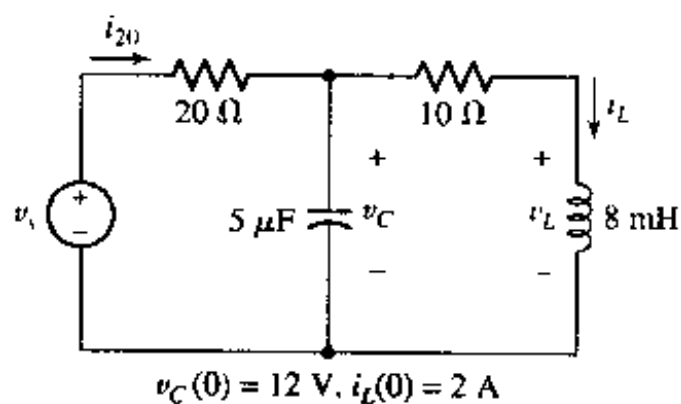


图 7.63

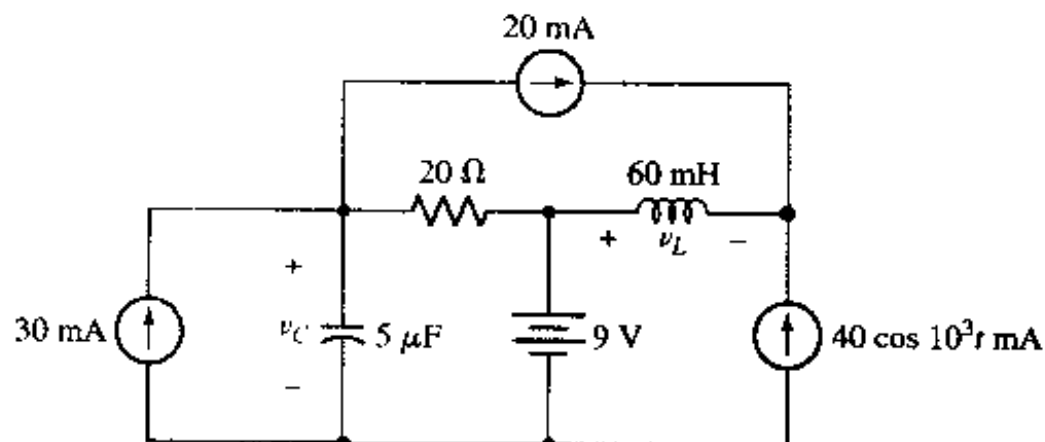


图 7.64

40. 对图 7.65 所示电路, 假定 $t = 0$ 时没储存任何能量, 列出节点方程组。

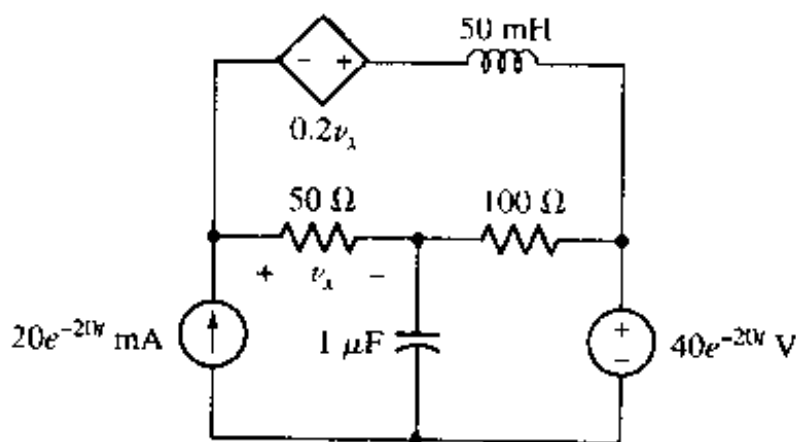


图 7.65

41. 交换图 7.27 所示电路中 R 和 C 的位置, 并假定运放的 $R_i = \infty$, $R_o = 0$ 和 $A = \infty$ 。(a) 求 $v_o(t)$, 以 $v_i(t)$ 表示; (b) 如果 A 为有限值, 求 $v_o(t)$, 以 $v_i(t)$ 表示。
42. 离子注入机的作用是将电离的原子注入硅中以改变它的电气特性, 为后续的二极管和三极管的制造做准备。离子的注入将产生一个电流, 已知该电流与离子浓度成正比 ($i = 1.602 \times 10^{-19} \times$ 每秒入射的离子数), 可以通过让该电流流过一个已知精确阻值的电阻来测量电流的大小, 从而得到注入的离子数。如果用 $1.000 \text{ M}\Omega$ 电阻来检测该电流, 设计一个电路使得其输出与注入过程中注入硅的总离子数(称为剂量)成正比。
43. 如图 7.27 所示电路, 设 $R = 0.5 \text{ M}\Omega$, $C = 2 \mu\text{F}$, $R_i = \infty$ 和 $R_o = 0$ 。假定期望的输出为 $v_{\text{out}} = \cos 10t - 1 \text{ V}$, 如果 (a) $A = 2000$ 和 (b) A 为无穷大, 分别求出 $v_i(t)$ 。
44. 在一个旋转的轮子中有一个速率传感器, 设计一个电路, 使得其输出一个正电压, 且电压幅度等于轮子的加速度(单位为 rpm/m , 即转动次数/分钟)。假定速率传感器的输出为 1 mV/rpm , 轮子转速小于 3500 rpm 。
45. (a) 在图 7.66 所示电路中, 交换电阻和电感的位置, 并导出 v_{out} 的表达式, 以 v_i 表示。(b) 解释为什么该电路通常不能应用到实际中。
46. (a) 画出图 7.63 所示电路的完全对偶, 并确定对偶变量和对偶初始条件; (b) 列出对偶电路的节点方程; (c) 列出对偶电路的网孔方程。

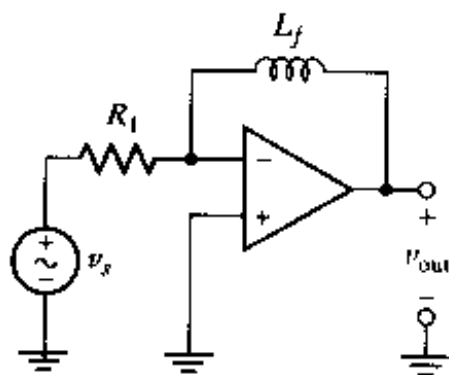


图 7.66

47. 画出图 7.46 所示电路的完全对偶, 以整洁的形式画出, 即画图时使用方的转折角, 使用明显的参考节点, 并且图中不存在交叉线。
48. 以整洁的形式画出图 7.67 所示电路的完全对偶。

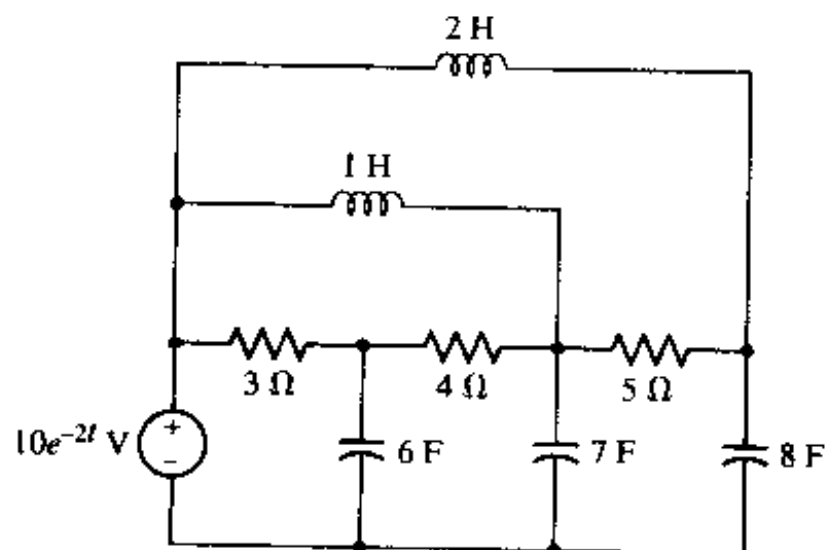


图 7.67

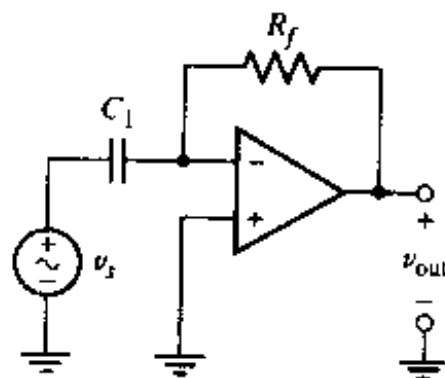


图 7.68

49. (a)画出习题 37 所给电路的完全对偶,并标出各变量;(b)写出习题 37 的对偶表述;(c)求解用对偶语言表述后的习题 37。
50. 求出图 7.68 所示电路的对偶,并求出 v_{out} 的表达式,以 v_i 表示(提示:利用运放的详细模型)。
51. 用 PSpice 验证当 $33\ \mu\text{F}$ 电容所接电压源为 $v(t) = 5 \cos 75t\ \text{V}$ 时,在 $t = 10^{-2}\ \text{s}$ 时电容储存的能量为 $221\ \mu\text{J}$ (提示:利用组件 VSIN)。
52. 用 PSpice 来验证当 $100\ \text{pH}$ 电感所接电流源为 $i(t) = 5 \cos 75t\ \text{A}$ 时,在 $t = 0.01\ \text{s}$ 时电感储存的能量为 $669\ \mu\text{J}$ (提示:利用组件 ISIN)。
54. 将习题 7.51 的 $v(t)$ 改为 $v(t) = 5 \cos 75t - 7\ \text{V}$,重做该题。
55. 将习题 7.51 的 $i(t)$ 改为 $i(t) = 5 \cos 75t - 7\ \text{A}$,重做该题。

第8章 基本 RL 和 RC 电路

本章要点:

- 定义 RL 电路和 RC 电路的时间常数
- 区分自由响应和受迫响应
- 计算 RL 和 RC 电路的完全响应
- 确定初始条件对电路响应的影响
- 掌握用单位阶跃函数来表示脉冲波形
- 培养对 RL 电路和 RC 电路响应的直觉理解

8.1 引言

前一章已对同时包含电感和电容的几种电路列出了描述电路响应的方程,但并没有对其中的任何一个进行求解。下面开始对只含有电阻和电容或者只含有电阻和电感的简单电路进行求解。

虽然下面要讨论的电路只包含一些简单元件,但它们仍然具有重要的实用价值。这种形式的网络常常应用于电子放大器、自动控制系统、运算放大器、通信设备以及其他许多设备中。如果熟悉这些简单的电路,那么就可以估算出放大器的输出对快速变化的输入的跟随精度,或者可以估算出当电动机的场电流变化时电动机响应速度的快慢。在了解基本 RL 和 RC 电路工作性能之后,还可以对放大器或者电动机做一些调整以得到所需的响应。

8.2 无源 RL 电路

对包含电感和电容电路的分析包括列出并求解描述电路特性的积分微分方程,如果得到的积分微分方程的每一项都是因变量或因变量导数的一次项,则称为齐次线性微分方程。如果得到了因变量的一个表达式,它满足微分方程,同时满足电容或者电感在指定时刻(通常为 $t=0$ 时刻)的能量分布,那么就称得到了这个方程的一个解。

微分方程的解描述了电路的响应,它有很多个名称。因为电路响应取决于电路的固有特性(例如元件的类型、尺寸和元件之间的连接),所以通常称它为本征(即自由)响应。但是,实际的电路并不能永久地存储能量,因为电路中的电感和电容具有的电阻最终会把所有存储的能量转为热量,所以这个响应最终必然消失,由此也通常称它为暂态响应。最后,还应该熟悉数学上的一些术语,在数学上称齐次线性微分方程的解为通解(余函数)。

当考虑独立电源作用于电路时,响应中的一部分将类似于所采用的电源(即激励函数)的特性,这部分解称为特解、稳态响应或者受迫响应,无源电路所产生的自由响应作为它的补充。电路的完全响应可以表示为通解与特解的和,换句话说,完全响应是自由响应与受迫响应的和。无源响应可称为暂态响应、自由响应和通解,但由于该响应更多地描述了系统本身的特

性,所以通常称为自由响应。

下面将讨论微分方程的几种不同求解方法,但要记住的是,数学处理不等于电路分析,这里最关心的是解本身、它们的含义以及对它们的解释。后面还将试图达到熟悉响应的各种形式,在熟悉它们之后,对一个新的电路,仅通过大脑中清晰的想像就可以写出其响应形式。尽管当简单的方法失效时必须采用更复杂的分析方法,但在这种情况下,训练有素的直觉仍然是一种相当有价值的能力。

下面以图 8.1 所示的简单串联 RL 电路开始对暂态分析的研究。设时变电流为 $i(t)$, $t=0$ 时 $i(t)$ 的值为 I_0 , 即 $i(0) = I_0$ 。于是有:

$$Ri + v_L = Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

或

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (8.1)$$

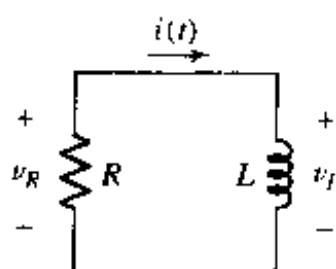


图 8.1 求该串联 RL 电路中 $i(t)$ 的表达式, 已知初始值为 $i(0) = I_0$

在一个无源电路中讨论时变电流看起来有些奇怪! 要记住的是, 这里仅知道 $t=0$ 时刻的电流值, 并不知道该时刻以前的电流值; 同样, 也不知道 $t=0$ 时刻前电路所处的状态。而且, 为了使得电流存在, 必须在某个时刻存在某个电源, 但是这里并不知道这些情况。幸运的是, 在分析电路时并不是必须知道这些情况。

本题要求出 $i(t)$ 的表达式, 该表达式满足方程, 同时满足 $t=0$ 时的值为 I_0 , 这可以通过下面几种不同的方法来得到。

8.2.1 直接法

求解微分方程的一种非常直接的方法是, 首先将方程写成分离变量的形式, 然后对方程两边进行积分。方程(8.1)的积分变量为 i 和 t , 显然可以将方程乘以 dt , 然后除以 i , 再重新写成分离变量的形式:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \quad (8.2)$$

因为 $t=0$ 时电流为 I_0 , t 时刻为 $i(t)$, 于是在方程两边用相应的积分限进行积分, 并令这两个定积分相等:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt'$$

对上式进行积分可得:

$$\ln i' \Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t' \Big|_0^t$$

于是:

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t-0)$$

经过一些简单运算,得到电流 $i(t)$ 的表达式为:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad (8.3)$$

可以通过将方程(8.3)代入方程(8.1)来验证上面的解,这时得到恒等式 $0=0$ 。然后将 $t=0$ 代入方程(8.3),得到 $i(0) = I_0$ 。以上的两步验证都是必要的,因为解必须满足描述电路特性的微分方程,同时也必须满足初始条件。

8.2.2 另一种方法

对上面的方法稍做变化,也可以得到方程的解。对方程(8.2)分离变量后,然后可以得到不定积分,其右边含有一个积分常数:

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L} dt + K$$

积分得到:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \quad (8.4)$$

积分常数 K 不能通过将方程(8.4)代入原来的微分方程(8.1)而求得,代入它将得到恒等式 $0=0$, 因为对任意的 K , 方程(8.4)都是方程(8.1)的解(读者可以自己验证)。选取的积分常数必须使得解满足初始条件 $i(0) = I_0$, 根据这点,令 $t=0$, 这时方程(8.4)成为:

$$\ln I_0 = K$$

利用公式(8.4)得到的 K 值就可以得到所求的响应为:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

或

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

和前面的结果一致。

8.2.3 更一般的求解法

只有当方程可以分离变量时,才能使用前面介绍的两种方法,但实际情况下方程并不总是能够分离变量。在后面的例子中,将介绍一种非常有效的方法,它能否成功运用取决于我们的直觉或者经验。首先,猜测或假定解的一种形式,然后去验证这个假定。验证的过程是首先将它代入微分方程中,然后应用初始条件来验证。因为不可能猜测出解的精确数值表达式,所以所假定的解通常都包含一些未知常量,通过选择这些常量可以使得解同时满足微分方程和初始条件。在电路分析中遇到的很多微分方程的解都可以表示为指数函数或者几个指数函数的和的形式。例如,对方程(8.1),假定齐次解为指数形式:

$$i(t) = Ae^{s_1 t} \quad (8.5)$$

其中 A 和 s_1 为待定常量。将假定的解代入方程(8.1),得到:

$$As_1 e^{s_1 t} + A \frac{R}{L} e^{s_1 t} = 0$$

或

$$\left(s_1 + \frac{R}{L}\right) A e^{s_1 t} = 0$$

要使以上方程在所有时刻均成立,必然有 $A=0$, $s_1 = -\infty$ 或 $s_1 = -R/L$ 。但如果取 $A=0$ 或者 $s_1 = -\infty$, 那么任何响应均将为零,这不能作为所求问题的解,因此必须选取:

$$s_1 = -\frac{R}{L}$$

于是得到假定的解具有下面的形式:

$$i(t) = A e^{-R/L t}$$

剩下的待定常量必须根据初始条件 $i(0) = I_0$ 来确定,根据这点可求出为 $A = I_0$ 。于是,(再次得到)解的最终形式为:

$$i(t) = I_0 e^{-R/L t}$$

在解释该响应的含义之前,先来验证该电路中功率与能量的关系。电阻吸收的功率为:

$$p_R = i^2 R = I_0^2 R e^{-2R/L t}$$

在电阻上转化为热的总能量可以通过对瞬时功率从零到无穷大的时间区间内积分得到:

$$\begin{aligned} w_R &= \int_0^{\infty} p_R dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-2R/L t} dt \\ &= I_0^2 R \left(\frac{-L}{2R} \right) e^{-2R/L t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} L I_0^2 \end{aligned}$$

这个结果与预想的一致,因为储存在电感中初始总能量为 $\frac{1}{2} L I_0^2$, 经过无限长的时间后电感不再储存任何能量,因为流过它的电流最终将降为零。于是可得到结论,电阻对能量的吸收是初始能量消失的原因。

例题 8.1 对图 8.2(a) 中的电路,求出 $t = 200 \text{ ms}$ 时流过 5 H 电感的电流

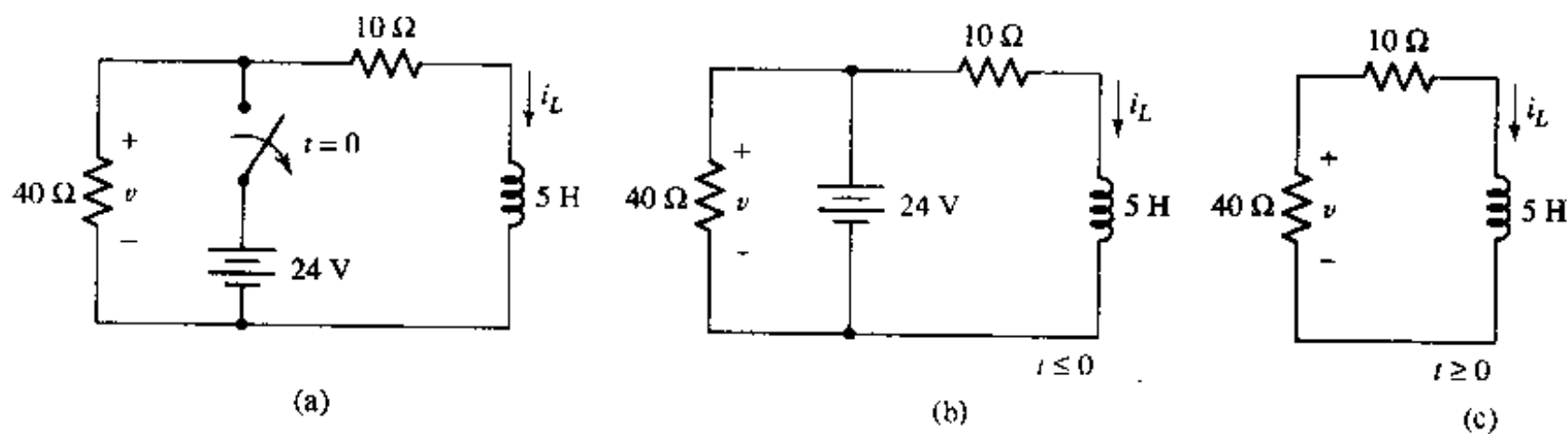


图 8.2 (a) 一个简单 RL 电路, 开关在 $t = 0$ 时打开; (b) $t = 0$ 之前的电路; (c) 开关打开后的电路, 已移去原图中的 24 V 电源

● 弄清问题的目标:

图 8.2 所示的原理图实际上表示了两个不同的电路: 一个是开关闭合的电路, 另一个是开关打开后的电路。为了进行分析, 有必要将这两个电路画出, 分别如图 8.2(b) 和图 8.2(c) 所示。本题要求的是 $t = 200 \text{ ms}$ 时图 8.2(c) 所示电路中的电流 i_L 。

● 收集已知信息:

重画电路时,最好检查一下重画出的电路图是否正确,这样可以减少错误。可以看到,各图均已正确标出了各元件值和电流 i_L , 必须假定图 8.2(b) 所示的电路已处于该状态很长时间,使得 24 V 电源接入时产生的暂态响应已消失了很长时间。

● 选择最适合问题的已有方法:

因为要求出 $i_L = 200\text{ ms}$ 时的电感电流,所以首先将两个电阻合并为单个 $50\ \Omega$ 的等效电阻,然后可以使用本节中所讨论过的任何方法。

● 建立适当的方程组:

将图 8.2(c) 所示电路简化为简单 RL (其中 $R = 50\ \Omega$ 和 $L = 5\text{ H}$) 电路后,可以假定电感电流的形式为:

$$i_L(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

● 确定是否还需其他信息:

尽管已经知道 R 和 L 的值,且知道需要求解 $t = 200\text{ ms}$ 的电流值,但还不知道 $t = 0$ 时电感电流 I_0 的值。因为电感电流不能瞬时改变,那么它的值必然与开关切换前的瞬时值相等。因此,这时可以使用图 8.2(b) 所示的电路来求解电感的初始电流。

根据欧姆定理以及对于直流而言电感相当于短路,所以得到:

$$I_0 = \frac{24}{10} = 2.4\text{ A}$$

● 试解:

代入求得的 I_0 值,可以得到 $i_L(200\text{ ms}) = 324.8\text{ mA}$ 。

● 证实所得解是否合理和满足要求:

在开关切换的瞬间,流过电感的电流为 2.4 A。仅仅在 200 ms 之后,它就减小到了几百毫安。这可信吗? 到目前为止,还没有对电路这种特性进行判断的经验。不过,下一节将讨论电路的时间常数的概念,对于图 8.2(c) 所示电路,其时间常数为 100 ms。后面将会看到, RL 电路的暂态响应经过两倍时间常数后将下降到大约其最大值的 14% (在本例中 $2 \times 100\text{ ms} = 200\text{ ms}$), 所以这里的解答是合理的。

电流是否会增加呢? 这看起来是不可能的,因为图 8.2(c) 所示电路除了电感储存了一些能量以外,不再有其他能量源,所以能量很快就损耗在了电阻中,并转成了热量。

练习

8.1 图 8.3 中的电感初始储存的能量为 $7\ \mu\text{J}$, 求它在 $t = 2\text{ ns}$ 时剩余的能量。

答案: $2.349\ \mu\text{J}$

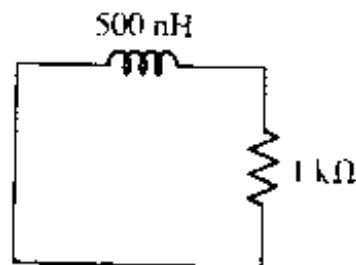


图 8.3

8.3 指数响应的性质

现在来讨论串联 RL 电路的响应特性。前面已得到电感电流可以表示为:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

从上式可知, $t=0$ 时, 电流的值为 I_0 , 但随着时间的增加, 电流将逐渐衰减并趋于零。图 8.4 画出了该指数衰减曲线的形状, 以 $i(t)/I_0$ 随 t 变化来表示。因为画出的是函数 $e^{-Rt/L}$ 的曲线, 所以当 R/L 保持不变时曲线形状保持不变, 于是对每一个具有相同 R/L 或 L/R 比值的 RL 串联电路必然得到相同的曲线。下面来看这个比值如何影响曲线的形状。

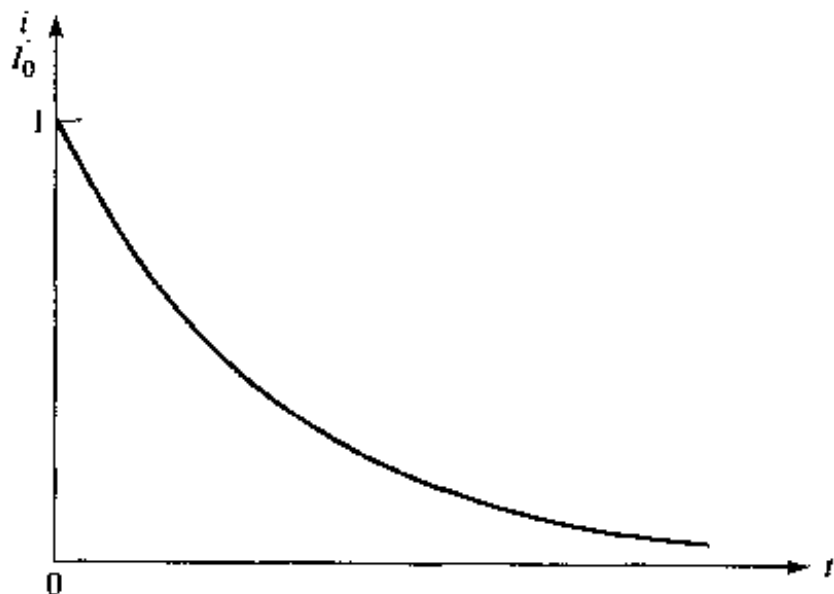


图 8.4 $e^{-Rt/L}$ 随时间变化的曲线

如果将 L 与 R 的比值加倍, 那么如果 t 也加倍则指数保持不变。换句话说, 原来各时刻的响应将在以后的时刻产生, 新的响应曲线可以通过将原来曲线中的每个点都向右移动 2 倍而得到。当 L/R 变大时, 电流衰减到小于初始值的某个特定值所需要的时间将加大。这时可能会认为曲线的“宽度”加倍了, 或者说曲线“宽度”与 L/R 成正比。但是, 随后将会发现给曲线定义“宽度”很困难, 因为每条曲线都是从零一直延伸到无穷大。于是换一个角度, 考虑当电流按初始速率衰减时, 电流衰减到零所需的时间。

初始衰减速率可以通过将电流对 t 求导并取零时刻的导数值而得到:

$$\left. \frac{d i}{d t I_0} \right|_{t=0} = -\frac{R}{L} e^{-Rt/L} \Big|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

维持以上速率, i/I_0 由单位值衰减到零所用的时间用希腊字母 τ 来表示, 即:

$$\left(\frac{R}{L} \right) \tau = 1$$

或

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (8.6)$$

因为指数 $-Rt/L$ 必然是无量纲的, 所以比值 L/R 具有时间的量纲(秒)。 τ 的大小称为时间常数, 如图 8.5 所示。 RL 串联电路的时间常数可以从响应曲线图解得到, 只需要在 $t=0$ 处作响应曲线的切线, 切线在时间轴上的截距就是所求的时间常数。如果需要从示波器显示出的曲线来求近似的时间常数, 通常采用这种方法。

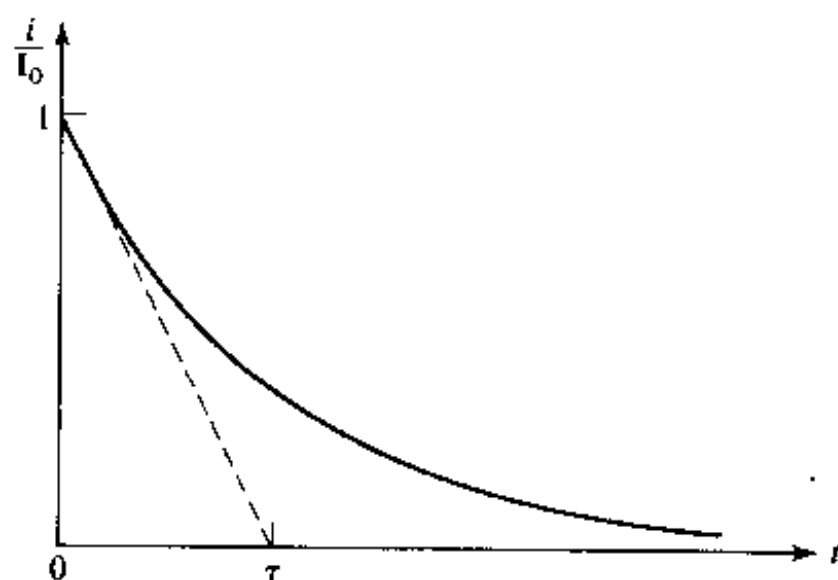


图 8.5 串联 RL 电路的时间常数为 $\tau = L/R$, 时间常数为响应曲线按初始速率衰减到零所需的时间

通过求 $t = \tau$ 时 $i(t)/I_0$ 的值, 可以得到时间常数的另一个同样重要的解释。这时:

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.3679 \quad \text{或} \quad i(\tau) = 0.3679 I_0$$

因此, 经过一个时间常数后, 响应下降到了其初始值的 36.8%, 根据这一点可以从响应曲线图解得到 τ , 如图 8.6 所示。以时间常数作为间隔来度量曲线的衰减通常比较方便, 使用计算器或者通过查复指数表可知, $t = \tau$ 时 $i(t)/I_0$ 的值为 0.3679, $t = 2\tau$ 时为 0.1353, $t = 3\tau$ 时为 0.04979, $t = 4\tau$ 时为 0.01832, $t = 5\tau$ 时为 0.006738。从时刻零开始经过 3~5 倍时间常数后, 可以认为此时的电流值与它初始时的值相比可以忽略。于是, 如果要问, “电流需要多长时间衰减到零?” 那么可以这么回答, “大约在 5 倍时间常数后。” 此时的电流比它初始值的 1% 还要小。

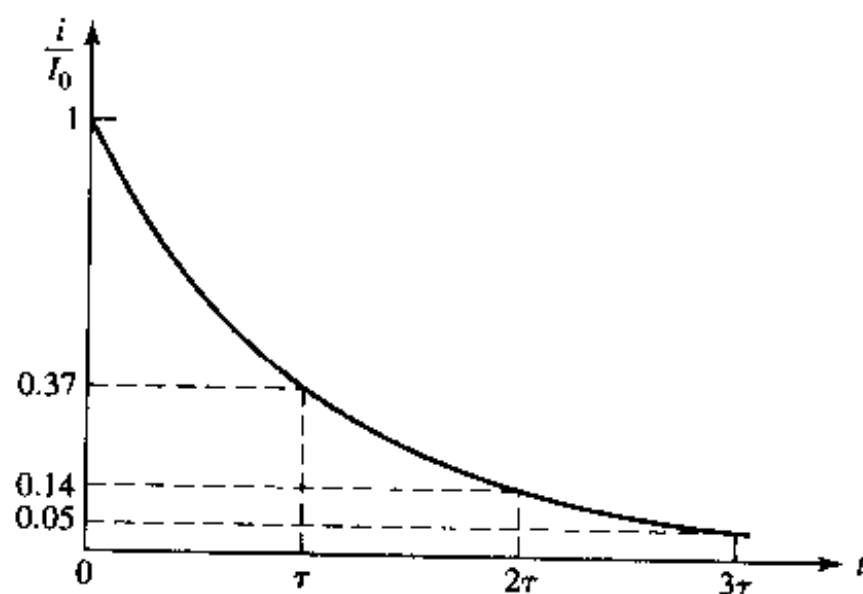


图 8.6 串联 RL 电路的电流在 $t = \tau$ 时衰减到它初始值的 37%, $t = 2\tau$ 时为 14%, $t = 3\tau$ 时为 5%

练习

- 8.2 在无源串联 RL 电路中, 求下面各比值: (a) $i(2\tau)/i(\tau)$; (b) $i(0.5\tau)/i(0)$ 和 (c) t/τ , 假定 $i(t)/i(0) = 0.2$; (d) t/τ , 假定 $i(0) - i(t) = i(0)\ln 2$ 。

答案: 0.368; 0.607; 1.609; 1.181

计算机辅助分析

在考虑无源电路的自由响应时, PSpice 的暂态分析功能非常有用。本例将使用 PSpice 的一个功能来更改仿真时各元件的参数, 就像在仿真时可以改变直流电压一样。这可以通过在原理图中加入 PARAM 元件来实现, 可以将 PARAM 元件放置在原理图的任何地方, 因为不需要把它连接到电路中。图 8.7 画出了完整的 RL 仿真电路图, 其中还设定了初始电感电流为 1 mA 。

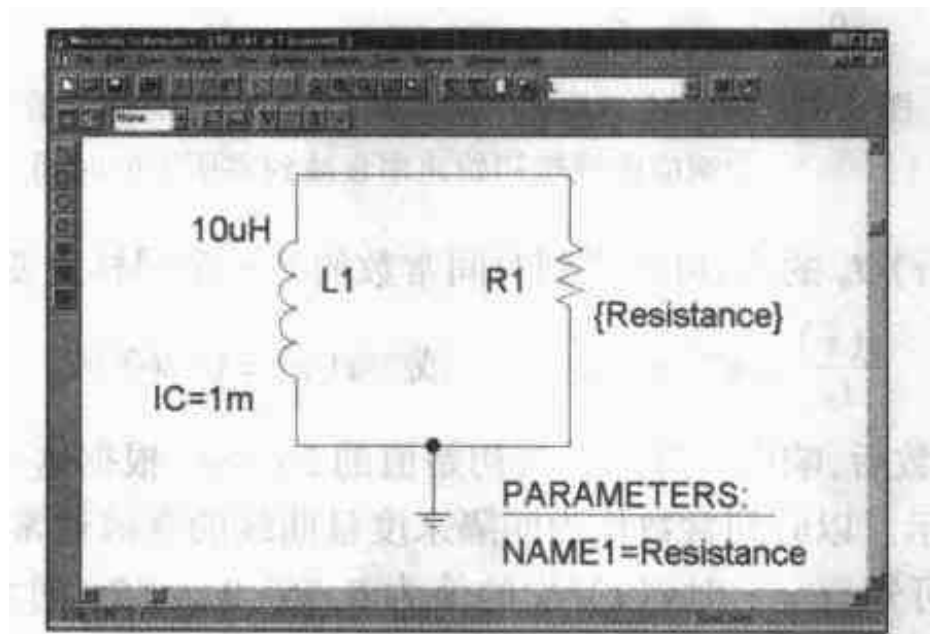


图 8.7 用原理图绘制工具画出的简单 RL 电路。其中 PARAM 的一个“哑”参数 VALUE1 = 0 并没有显示出来, 但是必须设定这个参数值, 以避免在仿真时产生错误信息

为了将电阻值与仿真的扫描参数建立联系, 必须完成以下两个步骤。首先, 必须给参数取一个名字, 为清晰起见, 这里取为“Resistance”。其次, 双击电阻元件, 在对话框的 Value 项中键入 {Resistance}。

现在可以对仿真进行参数设置了。从 Analysis 菜单中选择 Setup, 然后选择 Parametric, 图 8.8 示出了这个弹出对话框。在 Name 栏中键入变量名称 Resistance, 然后选择电阻的起始值和终止值, 这里希望观察 $R = 10\ \Omega$, $100\ \Omega$ 和 $1\ 000\ \Omega$ 时电路的输出, 所以在 Decade 扫描中, 取 Start 值为 10, End 值为 1 000, 每 Decade 为 1 (表示每隔 10 倍取一个电阻值)。选择 Value List 选项, 可以列出前面的这三个值。

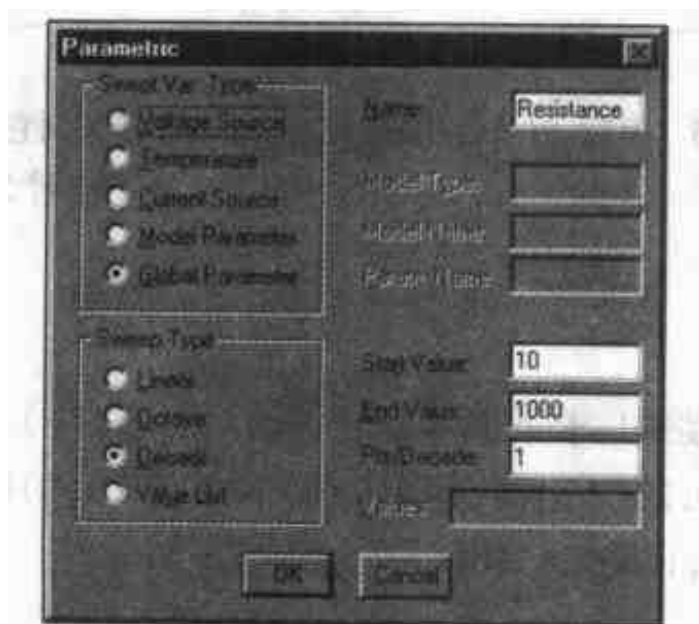


图 8.8 扫描参数对话框

下一步来设置暂态分析参数,选取终止时间为 300 ns。仿真结束后,将显示如图 8.9 所示的对话框,其中列出了可以用于画图的数据(这里包括电阻 $R_{\text{resistance}} = 10, 100$ 和 $1\,000$ 对应的数据),这里选取了所有的数据。Probe 输出如图 8.10 所示。



图 8.9 列出可以用于画图数据的对话框

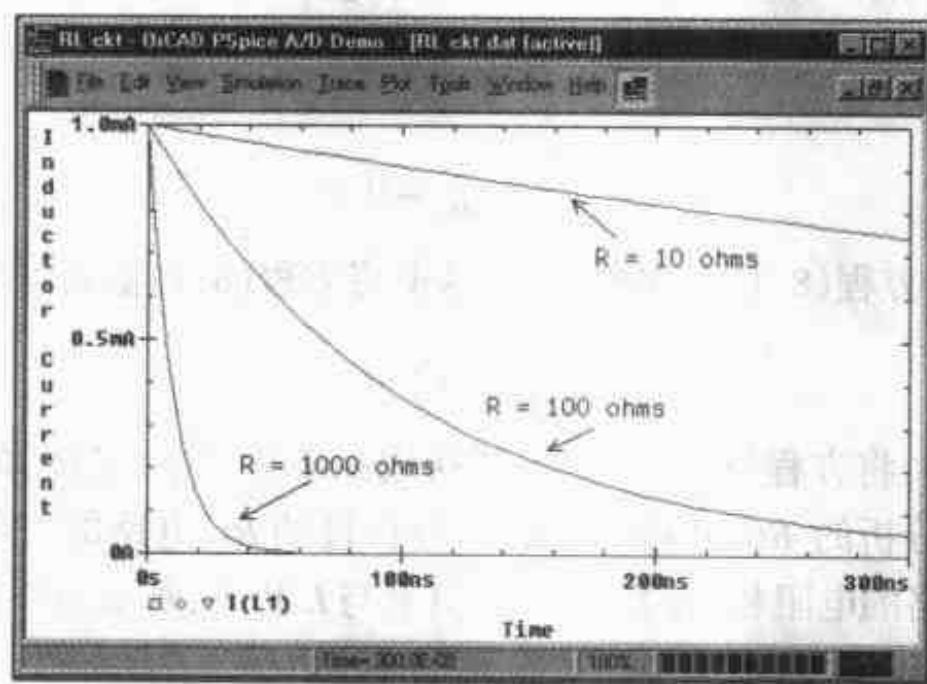


图 8.10 三个电阻值的 Probe 输出

为什么时间常数 L/R 越大响应曲线衰减越慢呢? 下面来分析各元件变化对时间常数产生的影响。

利用时间常数 τ , 可以将串联 RL 电路的响应表示为:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

增大 L 意味着在同样的初始电流下电感将储存更多的能量,因此电阻需要用更长的时间来消耗这些能量。减小 R 同样可以增大 L/R , 在这种情况下,对于同样的初始电流,流入电阻的功率将更小,同样,这需要更长的时间来消耗电感所储存的能量。从图 8.10 所示的仿真结果可以很清楚地看到电阻的这种影响。

8.4 无源 RC 电路

由电阻-电容组合构成的电路要比由电阻-电感构成的电路更为常见,主要原因是电阻-电容组合电路的物理损耗更小,成本更低,器件的实际工作特性与它们的简单数学模型符合