得更好,而且尺寸更小,重量更轻,这两点对集成电路来说尤为重要。

现在来看并联(或者说串联)RC 电路的分析(如图 8.11 所示)与相应的 RL 电路的分析有多少相似之处。假定存储在电容上的初始能量用下式表示:

$$v(0) = V_0$$

从电路图上端节点流出的总电流必然为零,所以,可以写出:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

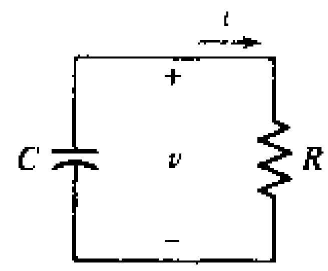


图 8.11 求并联 RC 电路的 $v(t)$,给定初始条件为 $v(0) = V_0$

将上式除以 C,得:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{8.7}$$

可以看到,方程(8.7)与方程(8.1)形式很相似,这里将方程(8.1)重新写出如下:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \tag{8.1}$$

对比以上两个方程可知,将方程(8.1)中的 i 替换成 v,L/R 替换成 RC 的乘积,可以得到方程(8.7)。事实上,现在所分析的 RC 电路正是前面分析过的 RL 电路的对偶。根据对偶性可知,如果 RC 电路与 RL 电路的电阻相同,且 C 在数值上与 L 相等,那么 RC 电路的 $v(t)$ 与 RL 电路的 $i(t)$ 的表达式完全相同。因此,根据 RL 电路的响应:

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0 e^{-Rt/L}$$

可以直接写出 RC 电路的响应为:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \tag{8.8}$$

假定选取电流 i 而不是电压 v 作为 RC 电路的变量,则根据基尔霍夫电压定律,有:

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt' + v(t_0) + Ri = 0$$

此时得到一个积分方程而不是微分方程,但如果方程两边均对时间求导:

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \tag{8.9}$$

然后将 i 替换成 v/R,则又得到了方程(8.7):

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

需要指出,可以将方程(8.9)作为前面讨论的出发点,但这样不能体现对偶原理的作用。

现在讨论这个 RC 电路的电压响应的物理特性,它由公式(8.8)来描述。将 $t = 0$ 代入该式,可以得到正确的初始条件,并且可以验证当 t 变为无限大时电压趋于零,这个结论与前面的结论一致,即如果电容两端还有电压存在,那么能量将继续以热量的形式被耗尽,因此,最终

的电压值必然为零。RC 电路的时间常数可以根据 RL 电路的时间常数的表达式并使用对偶性来得到，也可以根据响应经过一个时间常数后下降到其初始值的 37% 来得到：

$$\frac{\tau}{RC}=1$$

所以：

$$\tau = RC \tag{8.10}$$

现在已经熟悉了负指数函数和时间常数的含义，这时就很容易画出响应曲线(图 8.12)。R 或者 C 的值越大，时间常数也越大，存储的能量也消耗得越慢。也就是说，在两端电压固定的情况下，电阻越大其消耗的功率越小，于是需要更长的时间把存储的能量转为热量。而对于电容，当两端电压固定时，电容越大存储的能量越多，电阻同样需要用更长的时间来消耗这些初始能量。

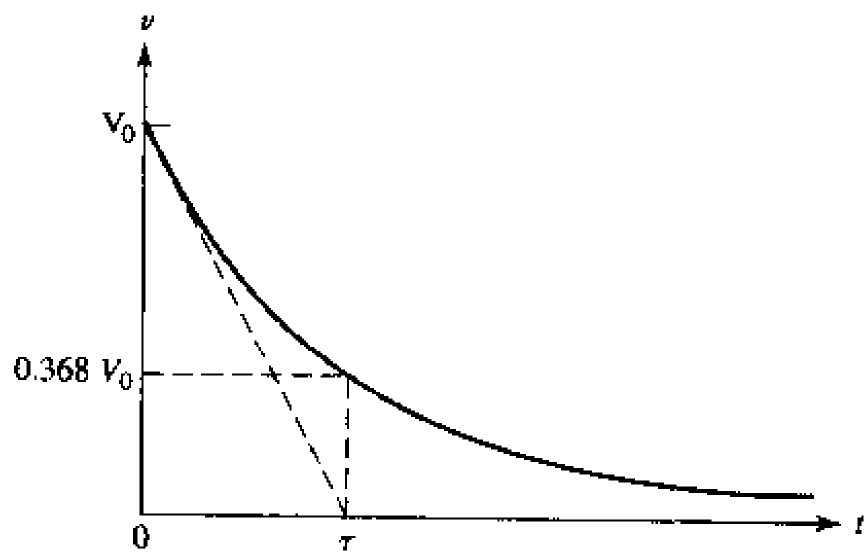


图 8.12　并联 RC 电路中电压 $v(t)$ 随时间变化的曲线，已知 $v(t)$ 的初始值为 V_0

练习

8.3　求图 8.13 所示电路的 $v(0)$ 和 $v(2\ \text{ms})$。求解本题需要画出两个不同的电路：一个对应于开关闭合前，另一个对应于开关闭合后，而在 $t=0$ 时刻两个电路中电容两端的电压必须相等。

答案：50 V；14.33 V

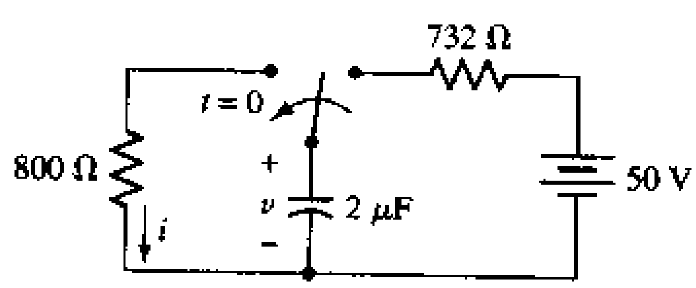


图 8.13

8.5　更一般的观点

不难将前面得到的关于串联 RL 电路的结论推广到包含一个电感和任意多个电阻的电

路,同样,可以将关于 RC 电路推广到包含一个电容和任意多个电阻的电路。

8.5.1 *RL* 电路的一般形式

首先来考虑从电感两端看过去的等效电阻,这样电路就简化为简单串联形式。举一个例子,来看图 8.14 所示电路,从电感两端看出去的等效电阻为:

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

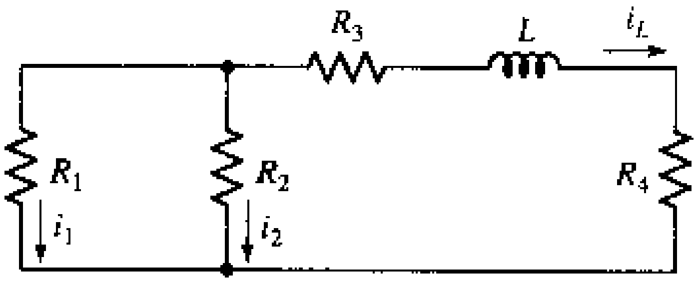


图 8.14 含有一个电感和几个电阻的无源电路,首先确定其时间常数 $\tau = L/R_{eq}$ 然后再对该电路进行分析

于是,得到时间常数为:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

因此,电感电流 i_L 为:

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau}$$

这时,求出的解 i_L 称为基本解,通常还需要求出 i_L 之外的电流或者电压,例如 R_2 上的电流 i_2。对于电路中的电阻部分,总是可以运用基尔霍夫定律和欧姆定律进行分析,不过在这里使用分流定理更为方便:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}[i_L(0)e^{-t/\tau}]$$

有时还可能遇到不知道电感电流而只知道其他电流的情形。因为电阻上的电流可以发生突变,因此采用符号 0^+ 来表示在 $t = 0$ 后的瞬间。如果用更精确的数学语言来描述,那么 $i_1(0^+)$ 表示当 t 趋于 0 时 $i_1(t)$ 的右极限①。因此,如果 i_1 的初始值已知为 $i_1(0^+)$,那么 i_2 的初始值为:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

根据这些值,可以得到初始电感电流值 $i_L(0)$[或 $i_L(0^-)$或 $i_L(0^+)$]为:

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2}i_1(0^+)$$

从而得到 i_2 的表达式为:

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

① 需要注意,这只是为了方便而引入的记号,如果在方程中遇到 $t = 0^+$ 或与之对应的 $t = 0^-$,可以将它们看做零。使用该记号,可以很清楚地区分事件发生前后的时间点,例如开关的打开和闭合,或者电源的接通和断开。

下面来看能否更直接地得到最后这个表达式。由于电感电流是以指数形式 $e^{-t/\tau}$ 衰减，于是这个电路中所有的其他电流也必然具有同样的特性。如果将电感电流视为一个电源的电流，并作用到一个电阻网络上，那么可以很清楚地知道这一点，因为在这个电阻网络中，每个电流和电压必然具有与电源相同的时间依赖关系。利用这点，可以将 i_2 表示为：

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

其中：

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

而 A 必须由 i_2 的初始值确定。因为已知 $i_1(0^+)$，所以可以得到 R_1 和 R_2 两端的电压，并且有：

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

于是：

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

因此：

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

对于许多问题，可以采用类似的求解步骤快速求解。首先判断出响应对于时间的依赖关系为指数衰减形式，然后通过对电阻进行合并来确定电路的时间常数，然后就可以写出解的形式，它的幅度待定，最后由给定的初始条件确定这个待定的幅度，这样就完成了整个求解过程。

任何包含一个电感和任意多个电阻的电路都可以采用同样的方法进行求解，这种方法也可以运用于包含多个电感和多个电阻的电路，因为可以采用电阻合并和电感合并方法将这些电路简化为成单个电感和单个电阻的形式。

例题 8.2　求图 8.15(a)所示电路中的 i_1 和 i_L。

$t=0$ 后断开电压源，如图 8.15(b)所示，容易计算出等效电感为：

$$L_{eq} = \frac{2\times 3}{2+3} + 1 = 2.2\ \text{mH}$$

等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{90\times(60+120)}{90+180} + 50 = 110\ \Omega$$

于是，时间常数为：

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2\times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu\text{s}$$

因此，自由响应的形式为 $Ae^{-50\,000t}$。在独立电源断开前($t<0$)，i_L 为 $\frac{18}{50}$ A，即 360 mA。在 $t=0^+$，i_L 必须仍然为 360 mA，因此：

$$i_L = \begin{cases} 360\ \text{mA}, & (t<0) \\ 360e^{-50\,000t}\ \text{mA}, & (t>0) \end{cases}$$

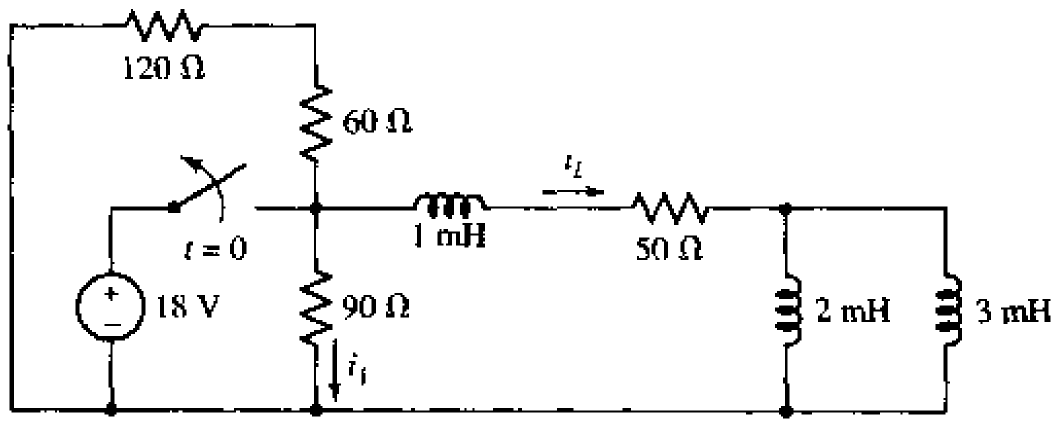
对于 $t<0$，i_1 为 $\frac{18}{90}$ A = 200 mA，后来它将跳变到另一个值，由 $i_L(0^+)$ 确定。利用分流定

理：

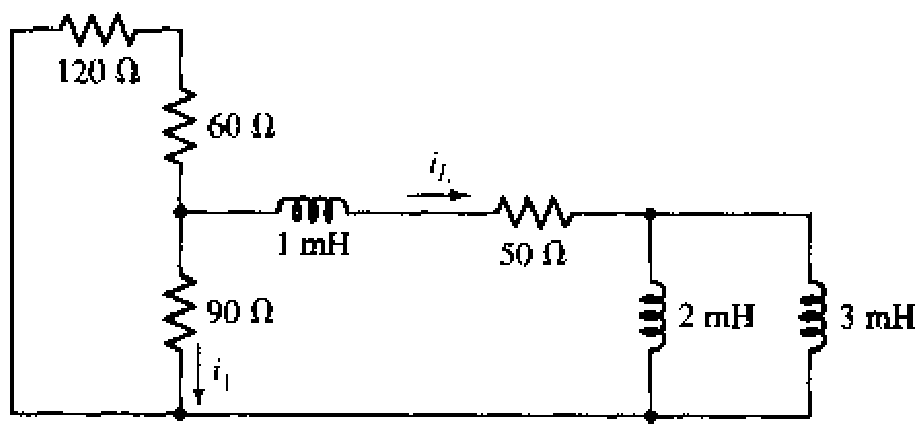
$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{120+60}{120+60+90} = -240\ \text{mA}$$

因此：

$$i_1 = \begin{cases} 200\ \text{mA}, & (t<0) \\ -240e^{-50\,000t}\ \text{mA}, & (t>0) \end{cases}$$



(a)



(b)

图 8.15 (a)含有多个电阻和多个电感的电路；(b)在 $t=0$ 以后，电路简化成等效的单个电阻 $R_{eq}=110\ \Omega$ 与等效的单个电感 $L_{eq}=2.2$ mH的串联

练习

8.4 如图 8.16 所示电路，求 $t=0.15$ s 时下列各量的值：(a) i_L；(b) i_1；(c) i_2。

答案：0.756 A；0；1.244 A

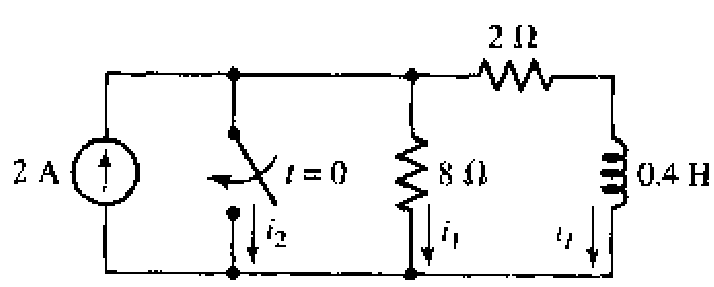


图 8.16

对于含有多个电阻和多个电感的电路，如果可以将其化简成单个等效电感与单个等效电阻串联的电路，这种情况下求解自由响应方法已在前面讨论过了。但是实际上并不总是能进行这样的化简，在这种情况下，不存在单个复指数项或单个时间常数，而是有若干项，项的个数等于对电路进行所有可能的电感合并之后剩余的电感数。

8.5.2 一般 RC 电路

需要求出自由响应的大多数电路都包含多个电阻和多个电容，可以采用类似于 RL 电路的分析方法，首先考虑那些可以最终简化为单个电阻与单个电容相串联的电路。

假定电路只包含一个电容和任意多个电阻，此时可以用一个等效电阻来替换接在电容两端的双端电阻网络，然后可以直接写出电容电压的表达式。

例题 8.3 如图 8.17(a)所示电路，设 $v(0^-)=V_0$，求 $v(0^+)$和 $i_1(0^+)$

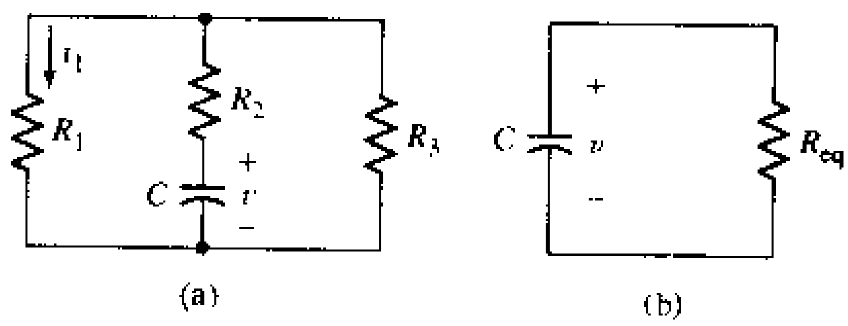


图 8.17 (a)含有一个电容和多个电阻的电路；(b)用一个等效电阻替换电阻网络后的电路，此时的时间常数为 $\tau = R_{eq}C$

首先，将图 8.17(a)所示的电路简化为图 8.17(b)所示的电路，这样可以直接写出：

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C}$$

其中：

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \quad 和 \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}$$

每个电阻的电流和电压必须具有 $Ae^{-t/R_{eq}C}$ 的形式，其中 A 为电流或电压的初始值。例如 R_1 上的电流可以表示为：

$$i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

其中：

$$\tau = \left(R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}\right)C$$

$i(0^+)$需要根据初始条件来确定。因为在 $t=0^+$ 时刻流入电路的电流必然来自电容，而电容两端的电压不能瞬时改变，于是：

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1R_3/(R_1+R_3)}\frac{R_3}{R_1+R_3}$$

练习

8.5 如图 8.18 所示电路，求 v_C 和 v_o 的值，当 t 分别为(a)0^-；(b)0^+；(c)1.3 ms。

答案：100 V，38.4 V；100 V，25.6 V；59.5 V，15.22 V

一些同时包含多个电阻和多个电容的电路可以化简为仅包含单个电阻和单个电容的等效电路，但这要求原来的电路可以划分为两部分，一部分包含所有的电阻，另一部分包含所有的电容，而且这两部分仅通过两根理想导线相连接。不过，通常情况下并不总是能够进行这样的化简，所以更常见的情况是需要用多个时间常数来描述包含多个电阻和多个电容的电路。

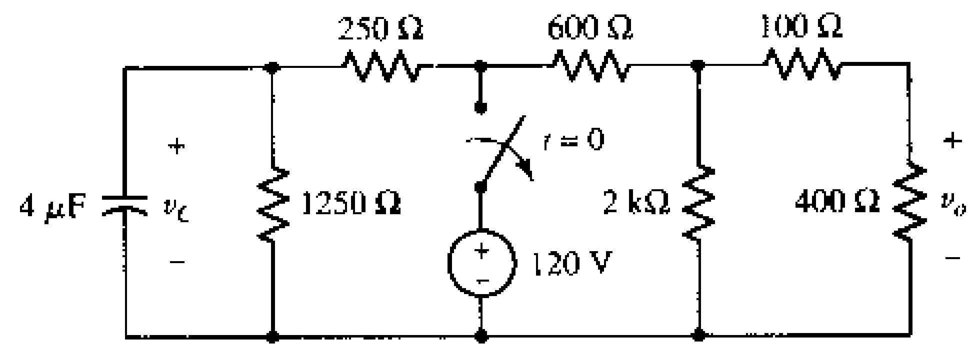


图 8.18

需要留心的是试图将某些理想元件直接相连的情况。例如可能会试图将 $t=0$ 以前具有不同电压的两个理想电容串接起来，这样，使用理想电容模型时将会产生问题，不过，实际的电容都具有一定的电阻，能量可以通过它们被损耗掉。

8.6 单位阶跃函数

前面已经讨论了无源或激励函数不存在时 *RL* 和 *RC* 电路的响应，并称这种响应为自由响应，因为它的形式只决定于电路本身的特性。从根本上说，自由响应都产生于存储在电路中的电感或者电容元件上的初始能量。通常会遇到电源和开关电路，而且假定这些开关在 $t=0$ 时打开，这样就相当于移去了电路中的电源，但是电路储存有一定的能量在电容和电感中。换句话说，前面解决的是能源在瞬间从电路移走后的问题，下面是考虑能源在瞬间接入电路时产生的响应类型。

下而主要讨论将直流电源在瞬间接入电路后产生的响应。因为每个电子设备都需要接上电源进行工作，而且大多数设备在它们的使用寿命期间都会开关很多次，所以这里研究的问题适合于很多的实际情况。即使现在只讨论直流电源的情况，但这些简单的例子却可以描述许多实际设备的工作情况。例如，下面要分析的第一个电路可以描述直流电动机启动时电流的建立过程。在微处理器中，采用方波电压脉冲来表示数或者命令，在许多其他电子和晶体管电路中，也可以找到方波电压脉冲的产生和应用的例子。在电视接收机中的同步和扫描电路中，以及在使用脉冲调制的通信系统、雷达系统和许多其他应用中也都存在类似的电路。

前面说到了能源的“瞬间接入”，这句话的含义是它的接入不需要时间①。因此，与电池串联的开关的闭合等效于一个激励函数，它在开关闭合前为零，而在闭合瞬间之后等于电池电压。这种激励函数在开关闭合时刻有一个跳变或者说不连续(或者具有不连续导数，这样的激励函数称为奇异函数)，其中最重要的两种奇异函数为单位阶跃函数和单位脉冲函数。

将单位阶跃激励函数定义为时间的函数，时间小于零时其值为 0，而时间大于零时其值为 1。如果以 $(t-t_0)$ 作为参数，用符号 u 来表示单位阶跃函数，那么对所有小于 t_0 的 t 值，$u(t-t_0)$ 必然为 0，对所有大于 t_0 的其他 t 值必然为 1，而在 $t=t_0$ 处，$u(t-t_0)$ 从 0 跳变到 1，它在 $t=t_0$ 没有定义，但是对任意接近 $t=t_0$ 的时刻都是已知的，通常用 $u(t_0^-)=0$ 和 $u(t_0^+)=1$ 来表示这一点。单位阶跃激励函数可以用下式简洁定义为：

① 当然这在物理上是不可能的，但是如果事件发生的时间与描述该电路工作情况的其他时间相比非常短时，它近似正确，并且这便于在数学上描述。

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

该函数的图形如图 8.19 所示，注意到，在 $t=t_0$ 处有一段高度为 1 的垂直线，尽管严格地说该上升部分并不是单位阶跃函数定义的一部分，但通常在每个单位阶跃函数的图中都包含它。

还需要注意到，并不要求单位阶跃函数必须为时间的函数，例如可以用 $u(x-x_0)$ 来表示一个单位阶跃函数，其中的 x 可以代表单位为米的长度或者频率等等。

在电路分析中，一般定义电路中发生不连续或开关作用发生的瞬间为 $t=0$，即 $t_0=0$，这时相应的单位阶跃函数表示为 $u(t-0)$，或简写为 $u(t)$，如图 8.20 所示。因此：

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

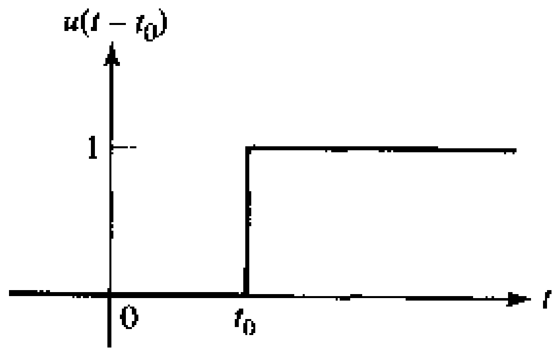


图 8.19　单位阶跃激励函数 $u(t-t_0)$

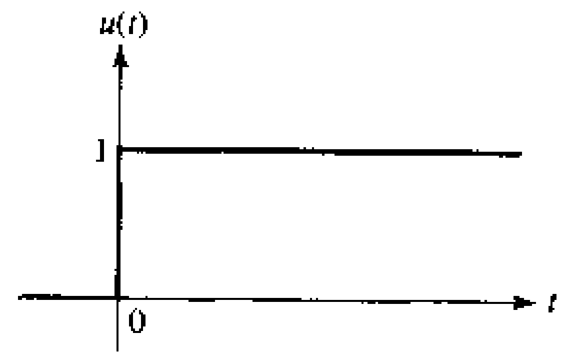


图 8.20　单位阶跃函数 $u(t)$

单位阶跃激励函数本身是无量纲的，所以如果希望用它表示电压，需要将 $u(t-t_0)$ 乘以一个常量电压，比如 5 V。例如 $v(t)=5u(t-0.2)$ V 表示一个理想电压源，在 $t=0.2$ s 之前为零，在 $t=0.2$ s 之后恒为 5 V。图 8.21(a)画出了该激励函数接入到一般网络的情形。

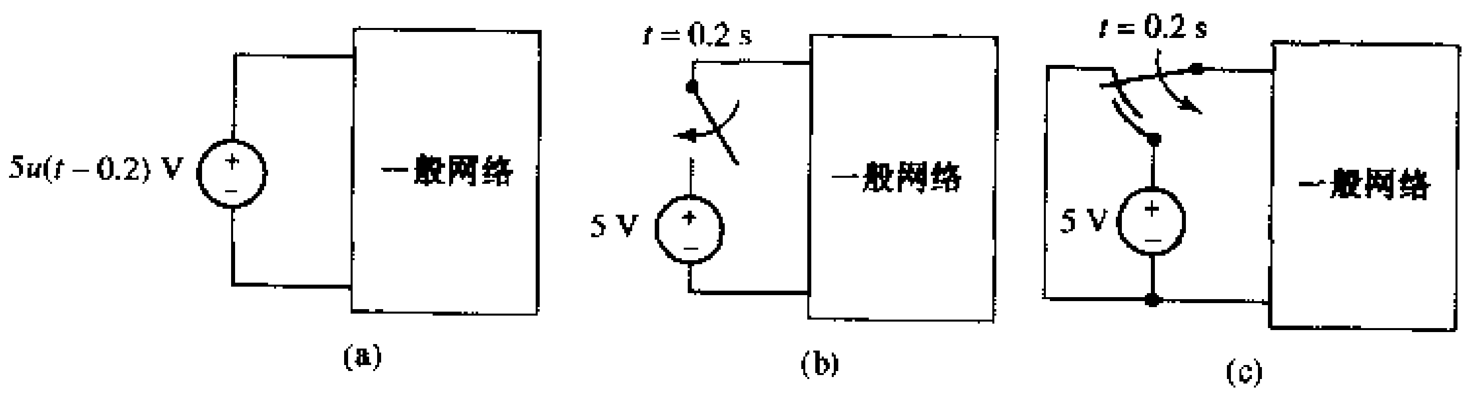


图 8.21　(a)一个电压阶跃函数，它作为一般网络的激励源；(b)简化后的电路，尽管它并不是与(a)精确等效，但在大多数情况下可以用做(a)的等效电路；(c)与(a)完全等效的电路

8.6.1　物理电源与单位阶跃函数

现在很自然地会问，与这些不连续的激励函数相对应的物理电源是什么？这里的等效指的是两个网络的电压 - 电源特性相同。对于图 8.21(a)所示的阶跃电压源，其电压 - 电流特性很简单：电压在 $t=0.2$ s 前为零，在 $t=0.2$ s 后为 5 V，而在这两个时间段的电流可以为任意有限值。第一个想到可能是如图 8.21(b)所示的等效电路，即 5 V 直流电源与一个在 $t=0.2$ s闭合的开关相串联的形式。不过这个网络在 $t<0.2$ s 与原网络并不等效，因为这时电池和开关两端的电压不确定(事实上与它等效的电路为开路，这时电压可以为任意值)。不过在 $t=0.2$ s 后，两个网络等效。如果只对该时间区间感兴趣，且在 $t=0.2$ s 流向两个网络的初始

电流相同,那么图 8.21(b)就成为图 8.21(a)的一个很有用的等效。

为了得到与电压阶跃激励函数完全等效的电路,可以使用一个单刀双掷开关。在 $t=0.2$ s前,使用该开关来保证这个一般网络两端的电压为零。在 $t=0.2$ s 后,开关打到另一端,接入 5 V 恒定电压。在 $t=0.2$ s,电压是不确定的(符合阶跃激励函数的定义),并且对于该图而言在 $t=0.2$ s 瞬间电池是短路的(幸运的是,这里只是处理数学模型)。这个与图 8.21(a)完全等效的电路如图 8.21(c)所示。

图 8.22(a)画出了将一个阶跃电流激励函数接到一个网络的情形,如果用一个直流电源并联一个开关(在 $t=t_0$ 打开)来代替这个电路,那么必须注意到,虽然在 $t=t_0$ 之后两个电路是等效的,但是只有在初始条件相同时 $t=t_0$ 之后的响应才相同。图 8.22(b)所示电路隐含了 $t<t_0$ 时电流源两端电压为 0,这与图 8.22(a)的情况不同。不过,以后仍然经常混合使用图8.22(a)和图8.22(b)中的电路。与图 8.22(a)完全等效的电路为图 8.21(c)所示电路的对偶,而如果只使用电流和电压阶跃激励函数,并不能构造出与图 8.22(b)所示电路完全等效的电路①。

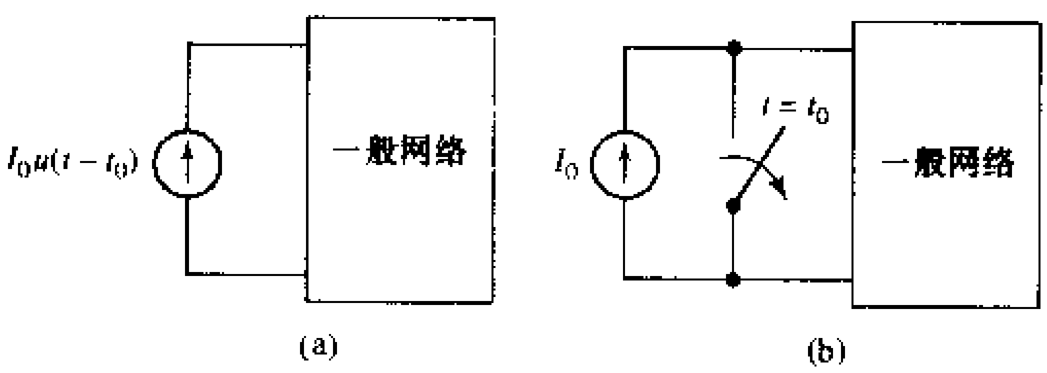


图 8.22 (a)电流阶跃激励函数接入到一个网络中;(b)一个简单电路,尽管它不与(a)完全等效,但在很多情况下通常使用它

8.6.2 矩形脉冲函数

通过对单位阶跃函数进行运算,可以得到一些很有用的激励函数。定义矩形电压脉冲为:

$$v(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ V_0, & t_0<t<t_1\\ 0, & t>t_1\end{cases}$$

画出脉冲的图形,如图 8.23 所示。图中的脉冲可以用单位阶跃激励函数表示出来吗?现在考虑两个单位阶跃函数的差 $u(t-t_0)-u(t-t_1)$,这两个阶跃函数如图 8.24(a)所示,它们的差正是一个矩形脉冲。因此,图中的脉冲电压可以用 $V_0u(t-t_0)-V_0u(t-t_1)$表示,如图 8.24(b)所示。

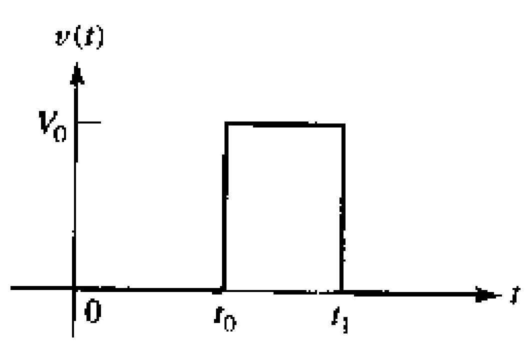


图 8.23 矩形电压脉冲

① 可以得到等效电路的条件是,在 $t=t_0$ 之前流过开关的电流为已知。

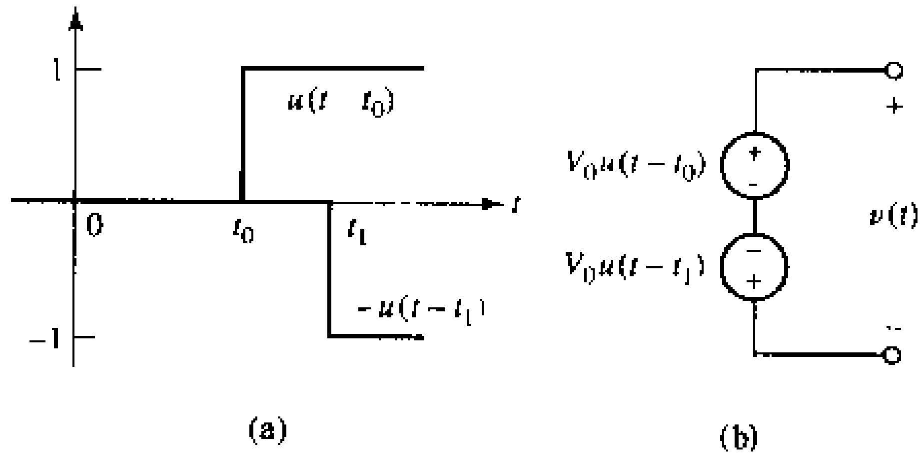


图 8.24　(a)单位阶跃函数 $u(t-t_0)$和 $-u(t-t_1)$;(b)得出如图 8.23 所示的矩形电压脉冲

如果将一个正弦电压源 $V_m \sin \omega t$ 在 $t=t_0$ 时接到一个网络,那么正确的激励函数为 $v(t) = V_m u(t-t_0)\sin \omega t$。如果要表示工作在 47 MHz(295 Mrad/s)下的无线遥控小车发送装置能量的突然改变,可以使用另一个单位阶跃函数在 1/10 μs 后关掉这个正弦电源[①],该电压用脉冲表示为:

$$v(t) = V_m[u(t-t_0) - u(t-t_0-10^{-7})]\sin(295\times 10^6 t)$$

激励函数的波形如图 8.25 所示。

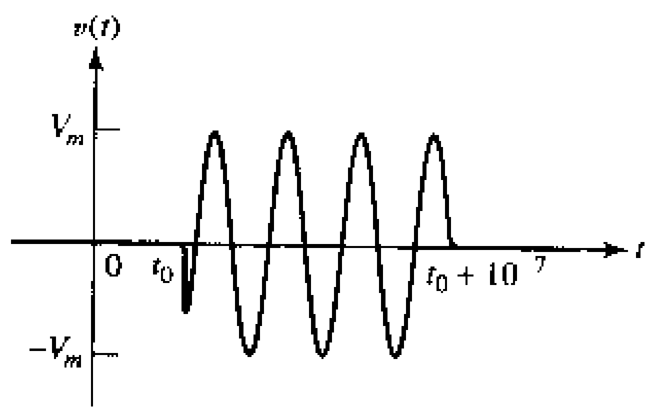


图 8.25　一个 47 MHz 的射频脉冲,用 $v(t) = V_m[u(t-t_0) - u(t-t_0-10^{-7})]\sin(295\times 10^6 t)$描述

练习

8.6　求出 $t=0.8$ 时下面各表达式的值:(a)$3u(t) - 2u(-t) + 0.8u(1-t)$;(b)$[4u(t)]^{u(-t)}$;(c)$2u(t)\sin \pi t$。

答案:3.8;0;1.176

8.7　电源作用于 *RL* 电路

现在开始研究将直流电源瞬间接入简单网络的情形。这个电路含有一个电压为 V_0 的电池,它与一个开关、一个电阻 R 和一个电感 L 串联。$t=0$ 时刻开关闭合,如图 8.26(a)所示。很显然,在 $t=0$ 之前电流 $i(t)$为零,于是可以将电池和开关替换成阶跃电压函数 $V_0u(t)$。在 $t=0$ 之前 $V_0u(t)$为零,所以电路不产生响应,因此这两个电路是完全等效的,于是,可以根据图 8.26(a)所示的电路,也可以根据图 8.26(b)所示的电路来求解电流 $i(t)$。

① 很显然,可以很容易地控制该小车,响应时间为 0.1 μs。

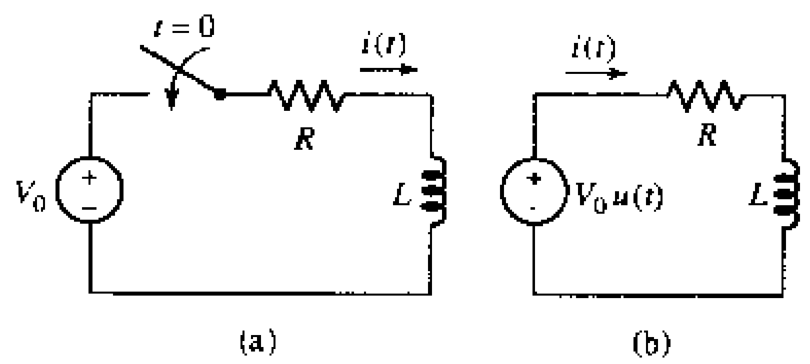


图 8.26 (a)给定的电路;(b)给定电路的等效电路,对所有的时间 t,两个电路的 $i(t)$相同

这时采用下面的方法来求 $i(t)$。首先写出合适的电路方程,然后进行分离变量并积分得到解。当求出解后,可以发现它由两部分组成,通过分析这两部分可以知道它们的物理含义。而当对解的各项物理含义有了更多的理解后,对以后将任何电源接入电路的问题就可以采用更快和物理含义更清晰的方法来求解。首先,采用正式一些的方法来求解。

对图 8.26(b)所示电路应用基尔霍夫电压定律,得到:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 u(t)$$

因为单位阶跃激励函数在 $t = 0$ 处不连续,所以下面首先考虑 $t < 0$ 时的解,然后考虑 $t > 0$ 时的解。因为从 $t = -\infty$ 到 $t < 0$ 激励为零,所以此时的响应必然也为零,因此:

$$i(t) = 0, t < 0$$

不过对于正的时间,$u(t)$为 1,则必须求解下面的方程:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0, t > 0$$

经过几步简单代数运算可以分离变量,得到:

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

直接对方程两边积分得:

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$

其中 k 为积分常数,必须利用初始条件来求 k。在 $t = 0$ 之前 $i(t)$为零,因此 $i(0^-) = 0$。又因为电感中的电流不能在零时间区间内改变,所以 $i(0^+) = 0$。令 $t = 0$ 时 $i = 0$,得到:

$$-\frac{L}{R}\ln V_0 = k$$

因此:

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

整理得:

$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

或

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}, t > 0$$

于是,响应的表达式为:

$$i = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-Rt/L} \right) u(t) \tag{8.11}$$

8.7.1　更直接的求解方法

前面已经求出了问题的解，但采用的不是最简单的方法。为了找出一种更直接的方法，下面来分析方程(8.11)中两部分的物理含义。指数项与 *RL* 电路的自由相应具有相同的形式，它为负指数函数，随着时间的增大它将趋于零，它的时间常数为 L/R。于是这部分响应的函数形式与无源电路得到响应形式相同，只是这时指数函数项的幅度决定于电源电压 V_0。因此可以得到结论，响应将由两部分组成，其中第一部分的函数形式与无源电路相同，但幅度取决于激励函数。但另外一部分呢？

公式(8.11)还包含一个常数项 V_0/R，它代表什么呢？答案很简单：随着能量的逐渐损耗，自由响应将趋于零，电路最终将表现为一个电阻 R、一个电感 L 和电池相串联的形式。又因为对于直流而言电感相当于短路，这时流过电感的电流为 V_0/R。这个电流是直接由激励函数产生的，因此称为受迫响应，它表示开关闭合很长时间后电路所出现的响应。

完全响应由两部分组成，自由响应和受迫响应。自由响应描述了电路本身而不是激励源的特性，它可以通过考虑无源电路而得到，其幅度由激励源的初始幅度和电路存储的初始能量共同决定。受迫响应描述了激励函数的特性，它可以通过假定所有的开关都已闭合很长时间以后得到。因为现在只讨论存在开关和直流电源的情形，所以受迫响应的求解只是简单的直流电路的求解问题。

8.7.2　培养直觉理解

将完全响应分为自由响应和受迫响应的原因可以从物理上进行分析。前面已经知道了电路最终必然表现为受迫响应，但是闭合开关的瞬间，电感的初始电流(或者 *RC* 电路中电容两端的初始电压)的值决定于存储在这些元件的能量，所以这些电流或者电压与由受迫响应决定的电流或电压大小不一样，因此两者之间必然存在一个过渡阶段，在这个过渡阶段，电压或者电流从给定的初始值过渡到由激励源确定的最终值。在完全响应表达式中，体现这个从初值到终值的过渡过程的部分称为自由响应(通常也称为暂态响应)。如果要描述无源简单 *RL* 电路的自由响应，可以认为其受迫响应为零即可。

以上的讨论仅对那些自由响应最终将消失的电路才正确。对于每个元件都具有一定电阻的实际电路，这通常是正确的，不过也有例外，比如许多“病态”电路，它们的自由响应在时间趋于无穷大时并不会消失。例如由一串电感组成的环形电路中的电流，或者一串电容中的各电容电压。

练习

8.7　电压源 $60-40u(t)$ V 与一个 10 Ω 电阻及一个 50 mH 电感相串联，求下列时刻电感上的电流和电压：$(a)0^-$；$(b)0^+$；$(c)\infty$；$(d)3$ ms。

答案：6 A，0 V；6 A，40 V；2 A，0 V；4.20 A，22.0 V

8.8　自由响应和受迫响应

将完全响应看做自由响应与受迫响应两部分组成，这在数学上有很好的根据。原因是任

何线性微分方程的解都可以表示成两部分的和:通解(自由响应)和特解(受迫响应)。这里不去深入研究一般的微分方程理论,只考虑前面各节中遇到的微分方程的一般形式:

$$\frac{di}{dt}+Pi=Q$$

或

$$di+Pi\ dt=Q\ dt \tag{8.12}$$

这里可以将 Q 视为激励函数,并且可以将其表示成 $Q(t)$以强调在一般情况下它依赖于时间。为了简化讨论,假定 P 为正常量,然后还假定 Q 为常量,讨论将限于直流激励函数的情形。

任何一本基础微积分教材都会讲到,如果方程(8.12)的两边乘以一个适当的积分因子,那么两边均为某个函数的微分形式,直接积分就可以得到方程的解。下面不去分离变量,而是将它们重新排列成可以直接进行积分的形式。这个方程的积分因子是 $e^{\int P dt}$ 或简单为 e^{Pt},因为假定了 P 是一个常量。以该积分因子乘方程的两端得到:

$$e^{Pt}di+iPe^{Pt}dt=Qe^{Pt}dt$$

注意到左边的形式为 ie^{Pt} 的微分,因此可以简化为:

$$d(ie^{Pt})=e^{Pt}di+iPe^{Pt}dt$$

于是:

$$d(ie^{Pt})=Qe^{Pt}dt$$

两边积分:

$$ie^{Pt}=\int Qe^{Pt}dt+A$$

其中 A 为积分常数。再乘以 e^{-Pt}就可以得到 $i(t)$:

$$i=e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt+Ae^{-Pt} \tag{8.13}$$

如果已知激励函数 $Q(t)$,那么就可以通过积分而得到 $i(t)$的函数形式。下面并不计算出每个积分,而是利用方程(8.13)来得到几个一般的结论。

8.8.1 自由响应

首先要指出的是,对于无源电路 Q 必然为零,解为自由响应:

$$i_n=Ae^{-Pt} \tag{8.14}$$

当电路仅由电阻、电感和电容组成时,可以发现 P 永远不为负值,并且它仅决定于电路中的无源元件① 以及它们的相互连接关系。于是,随着时间的无限增大,自由响应将趋于零。简单 *RL* 电路必然属于这种情况,因为初始能量将在电阻中逐渐以热能的形式损耗完。也存在 P 为零的理想电路,这样的电路中自由响应不随时间消失。

8.8.2 受迫响应

下面来考察方程(8.13)中由激励函数 $Q(t)$的函数形式决定的第一项。对于随着时间变

① 如果电路含有受控源或者负阻,P 可以为负值。

为无限大自由响应消失的那些电路，这一项必然完全描述了响应的形式，通常称它为受迫响应，也称为稳态响应或者特解。

只考虑将直流电源突然接入电路的情形，于是在所有时间内 $Q(t)$恒定不变，这样，可以计算出方程(8.13)中的积分，得到受迫响应为：

$$i_f = \frac{Q}{P}$$

于是完全响应为：

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt}$$

对于 RL 串联电路，Q/P 为常量 V_0/R，$1/P$ 为时间常数 τ。可以看到，不通过求出积分而得到受迫响应，因为它必然是经过无限长时间后的完全响应，它等于电源电压除以串联的电阻值。

8.8.3　完全响应的确定

下面将以简单 RL 串联电路为例，说明如何通过自由响应与受迫响应叠加的方法来确定完全响应。前面已经分析过图 8.27 所示的电路，但当时采用的方法比较繁琐。需要求出的响应是电流 $i(t)$，首先将电流表示成自由响应和受迫响应两部分的和：

$$i = i_n + i_f$$

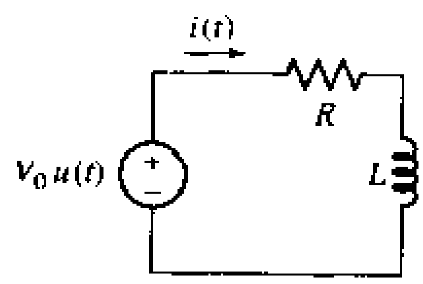


图 8.27　串联 RL 电路，用来说明如何利用自由响应与受迫响应相加的方法得到完全响应的方法

自由响应的函数形式必然与无源电路的响应相同，于是可用短路线代替阶跃电压源，这时，电路成为熟悉的 RL 串联电路，因此：

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$

其中幅度 A 待定，因为初始条件也影响完全响应的形式，所以不能简单地认为 $A = i(0)$。

下一步来考虑受迫响应。在本例中受迫响应必然为常量，因为 $t>0$ 时电源为常量 V_0。在自由响应消失以后，电感两端电压为零，因此相当于 V_0 直接接在 R 的两端，所以可以得到受迫响应为：

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

注意到，受迫响应中不含未知常量，于是下一步将两个响应合起来，得到：

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

然后利用初始条件求出 A。在 $t=0$ 之前电流为零，且它的值不能瞬时改变，因为该电流流过电感，因此 $t=0$ 后的瞬间电流仍为零，从而：

$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

所以：

$$i=\frac{V_0}{R}(1-e^{-Rt/L}) \tag{8.15}$$

很明显，A 并不等于 i 的初始值，因为 $A=-V_0/R$，而 $i(0)=0$。不过，对于无源电路，A 为响应的初始值。当存在受迫响应时，必须首先求出响应的初始值，然后将它代入完全响应的表达式中以求出 A。

该响应曲线如图 8.28 所示，可以看到电流从它的初始值零到它的终值 V_0/R 的建立过程。在 3τ 时刻可以认为暂态过程已经结束。如果该电路代表一个大功率直流电动机的励磁线圈，其可能的参数为 $L=10$ H，$R=20\ \Omega$，可以求出 $\tau=0.5$ s，因此可以知道励磁电流大约在 1.5 s后建立。在经过一个时间常数后，电流大小将达到其终值的 63.2%。

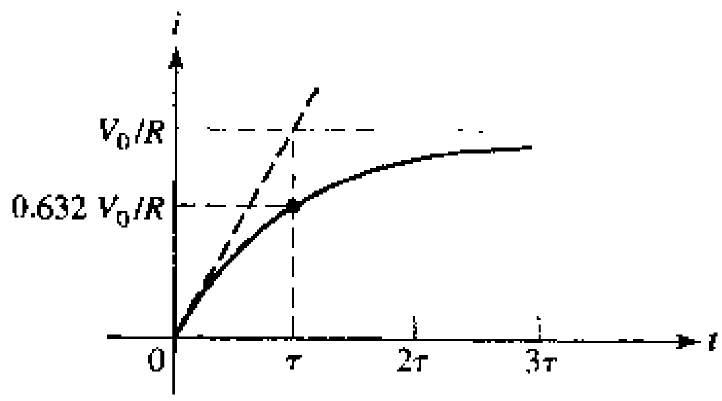


图 8.28　流过图 8.27 所示电路中的电感的电流曲线。曲线在初始时刻的切线与受迫响应在 $t=\tau$ 处相交

例题 8.4　求图 8.29 所示电路中 $i(t)$ 的表达式

这个电路含有一个直流电源和一个阶跃电压源。可能会想到将电感左边的电路用其戴维南等效来替换，不过这里只需要知道它等效为一个电阻串联上一个电压源即可。该电路只包含一个储能元件电感，首先求出：

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{3}{1.5}=2\ \text{s}$$

回想起前面用过的式子：

$$i=i_f+i_n$$

于是，和以前一样，自由响应为如下的负指数形式：

$$i_n=Ae^{-t/2}\ \text{A},\qquad t>0$$

因为激励函数为直流电源，所以电流受迫响应为常量。对于直流，电感表现为短路，所以：

$$i_f=\frac{100}{2}=50\ \text{A}$$

从而：

$$i=50+Ae^{-0.5t}\text{A},\quad t>0$$

为了求出 A，必须先求出电感电流的初始值。在 $t=0$ 之前电感电流为 25 A，因为它不能瞬时改变，所以：

$$25=50+A$$

得：

$$A=-25$$

因此：

$$i = 50 - 25e^{-0.5t}\ \text{A},\quad t > 0$$

它和下面的表达式一起构成了完整的解：

$$i = 25\ \text{A},\quad t < 0$$

或者可以将其写成单个表达式：

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})u(t)\ \text{A}$$

完全响应曲线如图 8.30 所示，注意看自由响应怎样将 $t<0$ 时的响应状态与恒定的受迫响应状态联系起来。

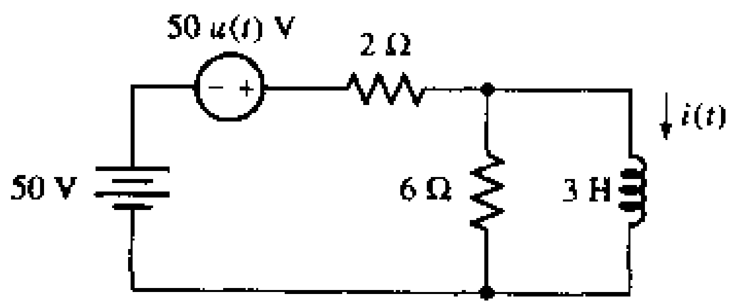


图 8.29　同例题 8.4 中的电路

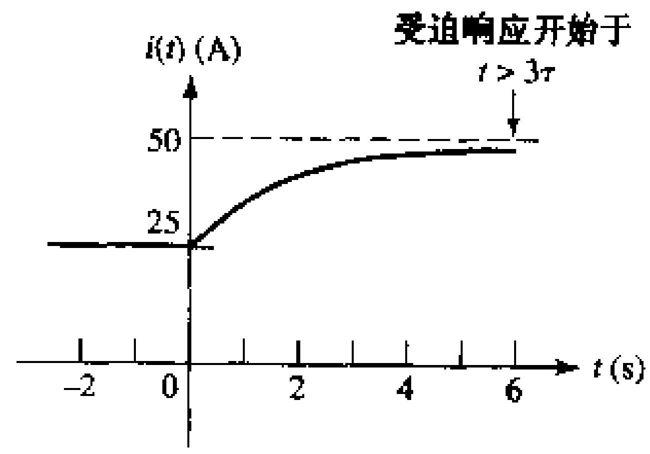


图 8.30　图 8.29 所示电路的响应 $i(t)$ 曲线

练习

8.8　电压源 $v_S = 20e^{-100t}u(t)$ V 与 200 Ω 电阻和 4 H 电感串联，求下列时刻电感电流的幅度：(a)0^-；(b)0^+；(c)8 ms；(d)15 ms。

答案：0；0；22.1 mA；24.9 mA

作为上面这种求解方法的最后一个例子，即不需要求出相应的等效电路就可以求得完全响应，重新考虑简单 RL 串联电路。

例题 8.5　求简单串联 RL 电路的电流响应，设激励函数为矩形电压脉冲，幅度为 V_0，持续时间为 t_0

首先将激励函数表示成阶跃电压函数的 $V_0u(t)$ 与 $-V_0u(t-t_0)$ 的和，如图 8.31(a)和图 8.31(b)所示，下面利用叠加原理来求出电流响应。设 $i_1(t)$ 表示 $i(t)$ 中由上端电压源 $V_0u(t)$ 单独作用产生的响应，$i_2(t)$ 则表示 $-V_0u(t-t_0)$ 单独作用产生的响应，于是：

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

现在的目标是将两个响应 i_1 和 i_2 分别写成自由响应与受迫响应的和。响应 $i_1(t)$ 已经由式(8.15)给出：

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}),\quad t > 0$$

需要注意的是，该解只在 $t>0$ 有效，上式已注明了这一点。

下面来考虑另一个电源和它产生的响应 $i_2(t)$。注意到这个电源和第一个电源只是极性和接入时间不同，所以没有必要去求解它的自由和受迫响应的形式，因为根据解 $i_1(t)$ 就可以直接写出：

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t-t_0)/L}], \quad t > t_0$$

其中 t 的有效区间为 $t > t_0$，同样必须注明。

将两个解加起来就得到了所求的电流响应，不过需要注意它们的有效时间区间不同。因此：

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \quad 0 < t < t_0$$

和

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}), \quad t > t_0$$

或

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_0/L} - 1), \quad t > t_0$$

上式与 $t<0$ 时 $i(t)=0$ 合在一起，构成了 $i(t)$ 的完整解，于是可以画出响应随时间变化的曲线。曲线的形状取决于 t_0 与时间常数 τ 的相对大小，图 8.32 画出了两条可能的曲线。左边的曲线是时间常数为激励脉冲宽度一半的情形，所以指数上升的部分在指数衰减之前已基本上达到了 V_0/R。右边为相反的情形，即其时间常数为 t_0 的两倍，于是响应幅度从比较小时就开始衰减。

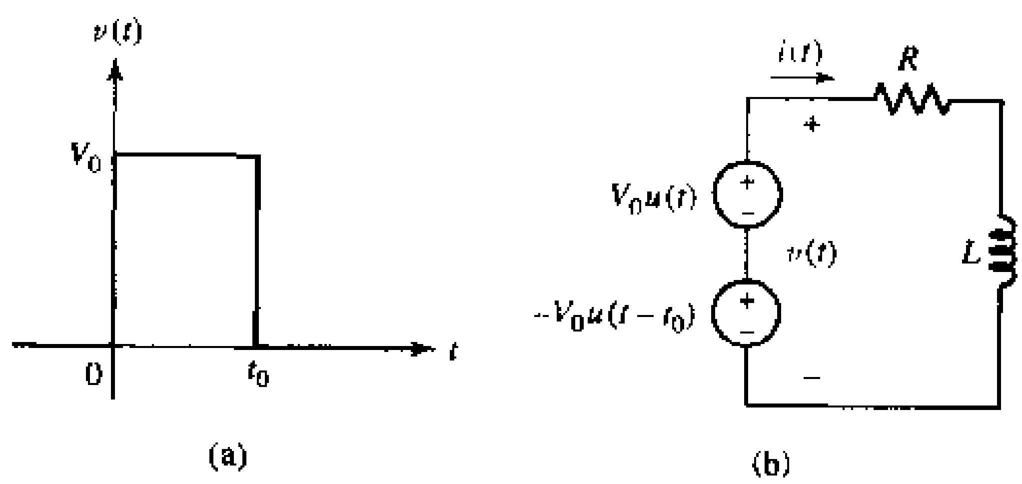


图 8.31 (a)在简单串联 RL 电路中用作激励函数的矩形电压脉冲；(b)串联 RL 电路，其激励函数表示为两个独立阶跃电压源的组合，求电流 $i(t)$

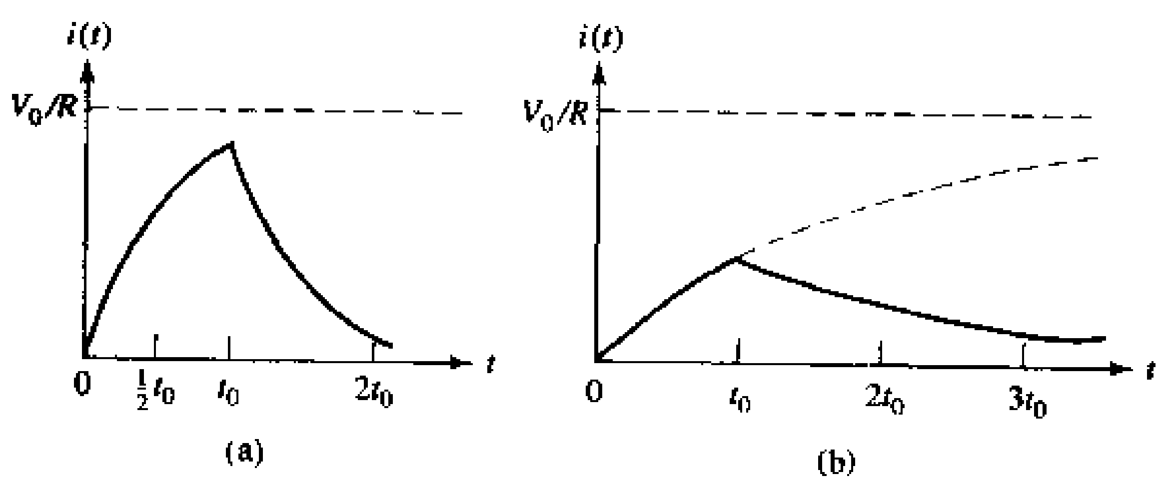


图 8.32 图 8.31(b)所示电路的两个可能的响应曲线。(a)选取 τ 为 $t_0/2$；(b)选取 τ 为 $2t_0$

下面对瞬间接入或者移去直流电源后，RL 电路响应的求解过程做一个总结。假定将所有

独立电源短路后电路可以简化为单个等效电阻 R_{eq} 与单个电感 L_{eq} 串联的情形,需要求出的响应用 $f(t)$ 表示。

1. 移去所有独立电源,简化电路以确定 R_{eq} 和 L_{eq},得到时间常数为 $\tau = L_{eq}/R_{eq}$。
2. 将 L_{eq} 看做短路,采用直流分析方法确定 $i_L(0^-)$,即不连续性发生前的电感电流。
3. 再次将 L_{eq} 看做短路,采用直流分析方法求出受迫响应,这是当 $t\to\infty$ 时 $f(t)$ 的近似值,将它表示为 $f(\infty)$。
4. 将总的响应写成受迫响应与自由响应的和:$f(t)=f(\infty)+Ae^{-t/\tau}$。
5. 利用初始条件 $i_L(0^+)=i_L(0^-)$ 求出 $f(0^+)$。如果有必要,可以将 L_{eq} 替换为一个电流源 $i_L(0^+)$[如果 $i_L(0^+)=0$ 则为开路]来计算。除了电感电流(和电容电压)外,电路中的其他电流和电压值可以突变。
6. $f(0^+)=f(\infty)+A$,$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$,即总的响应 = 终值 + (初值 - 终值)$e^{-t/\tau}$。

练习

8.9　如图 8.33 所示电路,它在 $t=0$ 开关打开前已工作了很长时间。求下列时刻 i_R 的值:(a)0^-;(b)0^+;(c)∞;(d)1.5 ms。

答案:0; 10 mA; 4 mA; 5.34 mA

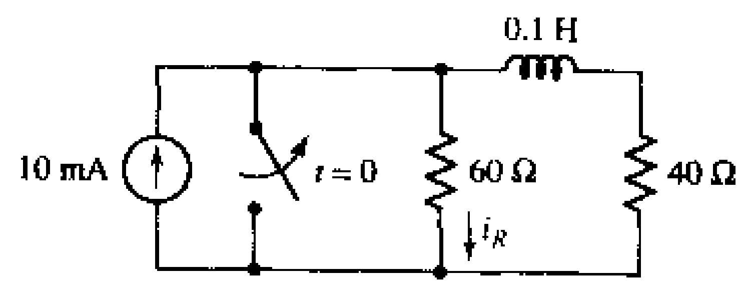


图 8.33

8.9　电源作用于 *RC* 电路

对于任何 *RC* 的电路,其完全响应也可以通过将自由响应与受迫响应加起来得到,下面以一个完整的例子来说明它。

例题 8.6　如图 8.34 所示电路,求电容电压 $v_C(t)$ 和 200 Ω 电阻上的电流 $i(t)$ 的表达式

首先,假定将开关转到 a 时产生的暂态响应已经消失,只余下 120 V 电源产生的受迫响应。这里需要求出 $v_C(t)$,首先求出 $t=0$ 之前开关位于 a 时的受迫响应。图 8.34(b)中,电路的所有电压均为常量,于是没有电流流过电容,利用分压定理可以得到初始电压:

$$v_C(0)=\frac{50}{50+10}\times(120)=100\ \text{V}$$

因为电容电压不能瞬时改变,所以 $t=0^-$ 时和 $t=0^+$ 时的电压相等。

然后将开关从 a 转到 b,设完全响应为:

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$

为方便起见，将此时的电路重新画出，如图 8.34(c)所示。自由响应的形式可以通过将 50 V电源替换为短路线，然后求出等效电阻(即从电容两端“看”过去的戴维南等效电阻)，再求出时间常数而得到。等效电阻为：

$$R_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{50}+\frac{1}{200}+\frac{1}{60}}=24\ \Omega$$

所以：

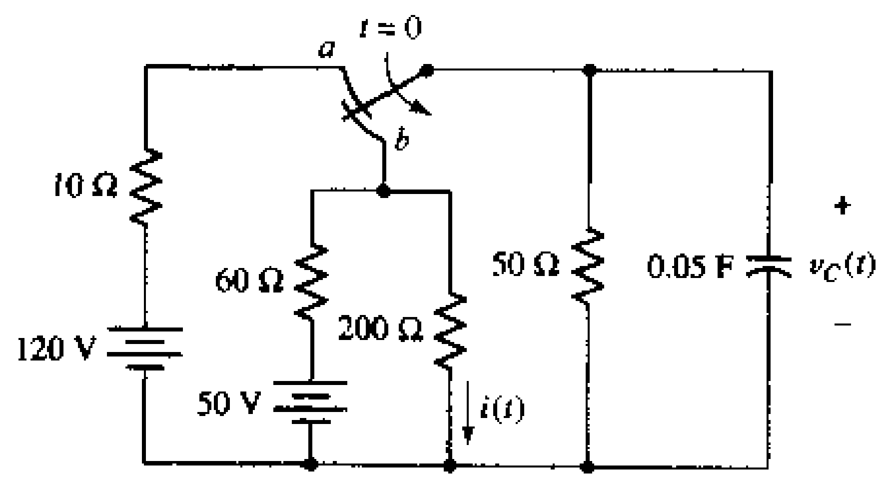
$$v_{C_n}=Ae^{-t/R_{eq}C}=Ae^{-t/1.2}$$

为求出开关位于 b 时的受迫响应，在所有电压和电流都不再变化后，这时可以将电容看成开路，利用分压定理可以得到：

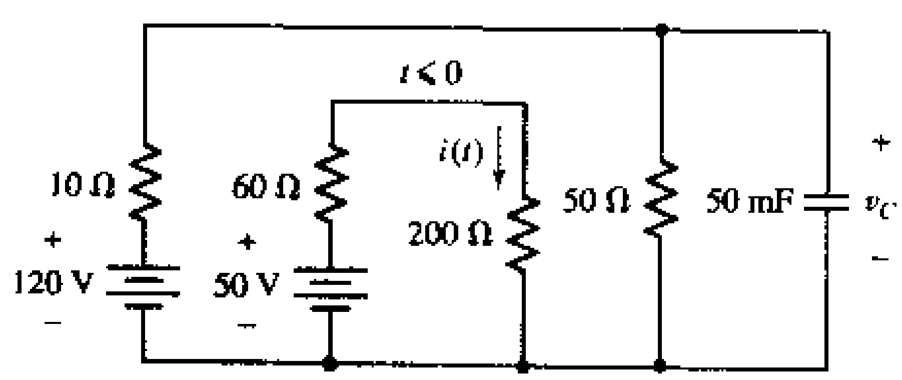
$$v_{Cf}=\frac{(50)\times(200)/(50+200)}{60+(50)\times(200)/(50+200)}(50)=20\ \mathrm{V}$$

因此：

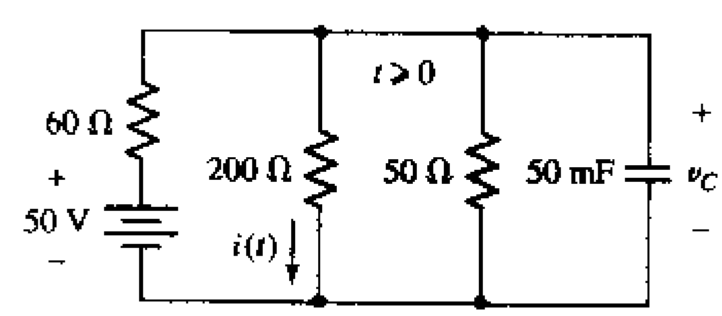
$$v_C=20+Ae^{-t/1.2}\quad \mathrm{V}$$



(a)



(b)



(c)

图 8.34 (a)求该 RC 电路中 v_C 和 i 的完全响应，它们由受迫响应与自由响应相加得到；(b) $t\leqslant 0$时的电路；(c) $t\geqslant 0$时的电路

根据已知的初始条件有：

$$100=20+A$$

或

$$v_C=20+80e^{-t/1.2}\quad \mathrm{V}$$

或

$$v_C=20+80e^{-t/1.2}\quad \mathrm{V},\quad t>0$$

画出该响应如图 8.35(a)所示。再次看到，自由响应成为初始响应到最终响应的过渡。

下一步来求解 $i(t)$，不必要求该响应在开关切换的瞬间保持不变。当开关位于 a 时，很明显有 $i = 50/260 = 192.3$ mA，而当开关位于 b 时，该电流的受迫响应为：

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)\times(200)/(50+200)}\left(\frac{50}{50+200}\right) = 0.1 \text{ A}$$

而自由响应形式则与前面已求出的电容电压相同：

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

将受迫响应与自由响应合并起来，得到：

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2} \quad \text{A}$$

为了求出 A，需要知道 $i(0^+)$，这可以通过分析储能元件(这里为电容)而得到。v_C 在开关前后必须保持为 100 V 不变，这是求出其他电流和电压在 $t = 0^+$ 处的值的关键条件。因为 $v_C(0^+) = 100$ V，且该电容与 200 Ω 电阻并联，因此可以得到 $i(0^+) = 0.5$ A，于是：

$$i(t) = 0.1923 \text{ A}, \quad t<0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} \quad \text{A}, \quad t>0$$

或

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \quad \text{A}$$

最后一个公式对所有时间 t 均正确。

如果采用 $u(-t)$，可以将完全响应写成更简洁的形式。当 $t<0$ 和 $t=0$ 时 $u(-t)$ 为 1，$t>0$ 时为 0。因此：

$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \quad \text{A}$$

该响应曲线如图 8.35(b)所示。从上式可以看到，对于只含有单个储能元件的电路，只需要用四个数就可以写出响应函数形式或者画出它，这四个数为：开关闭合前的常数(0.1923 A)，开关闭合后的瞬时值(0.5 A)，恒定的受迫响应(0.1 A)，以及时间常数(1.2 s)。知道这些后，很容易写出或画出这个负指数函数。

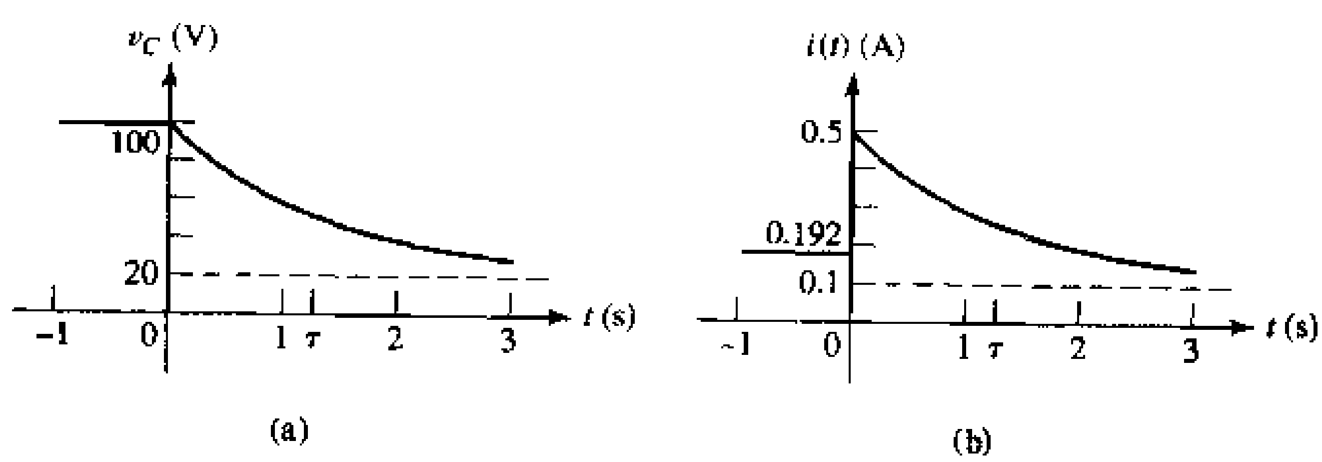


图 8.35　图 8.34 电路响应的时间函数。(a)v_C；(b)i

练习

8.10　如图 8.36 所示电路，求下列时刻 $v_C(t)$ 的值：(a)0^-；(b)0^+；(c)∞；(d)0.08 s。

答案：20 V；20 V；28V；24.4 V