

开路电压 v_{oc} 为:

$$v_{oc} = (10 \cos 10^3 t) \frac{100}{100 + 25} = 8 \cos 10^3 t \text{ V}$$

因为这里没有受控源,所以可以通过求出移去独立源后得到的无源网络的电阻而得到 R_{th} ,有 $R_{th} = (25 \times 100)/(25 + 100) = 20 \Omega$ 。

现在已经得到了一个简单串联 RL 电路,其中 $L = 30 \text{ mH}$, $R_{th} = 20 \Omega$,电源电压为 $8 \cos 10^3 t \text{ V}$,如图 10.5(c)所示。这样,根据一般 RL 串联电路得到的式(10.4)可得:

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}} \cos\left(10^3 t - \tan^{-1} \frac{30}{20}\right) \\ &= 222 \cos(10^3 t - 56.3^\circ) \text{ mA} \end{aligned}$$

电压和电流的波形曲线如图 10.6 所示。

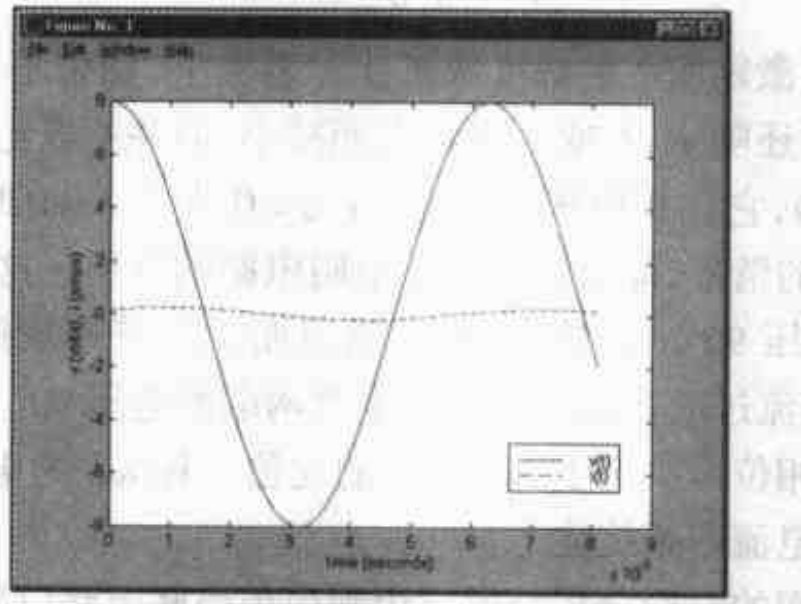


图 10.6 例题 10.1 的电路的电压和电流波形,使用 MATALAB 画出:

```
EDU >> time = linspace(0,8,1 * 1e-3,1000);
EDU >> v = 8 * cos(1e3 * time);
EDU >> i = 0.222 * cos(1e3 * time - 56.3 * pi/180);
EDU >> plot(time, v, '-b', time, i, '-b');
EDU >> xlabel('time(seconds)');
EDU >> ylabel('v(volts), i(amps)');
EDU >> legend('v(t)', 'i(t)', (0));
```

10.3 如图 10.7 所示电路,设 $v_s = 40 \cos 8000t \text{ V}$,利用戴维南定理(这是最简便的方法),求 $t = 0$ 时的(a) i_L ; (b) v_L ; (c) i_R ; (d) i_s 。

答案: 18.71 mA; 15.97 V; 5.32 mA; 24.0 mA

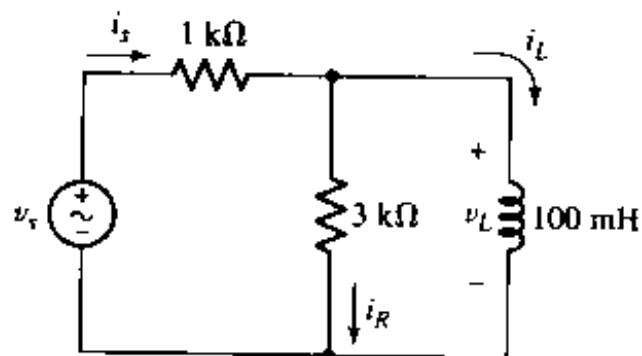


图 10.7

10.4 复激励函数

求解一般的串联 RL 电路的正弦稳态响应并不是一个简单的问题,应该考虑到由于电感的存在所带来的分析上的复杂性。如果串联 RL 电路中的两个元件均为电阻,那么即使是在正弦激励函数的情况下,对它的分析也是非常容易的,因为可以根据欧姆定理,很容易得到所需要的结果。但是对于电感,它的电压-电流关系将不再那么简单,这时需要求解的不是简单的代数方程,而是非齐次微分方程。因此,采用上面例子中介绍的方法来分析含有电感的电路并不实际,所以后面将采用另一种方法来简化分析。后面将看到,采用这种简化的方法将得到电容、电感以及电阻各自的正弦电流和正弦电压之间的一种代数关系,这样,对于任意复杂的电路,均可以列出一组这样的代数方程。虽然这时方程组中的常量和变量均为复数而不是实数,但是通过采用这种方法,任意电路的正弦稳态分析将变得几乎与熟知的电阻电路分析一样简单。

下面来考虑将复激励函数(即激励函数同时具有实部和虚部)接入到一个网络中并分析其响应。这初看起来像是一个让人奇怪的想法,但后面将看到,在正弦稳态分析中,采用复变量来进行分析要比采用实变量简单得多。可以想像复激励函数产生一个这样的复响应,响应的实部由激励函数的实部产生,而虚部由激励函数的虚部产生。这看起来是很合理的,因为很难想像一个实电压会产生一个虚响应,反之亦然。

在图 10.8 中,将下面的正弦电压:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (10.5)$$

接入到一个网络中,这里假定网络只含有无源元件(即不含有受控源),以避免用到叠加原理。这里,需要求出网络中某个支路的电流响应,且式(10.5)所有的量均是实量。

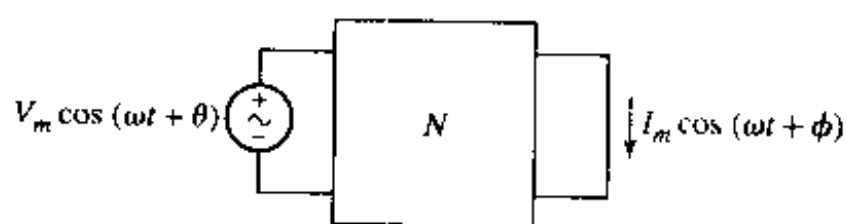


图 10.8 接入正弦激励函数 $V_m \cos(\omega t + \theta)$, 产生正弦稳态响应 $I_m \cos(\omega t + \phi)$

可以将该响应表示为一般的余弦函数:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (10.6)$$

在线性电路中,正弦激励总是产生相同频率的正弦受迫响应。

将激励函数的相角移位 90° , 即改变定义 $t = 0$ 的时刻, 于是, 激励函数:

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90^\circ) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (10.7)$$

接入到同一个网络时产生的响应为:

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (10.8)$$

下一步,先不考虑物理可行性,将一个虚激励函数接入到网络中。虽然不能在实验室中做到这一点,但可以在数学中进行。

10.4.1 虚电源产生的响应

要构造一个虚电源非常容易,只需要将式(10.7)乘以虚数运算符 j ^① 即可。考虑接入下面的电源:

$$jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (10.9)$$

那么它产生的响应是什么呢?注意到,根据线性原理,如果将电源加倍,那么得到响应也加倍。如果将激励函数乘以常量 k ,那么得到的响应也将乘以同样的倍数。因此,如果取这个常量为 $\sqrt{-1}$,那么这个关系同样成立。所以式(10.9)所示的虚电源产生的响应为:

$$jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (10.10)$$

纯虚电源和它产生的响应如图 10.9 所示。

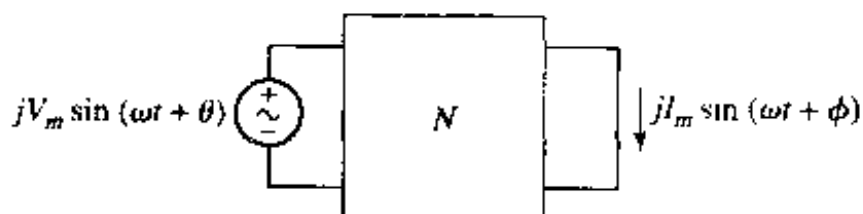


图 10.9 将虚正弦激励函数 $jV_m \sin(\omega t + \theta)$ 接到图 10.8 所示的网路,将产生虚正弦响应 $jI_m \sin(\omega t + \phi)$

10.4.2 复激励函数的接入

前面已经看到,接入实电源将得到实响应,接入虚电源将得到虚响应。因为考虑的是线性网路,而复激励函数等于实激励函数与虚数激励函数的和,所以可以应用叠加原理来求出复激励函数的响应。

因此,式(10.5)和式(10.9)所示激励函数的和为:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (10.11)$$

产生的响应必然为式(10.6)和式(10.7)所示响应的和:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (10.12)$$

利用欧拉公式,可以将复电源和复响应用更简洁的形式来表示。这时,式(10.11)所示的复电源可以表示为:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (10.13)$$

式(10.12)所表示的响应可以表示为:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \quad (10.14)$$

图 10.10 画出了上面的复电源和复响应。

附录 E 给出了复数和与复数相关的一些量的定义,并复习了复数的运算,导出了欧拉公式,以及指数形式与极坐标形式之间的关系。

① 在电子工程中,采用“ j ”而不是“ i ”来表示 $\sqrt{-1}$,以避免与电流的符号相混淆。

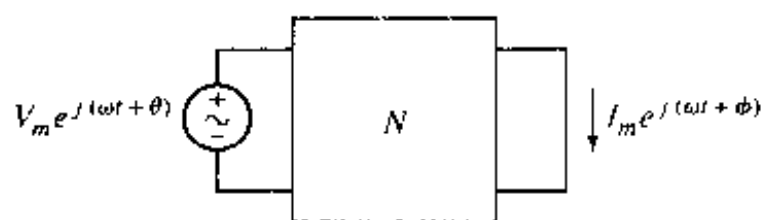


图 10.10 复激励函数 $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ 接入到图 10.8 所示的网络中,将产生复响应 $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$

实的、虚的和复的激励函数将分别产生实的、虚的和复的响应,而且,利用欧拉公式和叠加原理,可以将复激励函数看做为一个实激励函数与一个虚激励函数的和。复响应的实部由复激励函数的实部产生,而复响应的虚部由复激励函数的虚部产生。

我们不直接将实激励函数加到网络中来得到所要求出的实响应,而是通过将实部等于给定实激励函数的复函数接入到网络中去,并希望得到一个复响应,它的实部为所求的实响应。这样做的好处是可以将描述正弦稳态响应的积分微分方程组转化成简单的代数方程组。

10.4.3 将微分方程转化为代数方程

现在以图 10.11 所示的简单 RL 串联电路为例来解释上面的想法。接入的实电源为 $V_m \cos \omega t$, 需要求出实响应 $i(t)$ 。因为:

$$\cos \omega t = \operatorname{Re} \{ e^{j\omega t} \}$$

所以与之对应的复电源为:

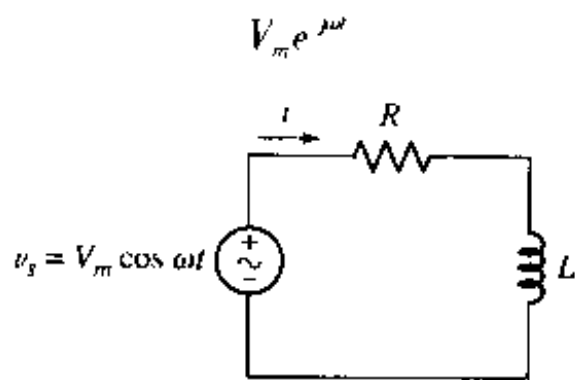


图 10.11 一个处于正弦稳态的简单电路,采用复激励函数对它进行分析

将复响应表示为幅度 I_m 和相角 ϕ 待定的形式:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

对这个电路,写出其微分方程为:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v_s$$

将 v_s 和 i 的表达式代入上式,有:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

求出式中的导数,得到:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

这时得到一个代数方程。为了求出 I_m 和 ϕ 的值,将上式的各项分别除以公共因子 $e^{j\omega t}$,得到:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega LI_m e^{j\phi} = V_m$$

对等式左边提取公因式,有:

$$I_m e^{j\phi} (R + j\omega L) = V_m$$

整理得:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

再将等式右边表示成指数或者极坐标形式,可以求出 I_m 和 ϕ :

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \quad (10.15)$$

因此:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

和

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

采用极坐标形式,电流和电压可以写成:

$$I_m \angle \phi$$

和

$$V_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle -\tan^{-1} \omega L / R$$

式(10.15)给出了复响应的表达式,根据它容易得到 I_m 和 ϕ ,所以立即可以得到 $i(t)$ 的表达式。不过,还可以采用另一种更为严格的方法来求解,即通过在式(10.15)^① 两边同时乘以因子 $e^{j\omega t}$,然后取实部得到实响应 $i(t)$ 。采用上面任意一种方法均可以得到:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

这与前面得到的式(10.4)一致。

例题 10.2 500 Ω 电阻与 95 mH 电感串联,如果流过这两个元件的复电流为 $8e^{j3000t}$,求这个串联组合两端的电压

需要求出复电压,它包括幅度 V_m 和相角 ϕ 。因为电压必然具有与电流相同的频率,所以可以写出电压的表达式为:

$$V_m e^{j(3000t + \phi)}$$

它等于电阻两端和电感两端的电压的和:

^① 原文为“式(10.12)”,疑有误——译者注。

$$V_m e^{j(3000t + \phi)} = (500) \times 0.008 e^{j3000t} + (0.095) \times \frac{d(0.008 e^{j3000t})}{dt}$$

求出式中的导数,得到:

$$V_m e^{j(3000t + \phi)} = 4 e^{j3000t} + j2.28 e^{j3000t}$$

消去公因子 e^{j3000t} ,有:

$$V_m e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

然后将公式右边表示成极坐标形式,得到:

$$4 + j2.28 = 4.60 e^{j29.7^\circ}$$

从上式可知, $V_m = 4.60$ V, $\phi = 29.7^\circ$, 因此所求电压为:

$$4.60 e^{j(3000t + 29.7^\circ)} \text{ V}$$

如果需要求出实响应,只需要对复响应取实部即可:

$$\operatorname{Re}\{4.60 e^{j(3000t + 29.7^\circ)}\} = 4.60 \cos(3000t + 29.7^\circ) \text{ V}$$

这样,对于含有一个储能元件的电路,可以通过上面的方法来求出其正弦稳态响应,而无需解微分方程!

练习

10.4 计算下面的表达式,并将它们表示成直角坐标的形式:(a) $[(2 \angle 30^\circ) \times (5 \angle -110^\circ)](1 + j2)$; (b) $(5 \angle -200^\circ) + 4 \angle 20^\circ$; 计算下面的表达式,并将它们表示成极坐标的形式:(c) $(2 - j7)/(3 - j)$; (d) $8 - j4 + [(5 \angle 80^\circ)/(2 \angle 20^\circ)]$ 。

10.5 如果采用无源符号规则,(a)将复电流 $4e^{j800t}$ A 接入到 1 mF 电容与 2 Ω 电阻的串联组合上,求组合两端的复电压;(b)将复电压 $100e^{j2000t}$ V 接入到 10 H 电感和 50 Ω 电阻的串联组合上,求产生的复电流。

答案:10.4: $21.4 - j6.38$; $-0.940 + j3.08$; $2.30 \angle -55.6^\circ$; $9.43 \angle -11.22^\circ$ 。

10.5: $9.43 e^{j(800t - 32.0^\circ)}$ V; $5.39 e^{j(2000t - 68.2^\circ)}$ A

如果在求解这些问题中遇到困难,请参看附录 F。

10.5 相量

当频率给定后,描述正弦电流或电压只需用两个参数:幅度和相角。同样地,电流或电压的复表达式也可以用这两个参数来描述。例如,例题 10.1 中假定的正弦电流响应的表达式为:

$$I_m \cos(\omega t + \phi)$$

响应的复形式为:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

当 I_m 和 ϕ 确定后,该电流就完全确定了。对于任何在某个频率 ω 下处于正弦稳态的线性电路,其中的任何电流或电压均可以用幅度和相角完整地描述。每个电流和电压的表达式均含

有同一个因子 $e^{j\omega t}$, 因为对于任何量都是如此, 那么这个因子就不包含有用的信息。当然, 通过该因子可以确定频率的大小, 但只需要在电路图中将该值注明一次即可, 在求解过程中, 没有必要带上这个多余的信息进行运算, 这样就简化了求解过程。因此, 本例中可以将电压源和电流响应简单表示为:

$$V_m \quad \text{或} \quad V_m e^{j\omega t}$$

和

$$I_m e^{j\omega t}$$

为方便起见, 通常将这些复量写成极坐标的形式而不是指数形式。因此, 可以将下面的电源:

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$

表示成:

$$V_m \angle 0^\circ$$

可以将前面的复响应:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

表示成:

$$I_m \angle \phi$$

这些简写的复表达式称为相量^①。下面首先复习一下将正弦电压转化为相量形式的步骤, 然后采用更有物理意义的方式来定义相量, 并用一个符号表示它。

对于一个实正弦电流:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

利用欧拉公式, 可以将其表示成一个复量的实部:

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

需要记住的是, 这里不考虑电路对激励源频率之外的频率的响应, 所以 ω 的值总是已知的。

然后, 去掉符号 $\operatorname{Re}\{\}$, 用复量来表示这个电流, 这时给电流添加了虚部, 但并不改变原来的实部。再去掉因子 $e^{j\omega t}$, 进一步简化为:

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

最后, 将结果写成相量的形式:

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

这个简化的复数表示称为相量表示, 相量是一个复量, 因此用粗体表示。在相量表示中采用大写字母是因为相量不是关于时间的函数, 它只包含幅度和相角信息。为了表示这种差别, 将 $i(t)$ 称为时域表示, 而将相量 \mathbf{I} 称为频域表示。

需要指出的是, 频域表示并不显式包含频率, 不过, 可以认为频率是频域的基本量, 因此可以略去。

^① 不要将相量(phasor)与移相器(phaser)相混淆, 移相器是电视机中的一种有趣的器件。

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

将 $i(t)$ 转化成 \mathbf{I} 的过程称为从时域到频域的相量变换

例题 10.3 将时域电压 $v(t) = 100 \cos(400t - 30^\circ)$ V 转化成频域表示

这个时域表达式已经是包含相角的余弦形式,于是去掉 $\omega = 400$ rad/s 即可:

$$\mathbf{V} = 100 \angle -30^\circ \text{ V}$$

需要注意,上面略去了几个步骤而直接写出了频域表示,这也是同学们有时会感到困惑的地方,因为他们容易忘记相量形式不等于时域电压。事实上,相量形式只是将相应的虚部加到时域函数 $v(t)$ 得到的复量的简洁形式。

练习

10.6 将下面关于时间的函数转化为相量形式:(a) $-5 \sin(580t - 110^\circ)$; (b) $3 \cos 600t - 5 \sin(600t + 110^\circ)$; (c) $8 \cos(4t - 30^\circ) + 4 \sin(4t - 100^\circ)$ 。提示:首先将函数表示成带有幅度的单个余弦函数。

答案: $5 \angle -20^\circ$; $2.41 \angle -134.8^\circ$; $4.46 \angle -47.9^\circ$

从频域变到时域的过程是以上过程的逆过程,例如,对于相量电压:

$$\mathbf{V} = 115 \angle -45^\circ \text{ V}$$

如果已知 $\omega = 500$ rad/s,那么可以直接写出与之等效的时域形式为:

$$v(t) = 115 \cos(500t - 45^\circ) \text{ V}$$

如果需要写出正弦的形式, $v(t)$ 还可以写成:

$$v(t) = 115 \sin(500t + 45^\circ) \text{ V}$$

练习

10.7 已知 $\omega = 2000$ rad/s 和 $t = 1$ ms,求下面以各相量形式给出的电流的瞬时值:
(a) $j10$ A; (b) $20 + j10$ A; (c) $20 + j(10 \angle 20^\circ)$ A。

答案: -9.09 A; -17.42 A; -15.44 A

10.6 R, L, C 的相量关系

采用相量的方法进行电路分析的最大优越性在于可以将电感和电容的电压 - 电流关系表

示成代数关系,正如前面对于电阻进行的处理那样。现在,已经知道了如何将时域表示转化成频域表示,或者相反,这样,通过分别对三种无源元件建立相量电压与相量电流的关系,就可以简化正弦稳态的分析过程。

10.6.1 电阻

电阻是最容易处理的情形。如图 10.12(a)所示,在时域中,电阻的定义式为:

$$v(t) = Ri(t)$$

现在,接入复电压:

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (10.16)$$

并假定复电流响应为:

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (10.17)$$

所以:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = RI_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

两边除以 $e^{j\omega t}$,得到:

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

或者写成极坐标的形式:

$$V_m \angle \theta = RI_m \angle \phi$$

这里的 $V_m \angle \theta$ 和 $I_m \angle \phi$ 表示一般形式的相量电压 \mathbf{V} 和相量电流 \mathbf{I} ,即:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (10.18)$$

欧姆定律在时域和频域均正确,换句话说,电阻两端的电压总是等于电阻乘以流过它的电流。

可以看到,电阻的相量形式的电压-电流关系与其时域电压-电流关系具有相同的形式。相量形式的定义方程如图 10.12(b)所示。电压的相角 θ 等于电流的相角 ϕ ,因此电流和电压总是同相。

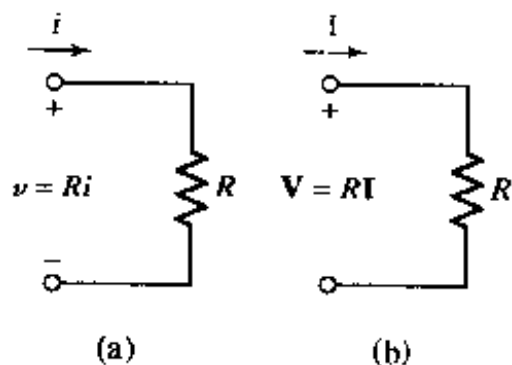


图 10.12 电阻及其电压-电流关系:(a)在时域, $v = Ri$; (b)在频域, $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$

下面来看将 $8 \cos(100t - 50^\circ)$ V 的电压接到 4Ω 电阻两端的例子,在这个例子中,分别采用了时域和频域关系进行求解。在时域,电阻电流为:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2 \cos(100t - 50^\circ) \text{ A}$$

电阻电压的相量形式为: $8 \angle -50^\circ \text{ V}$, 于是相量电流为:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 2 \angle -50^\circ \text{ A}$$

如果将这个结果转换到时域, 可以得到相同的时域电流表达式。于是可以得到结论, 对于电阻电路, 在频域进行分析并不比在时域简单。

10.6.2 电感

下面来考虑电感。相应的时域网络如图 10.13(a)所示, 在时域中, 电感的定义式为:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (10.19)$$

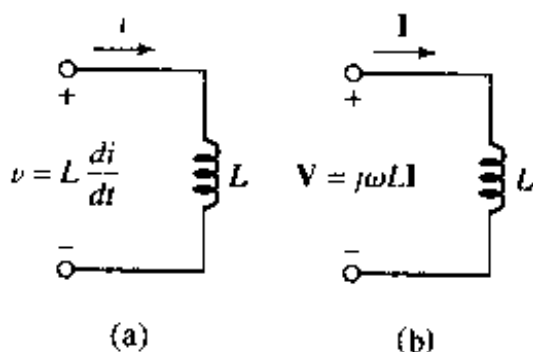


图 10.13 电感及其电压 - 电流关系: (a) 在时域, $v = L di/dt$; (b) 在频域, $V = j\omega LI$

将复电压方程(10.16)和复电流方程(10.17)代入式(10.19), 得到:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = L \frac{d}{dt} I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

求出上式中的导数, 得到:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

方程两边除以 $e^{j\omega t}$, 有:

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

就得到了需要求出的相量关系:

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (10.20)$$

可以看到, 时域微分方程(10.19)简化成了频域代数方程(10.20)。电感的相量关系式如图 10.13(b)所示。注意到, 因式 $j\omega L$ 的相角为 $+90^\circ$, 于是电感的相量电流 \mathbf{I} 比相量电压 \mathbf{V} 滞后 90° 。

例题 10.4 已知 $\omega = 100 \text{ rad/s}$, 将电压 $8 \angle -50^\circ \text{ V}$ 加到 4 H 电感的两端, 求相量电流和时域电流
利用前面得到的电感的相量电压 - 电流关系, 有:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{8 \angle -50^\circ}{j100 \times 4} = -j0.02 \angle -50^\circ = (1 \angle -90^\circ) \times (0.02 \angle -50^\circ)$$

即

$$\mathbf{I} = 0.02 \angle -140^\circ \text{ A}$$

如果将电流表示为时域形式, 可以得到:

$$i(t) = 0.02 \cos(100t - 140^\circ) \text{ A} = 200 \cos(100t - 140^\circ) \text{ mA}$$

10.6.3 电容

最后来考察电容。电容的时域电流 - 电压关系为：

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

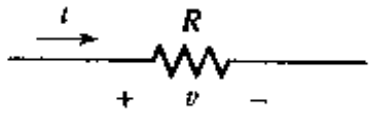
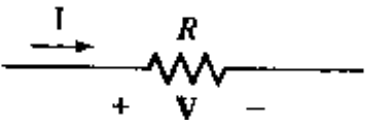
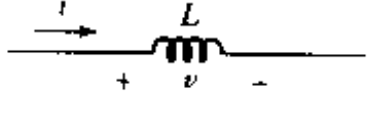

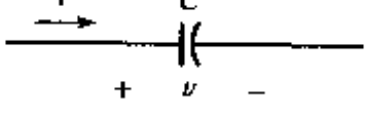
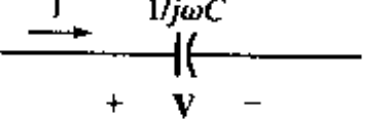
与前面类似, 首先将 $v(t)$ 和 $i(t)$ 替换为式(10.15)和式(10.16)所示的复量, 求出式中的导数, 然后去掉因子 $e^{j\omega t}$, 就得到了电容的相量电压 \mathbf{V} 和相量电流 \mathbf{I} 的关系:

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (10.21)$$

从上式可知, 对于电容, \mathbf{I} 比 \mathbf{V} 超前 90° , 不过需要注意的是, 这并不是指电流响应在产生它的电压后 $1/4$ 周期才出现!

图 10.14(a)和图 10.14(b)同时画出了电容的时域和频域表示。到现在为止, 就得到了三个元件的 \mathbf{V} - \mathbf{I} 关系式, 表 10.1 总结了前面得到的这些结果。为了便于比较, 分别将三个元件的时域表示和频域表示放在了相邻的两栏中。所有的相量方程均为代数方程, 而且是线性的。这些电感和电容方程与电阻中的欧姆定律很相似, 事实上, 可以像使用欧姆定律那样使用它们。

表 10.1 时域形式和频域形式的电压 - 电流表达式的比较

| 时 域 | | 频 域 | |
|---|----------------------------|---|---|
|  | $v = Ri$ | $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ |  |
|  | $v = L \frac{di}{dt}$ | $\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$ |  |
|  | $v = \frac{1}{C} \int idt$ | $\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}$ |  |

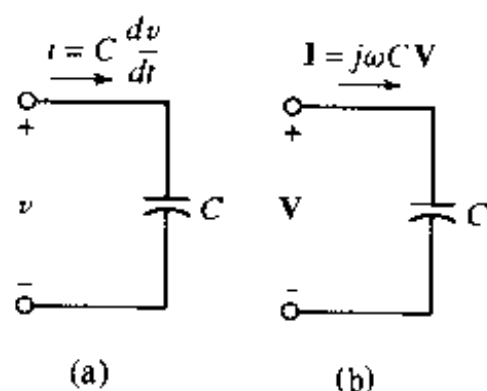


图 10.14 (a)电容电压 - 电流关系的时域形式;(b)频域形式

10.6.4 基尔霍夫定律的相量形式

时域形式的基尔霍夫电压定律为:

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_N(t) = 0$$

现在,运用欧拉公式,将每个实电压均替换成实部等于这个实电压的复电压,然后去掉因子 $e^{j\omega t}$,得到:

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n = 0$$

从中可知,基尔霍夫电压定律的相量形式和其时域形式相同。采用类似的推导可知,基尔霍夫电流定律的相量形式也与其时域形式相同。

下面来考虑前面已经多次讨论过的串联 RL 电路,如图 10.15 所示,图中已标出了相量电流和相量电压。下面通过求出相量电流来得到需要求出的时域电流响应。根据基尔霍夫电压定律的相量形式,有:

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s$$

利用前面得到各元件的 \mathbf{V} - \mathbf{I} 关系式,有:

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

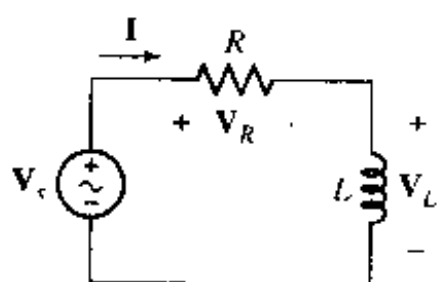


图 10.15 具有相量电压的 RL 串联电路

于是得到相量电流的表达式,以电源 \mathbf{V}_s 表示:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L}$$

假定电源电压的幅度为 V_m ,相角为 0° ,那么可以得到相量电流为:

$$\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

将相量电流写成下面的极坐标形式:

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (-\tan^{-1}(\omega L/R))$$

然后采用已熟悉的步骤就可以求出其时域表达式,而在本章的开始,曾费了很大功夫才得到了这个表达式。

练习

- 10.8 如图 10.16 所示电路, $\omega = 1200 \text{ rad/s}$, $\mathbf{I}_C = 1.2 \angle 2.8^\circ \text{ A}$, $\mathbf{I}_L = 3 \angle 53^\circ$ 。求 (a) \mathbf{I}_s ; (b) \mathbf{V}_s ; (c) $i_R(t)$ 。

答案: $2.33 \angle -31.0^\circ \text{ A}$; $34.9 \angle 74.5^\circ \text{ V}$; $3.99 \cos(1200t + 17.42^\circ) \text{ A}$

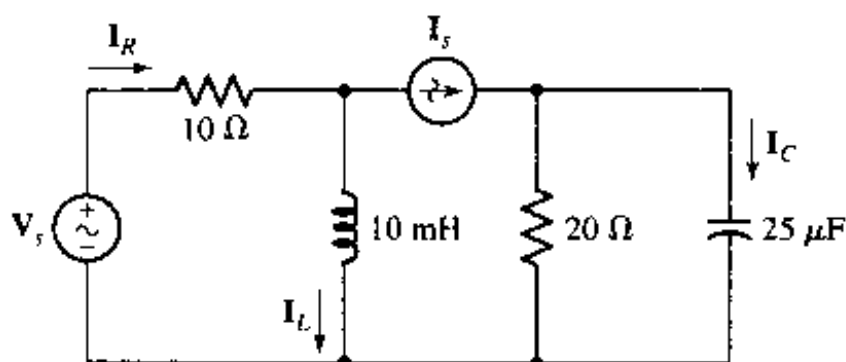


图 10.16

10.7 阻抗

前面已经得到三种元件在频域中的电流 - 电压关系为(假定遵循无源符号规则):

$$V = RI \quad V = j\omega LI \quad V = \frac{I}{j\omega C}$$

如果将这些方程写成相量电压除以相量电流的比值的形式,即:

$$\frac{V}{I} = R \quad \frac{V}{I} = j\omega L \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

可以看到,这些比值取决于元件的大小(对于电感和电容,还与频率有关),除了它们是复量,其运算必须符合复数的运算外,后面将把这些值与电阻同等对待。

定义相量电压对相量电流的比值为阻抗,用符号 Z 表示,阻抗具有欧姆的量纲。需要注意,阻抗不是相量,所以不能通过将它乘以 e^{st} ,再取实部来将其转化到时域。对于电感,在时域中的大小用 L 来表示,在频域中则用阻抗 $j\omega L$ 来表示。类似地,对于电容,在时域中的大小用 C 来表示,在频域中则用阻抗 $1/j\omega C$ 来表示。阻抗是频域量,不是时域中的概念。

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

10.7.1 阻抗的串联组合

因为在频域中基尔霍夫定律仍然适用,所以对于阻抗,可以采用前面已经对电阻建立的相同的规则进行串联组合。例如,在 $\omega = 10 \times 10^3 \text{ rad/s}$ 时,5 mH 电感与 $100 \mu\text{F}$ 电容的串联组合可以替换为单个阻抗,其阻抗等于电感与电容的阻抗之和。电感的阻抗为:

$$Z_L = j\omega L = j50 \Omega$$

电容的阻抗为:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1 \Omega$$

于是串联组合的阻抗为:

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = j50 - j1 = j49 \Omega$$

注意到, $1/j = -j$ 。

电感和电容的阻抗是频率的函数, 因此得到的串联组合的等效阻抗只有在给定的频率上才有意义, 对于本例, $\omega = 10\,000 \text{ rad/s}$ 。如果改变频率, 例如取 $\omega = 5\,000 \text{ rad/s}$, 则得到 $\mathbf{Z}_{\text{eq}} = j23 \Omega$ 。

10.7.2 阻抗的并联组合

计算 $\omega = 10\,000 \text{ rad/s}$ 时 5 mH 电感与 $100 \mu\text{F}$ 电容的并联组合的阻抗与计算并联电阻的方法完全一样:

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{(j50) \times (-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020 \Omega$$

而当 $\omega = 5\,000 \text{ rad/s}$ 时, 可以计算出并联组合的等效阻抗为 $-j2.17 \Omega$ 。

阻抗的复数或复量形式也可以表示成极坐标或者直角坐标的形式。例如, 对于直角坐标形式的阻抗 $50 - j86.6 \Omega$, 可以说成具有 50Ω 的电阻和具有 -86.6Ω 的电抗。电阻部分为阻抗的实部, 电抗部分是阻抗的虚部, 包括符号, 但不包括虚数运算符 j 。该阻抗的极坐标形式为 $\mathbf{Z} = 100 \angle -60^\circ \Omega$, 表示阻抗的幅度为 100Ω , 相角为 -60° 。

例题 10.5 求图 10.17(a) 所示网络的等效阻抗, 已知电路工作频率为 5 rad/s

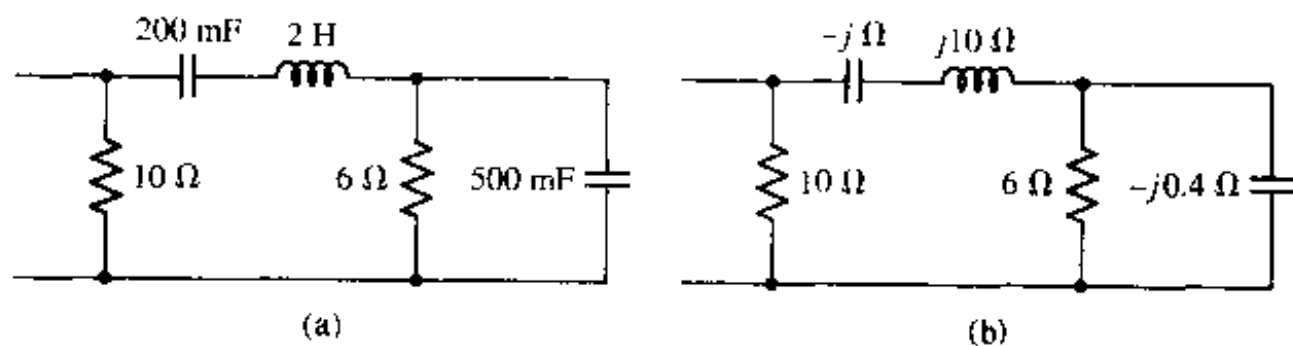


图 10.17 (a) 需要将该网络替换为与之等效的单个网络; (b) 将各元件替换为其在 $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 时的阻抗后的电路

首先, 将电阻、电容和电感均替换成相应的阻抗, 如图 10.17(b) 所示。

分析替换后的网络, 可以看到 6Ω 阻抗与 $-j0.4 \Omega$ 阻抗并联, 其等效阻抗为:

$$\frac{(6) \times (-j0.4)}{6 - j0.4} = 0.02655 - j0.3982 \Omega$$

然后, 它再与 $-j \Omega$ 和 $j10 \Omega$ 阻抗串联, 得到:

$$0.02655 - j0.3982 - j + j10 = 0.02655 + j8.602 \Omega$$

最后, 得到的这个阻抗再与 10Ω 电阻并联, 所以得到该网络的等效阻抗为:

$$10 \parallel (0.02655 + j8.602) = \frac{10 \times (0.02655 + j8.602)}{10 + 0.02655 + j8.602} = 4.255 + j4.929 \Omega$$

或者, 可以将它表示成极坐标的形式: $6.511 \angle 49.20^\circ \Omega$ 。

练习

10.9 参看图 10.18 所示电路, 求以下各端之间的阻抗 \mathbf{Z}_{in} (a) a 和 g ; (b) b 和 g ; (c) a 和 b 。

答案: $2.81 + j4.49 \Omega$; $1.798 - j1.124 \Omega$; $0.1124 - j3.82 \Omega$

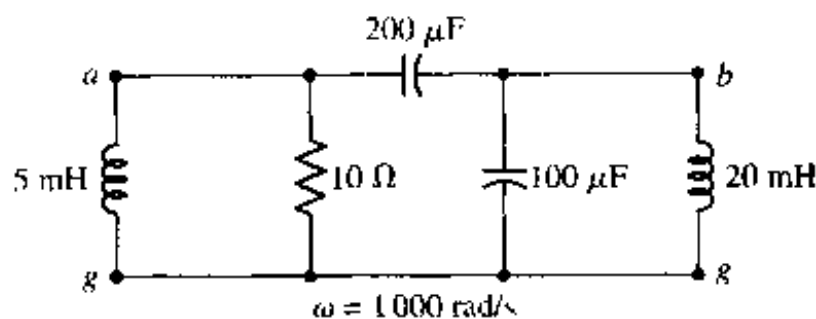


图 10.18

需要强调的是,阻抗中的电阻部分不一定等于网络中所出现的电阻的阻值。例如, 10Ω 电阻与 5 H 电感在 $\omega = 4 \text{ rad/s}$ 时的等效阻抗为 $Z = 10 + j20 \Omega$, 或者表示成极坐标的形式 $22.4 \angle 63.4^\circ \Omega$ 。这时,阻抗的电阻部分确实等于网络中电阻的阻值,不过这是因为这个网络是一个简单的串联网络,如果将这两个元件换成并联连接,则其等效阻抗为 $10 \times (j20)/(10 + j20) \Omega$, 即 $8 + j4 \Omega$, 这时阻抗的电阻部分为 8Ω , 不等于网络中电阻的阻值。

对于阻抗的幅度和相角,没有规定特定的符号表示。一般的阻抗的极坐标形式为:

$$Z = |Z| \angle \theta$$

对于直角坐标形式,阻抗的电阻部分用 R 来表示,电抗部分用 X 来表示,即:

$$Z = R + jX$$

下面来看如何应用阻抗的概念来分析 RLC 电路。

例题 10.6 如图 10.19(a)所示电路,求 $i(t)$

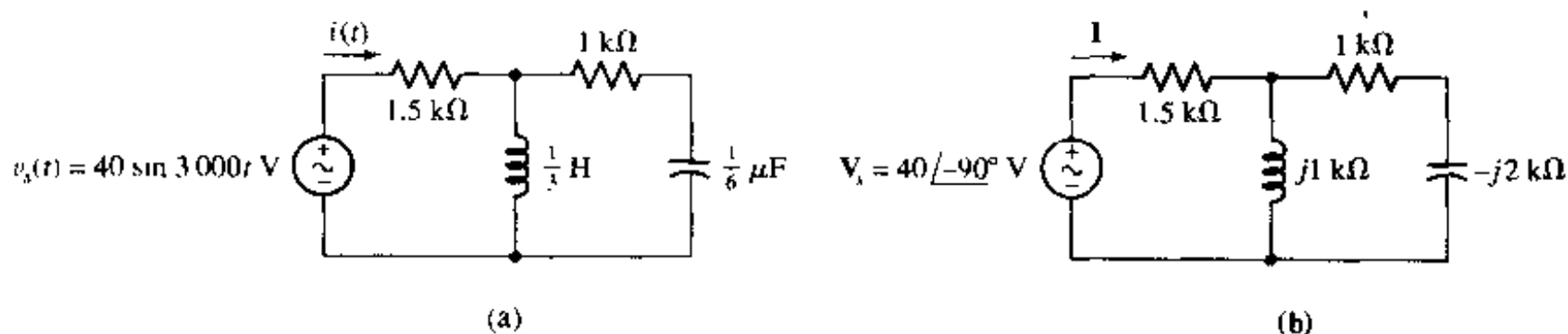


图 10.19 (a)求电路的正弦稳态响应 $i(t)$; (b)电路的频域等效电路,其中 $\omega = 3000 \text{ rad/s}$

● 弄清问题的目标:

需要求出的是由工作在 3000 rad/s 下的电压源产生的流过 $1.5 \text{ k}\Omega$ 电阻上的正弦稳态电流。

● 收集已知信息:

首先,画出频域电路。转换到频域后,电压源用 $40 \angle -90^\circ$ 表示,频域响应表示为 I ,且当 $\omega = 3000 \text{ rad/s}$ 时,电感和电容的阻抗分别为 $j1 \text{ k}\Omega$ 和 $-j2 \text{ k}\Omega$ 。相应的频域电路如图 10.19(b)所示。

● 选择最适合问题的已有方法:

对于频域电路,可以采用几种方法进行分析。其中,采用网孔分析可以直接得到所求的电流,它是左边网孔的网孔电流,不过它同时得到了并不需要知道的右边网孔的网孔电流。采用节点分析法同样有效,不过当最终需要求出的是电流时,它并不是一个特别好

的选择。但是,当电流 \mathbf{I} 为电源电流时,还可以利用阻抗的概念来化简连接到电源的电路。

- 建立适当的方程组:

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq}} &= 1.5 + \frac{j(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \\ &= 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j^3}{2} \\ &= 2 + j1.5 = 2.5 \angle 36.87^\circ \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

这时,相量电流为:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{\text{eq}}}$$

- 确定是否还需其他信息:

代入已知量,得到:

$$\mathbf{I} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.87^\circ} \text{ mA}$$

根据上式以及已知条件 $\omega = 3000 \text{ rad/s}$, 就可以求出 $i(t)$ 。

- 试解:

容易将上面得到的复数表达式化简为单个复数的极坐标形式:

$$\mathbf{I} = 16.00 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

将电流变换到时域,得到所求的响应为:

$$i(t) = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$

- 证实所得解是否合理和满足要求:

连接到电源的等效阻抗的相角为 $+36.87^\circ$, 这表明它具有净电感的特性, 也就是说, 电流将滞后于电压。因为电压源的相角为 -90° (已经将其转化为余弦电源), 可以看到, 这与上面的解答是一致的。

练习

10.10 对于图 10.20 所示的频域电路, 求 (a) \mathbf{I}_1 ; (b) \mathbf{I}_2 ; (c) \mathbf{I}_3 。

答案: $28.3 \angle 45^\circ \text{ A}$; $20 \angle 90^\circ \text{ A}$; $20 \angle 0^\circ \text{ A}$

需要特别注意的是, 在列出时域或者频域关系式时, 要避免列出部分在时域, 部分在频域的等式。当等式中同时包含复数和时间 t 时 (除因式 $e^{j\omega t}$ 外), 就出现了这种错误。另外, $e^{j\omega t}$ 通常是在数学推导中而不是实际应用中出现, 因此如果看到一个式子同时包含 j 和 t , 或者 \angle 和 t , 那么基本上就可以认为这个式子是错误的。

例如, 前面的等式:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{\text{eq}}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

是正确的, 但不要列出类似下面的式子:

$$i(t) \approx \frac{40 \sin 3000t}{2.5 / 36.9^\circ} \quad \text{或} \quad i(t) \approx \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

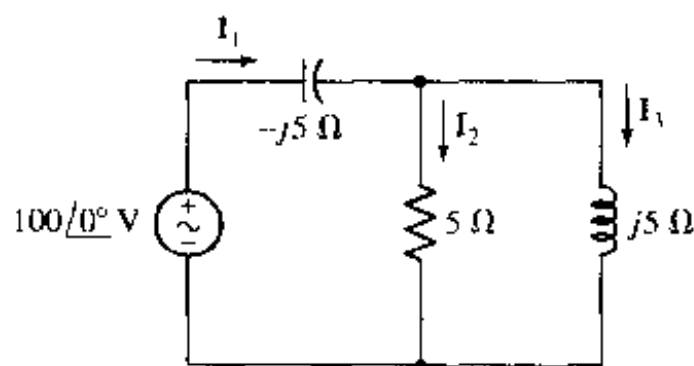


图 10.20

10.8 导纳

有时,使用阻抗的倒数更为方便些,于是,定义电路元件的导纳为其相量电流对相量电压的比值(假定遵循无源符号规则):

$$Y = \frac{I}{V}$$

因此:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

导纳的实部称为电导 G ,虚部称为电纳 B ,因此:

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (10.22)$$

对式(10.22)需要仔细观察,它并不表明导纳的实部等于阻抗实部的倒数,或者导纳的虚部等于阻抗虚部的倒数!

导纳、电导和电纳的单位均为西门子(S)。对于阻抗:

$$Z = 1 - j2 \Omega$$

可以表示为 $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$ 时 1Ω 电阻和 $0.1 \mu\text{F}$ 电容的串联,这个串联组合具有的导纳为:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2} \frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4 \text{ S}$$

由几个支路并联组成的网络的导纳为各单个支路导纳的和,于是上面的导纳可以由 0.2 S 电导和 0.4 S 电纳并联得到。前者表示 5Ω 电阻;因为电容的导纳为 $j\omega C$,所以后者表示工作在 $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$ 下的 $0.08 \mu\text{F}$ 电容。作为验算,可以计算最后得到的 5Ω 电阻与 $0.08 \mu\text{F}$ 电容并联的网络在 $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$ 下等效阻抗为:

$$Z = \frac{5 \times (1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5 \times (-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2 \Omega$$

和前面给出的阻抗一致。给定阻抗和导纳以及工作频率,存在无穷多个网络与之对应,以上只是给出两种可能的网络。不过它们均为只包含两个元件的网络,所以可以分别将它们看做是

在 $\omega = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ 时阻抗为 $1 - j2 \Omega$ 和导纳为 $0.2 + j0.4 \text{ S}$ 的两个最简单的网络。

阻纳(immittance)这个词是阻抗(impedance)和导纳(admittance)这两个词的组合,有的时候用它来作为阻抗和导纳的通用词。例如,已知一个阻纳两端的相量电压,那么显然可以计算出流过该阻纳的电流。

练习

- 10.11 求出下面各导纳的值,以直角坐标形式表示:(a)阻抗 $Z = 1000 + j400 \Omega$; (b)由 800Ω 电阻, 1 mH 电感和 2 nF 电容组成的并联网络,已知 $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$; (c)由 800Ω 电阻, 1 mH 电感和 2 nF 电容组成的串联网络,已知 $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$ 。

答案: $0.862 - j0.345 \text{ mS}$; $1.25 + j1 \text{ mS}$; $0.899 - j0.562 \text{ mS}$

10.9 节点分析和网孔分析

在前面章节中已经看到,采用节点和网孔分析法对电路进行分析很有效,于是很自然要问,对于正弦稳态的相量和阻抗,这些方法是否还适用? 前面已经知道,对于相量,两个基尔霍夫定律仍然成立,而且,对于无源元件,成立类似欧姆定律的 $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ 。换句话说,对于相量,作为节点分析的基础这些定律仍然成立,于是,仍然可以采用节点分析法来分析正弦稳态电路。根据类似的推理可知,对于正弦稳态电路,网孔分析仍然有效,而且通常很有用。

例题 10.7 如图 10.21 所示电路,求时域电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$

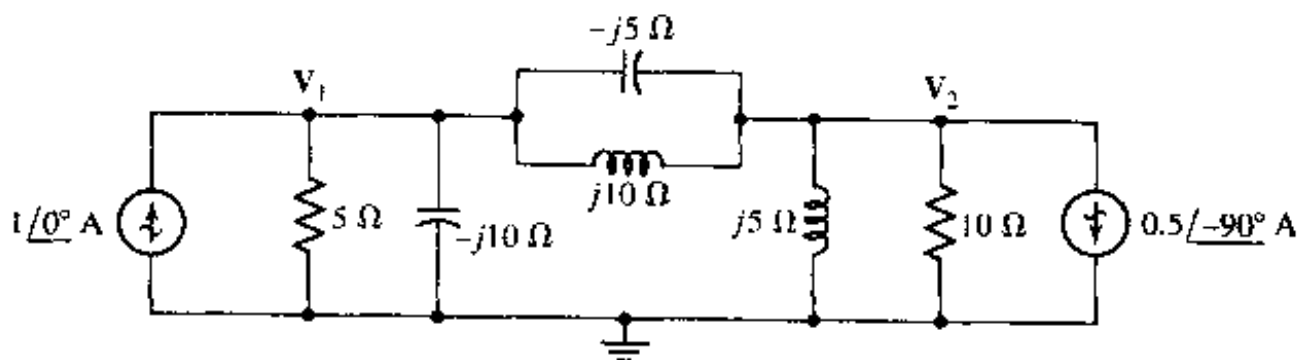


图 10.21 频域电路,其中已标出节点电压 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2

两个电流源均以相量的形式给出,并且图中已标出了相量节点电压 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 。对左边的节点应用 KCL,得到:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{j10} = 1 \angle 0^\circ = 1 + j0$$

对于右边的节点有:

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{j10} + \frac{\mathbf{V}_2}{j5} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} = -(0.5 \angle -90^\circ) = j0.5$$

合并同类项,有:

$$(0.2 + j0.2)\mathbf{V}_1 - j0.1\mathbf{V}_2 = 1$$

和:

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5$$

这两个方程用普通的计算器就可求解,得到 $V_1 = 1 - j2$ V 和 $V_2 = -2 + j4$ V。

通过先将 V_1 和 V_2 表示成极坐标形式可以得到时域解。极坐标形式为:

$$V_1 = 2.24 / -63.4^\circ \quad V_2 = 4.47 / 116.6^\circ$$

再转化到时域有:

$$v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 116.6^\circ) \text{ V}$$

要注意的是,为了计算出图中各元件对应的阻抗,需要知道 ω 的值,而且所有的电源必须工作在同一个频率下。

练习

10.12 利用节点分析方法,求图 10.22 所示电路中的 V_1 和 V_2 。

答案: $1.062 / 23.3^\circ$ V; $1.593 / -50.0^\circ$ V。

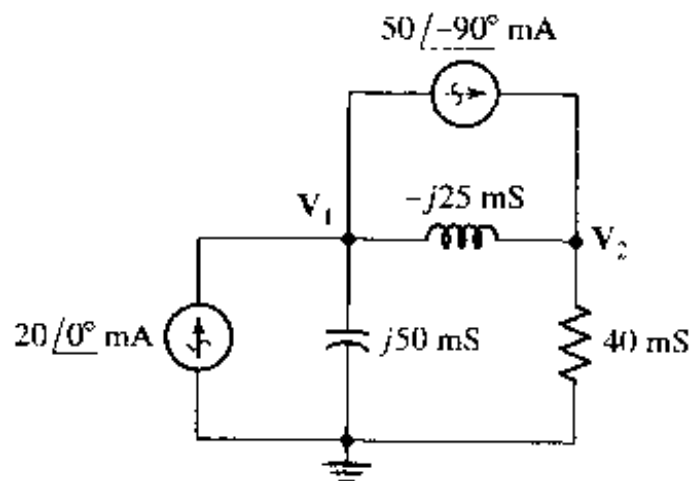


图 10.22

下面来看一个网孔分析的例子。再次强调,所有的电源必须工作在同一个频率下,否则对电路中的任何电抗均不能定义其值。在下一节将看到,解决这个困难的惟一途径是采用叠加原理。

例题 10.8 如图 10.23(a)所示电路,求 i_1 和 i_2 的时域表达式

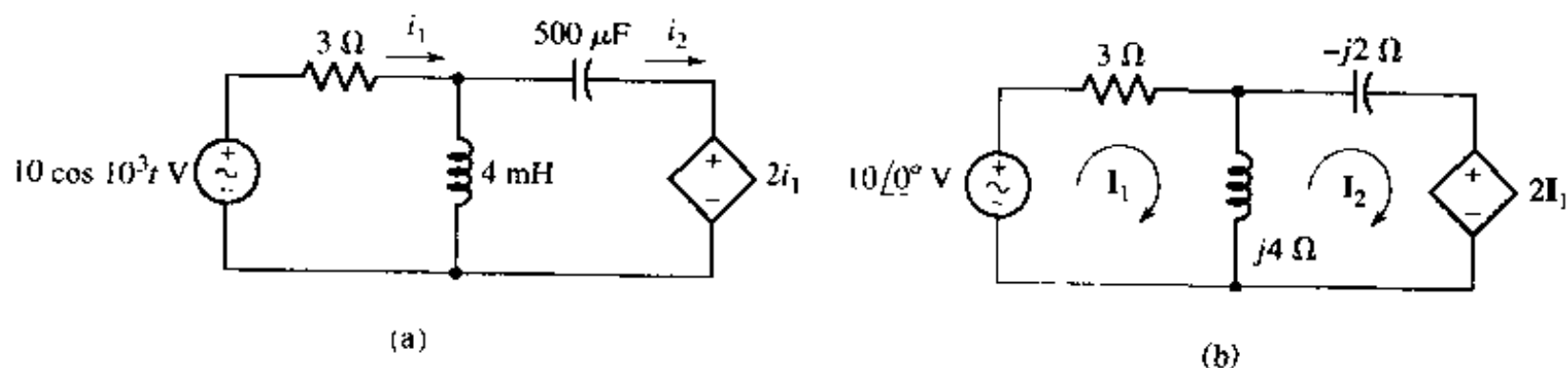


图 10.23 (a)含有一个受控源的时域电路;(b)其频域电路

注意到,对于左边的电源 $\omega = 10^3$ rad/s,于是画出其频域电路如图 10.23(b)所示,并设两个网孔电流为 I_1 和 I_2 。沿网孔 1 写出网孔方程:

$$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10 \angle 0^\circ$$

或

$$(3 + j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10$$

对网孔 2, 则有:

$$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

或

$$(2 - j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

联立求解得:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24 \angle 29.7^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77 \angle 56.3^\circ \text{ A}$$

因此:

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

练习

10.13 利用网孔分析方法, 求图 10.24 所示电路的 \mathbf{I}_1 和 \mathbf{I}_2 。

答案: $4.87 \angle -164.6^\circ \text{ A}$; $7.17 \angle -144.9^\circ \text{ A}$

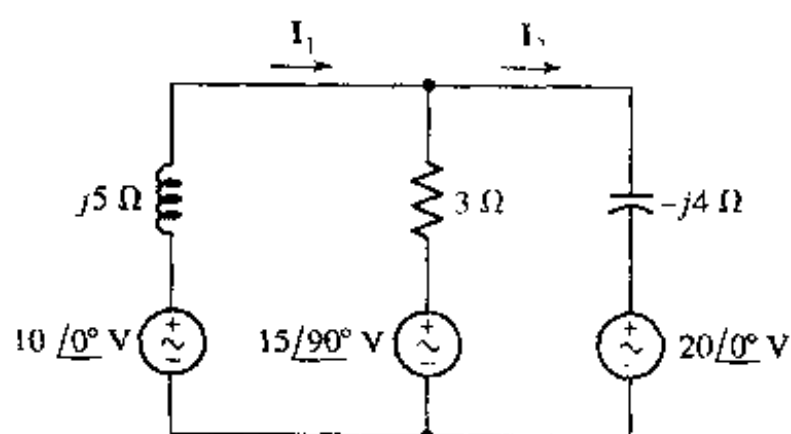


图 10.24

实际应用

晶体管放大器的截止频率

基于晶体管的放大电路是许多现代电子设备的组成部分。常见的一个应用是蜂窝电话, 其中语音信号被叠加到高频载波上。但是, 晶体管内部固有的电容限制了它们可以应用的频率范围, 当将晶体管用于特定的应用时, 必须考虑到这一点。