

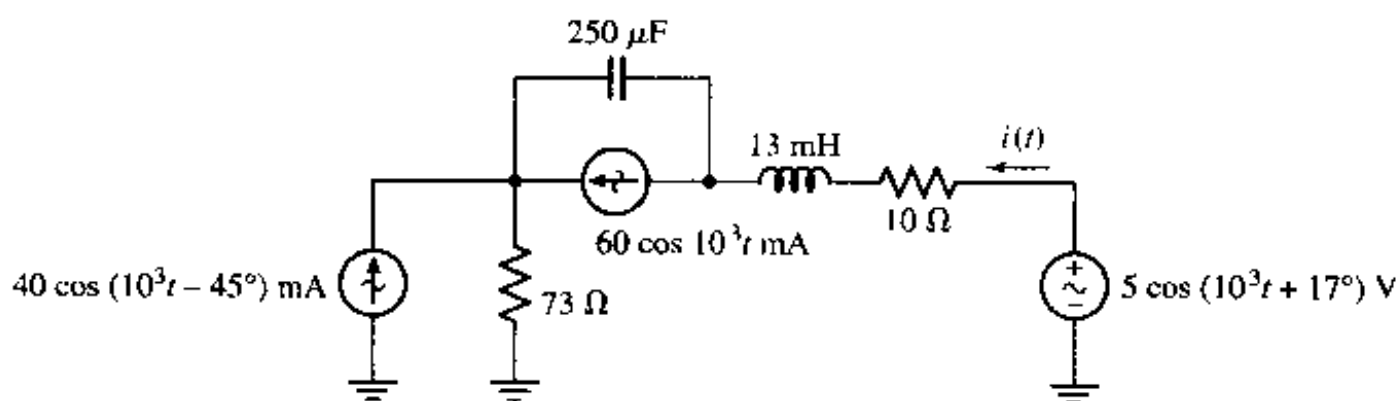


图 10.79

75. 使用一个电阻,一个电容,一个正弦电压源,利用分压关系,设计一个可以滤掉高频的电路(提示:将两个无源元件中的一个电压定义为输出电压,将正弦电压源看做输入。这里的“滤掉”理解为输出电压减小)。
76. 使用一个电阻,一个电容,一个正弦电压源,利用分压关系,设计一个可以滤掉低频的电路(提示:将两个无源元件中的一个电压定义为输出电压,将正弦电压源看做输入。这里的“滤掉”理解为输出电压减小)。
77. (a)将图 10.81 中的电路简化为简单串联 RC 电路;(b)导出电压比 V_{out}/V_s 随频率变化的函数关系;(c)在频率范围 100 Hz 到 1 MHz 内画出该函数的曲线,并将它与用 PSpice 对原电路仿真得到的曲线相比较。

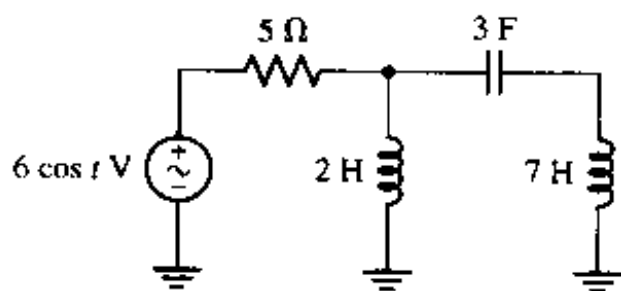


图 10.80

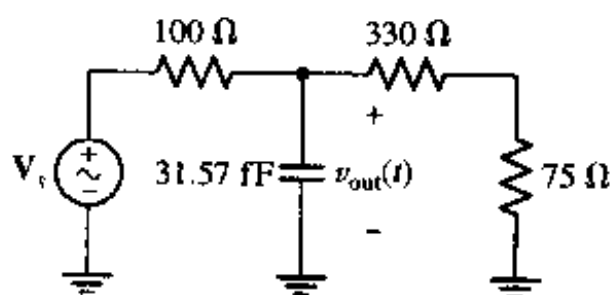


图 10.81

78. 参看图 10.25(b);(a)验证运放电路的最大电压增益为 $-g_m(R_C || R_L)$;(b)如果 $R_S = 100 \Omega$, $R_L = 8 \Omega$, R_C 的最大值为 $10 \text{ k}\Omega$, $r_{\pi}g_m = 300$,所有其他的参数均可以改变,问如何修改设计以提高增益?(c)修改后的设计对放大器的截止频率影响如何?如何补偿?
79. 利用叠加原理,求出图 10.82 所示电路中的电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 。

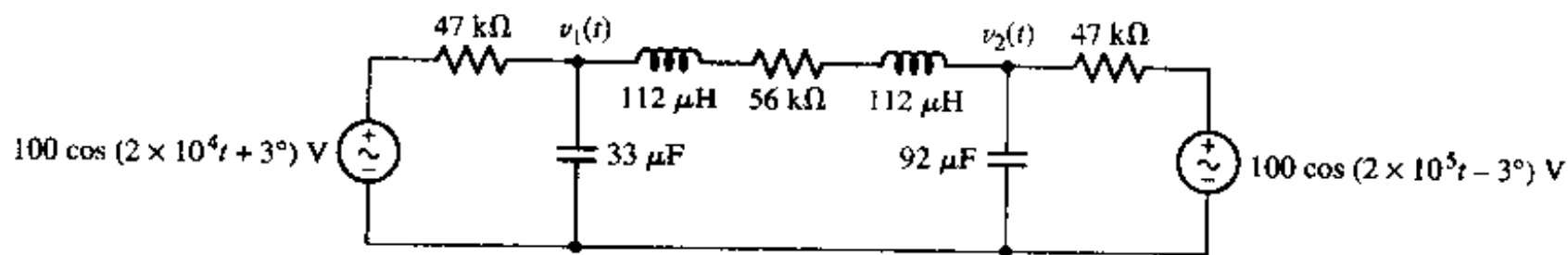


图 10.82

80. 利用叠加原理,求出图 10.83 所示电路中的电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 。
81. (a)计算图 10.84 所示电路中的 I_L, I_R, I_C, V_L, V_R 和 V_C (加上 V_s);(b)设标度分别为 1 英

寸^① 50 V 和 1 英寸 25 A, 在相量图中画出所有的 7 个量, 并说明 $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$ 和 $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$ 。

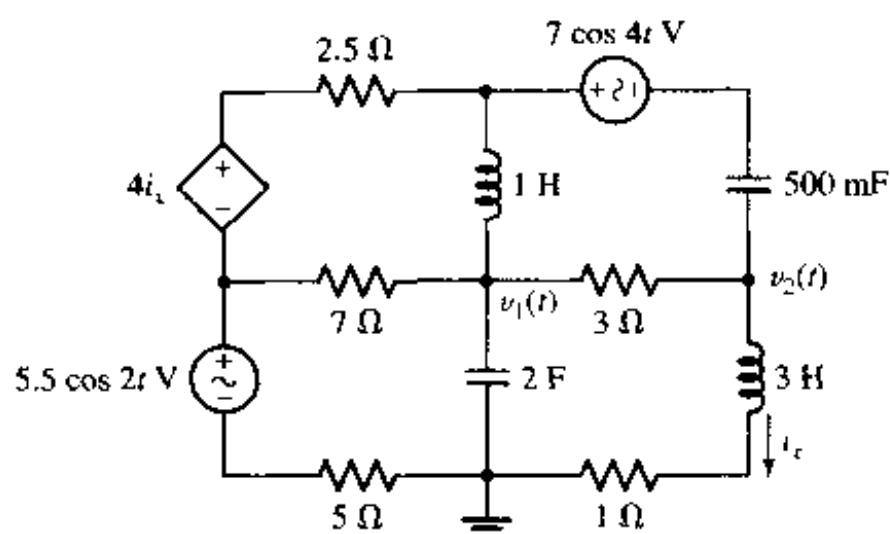


图 10.83

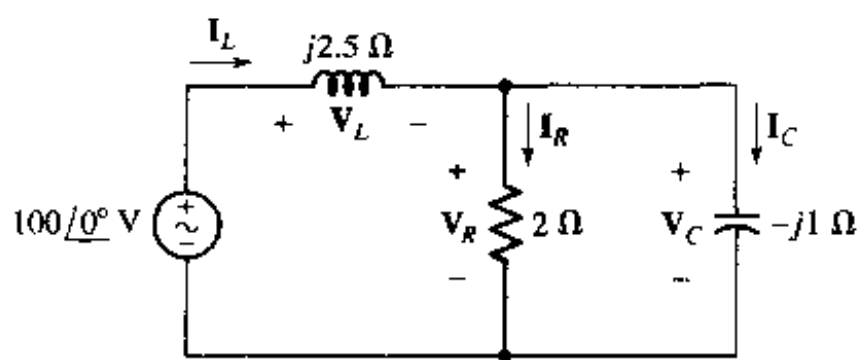


图 10.84

82. 图 10.85 所示电路中, 求 (a) $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 的值; (b) 在相量图中画出它们 (使用标度 50 V/英寸和 25 A/英寸即可); (c) 用图解法求出 $\mathbf{I}_5$, 给出它的幅度和相角。
83. 如图 10.86 所示电路, 已知 $|\mathbf{I}_1| = 5 \text{ A}$ 和 $|\mathbf{I}_2| = 7 \text{ A}$, 使用圆规、直尺、划线板和量角器等工具。求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 。

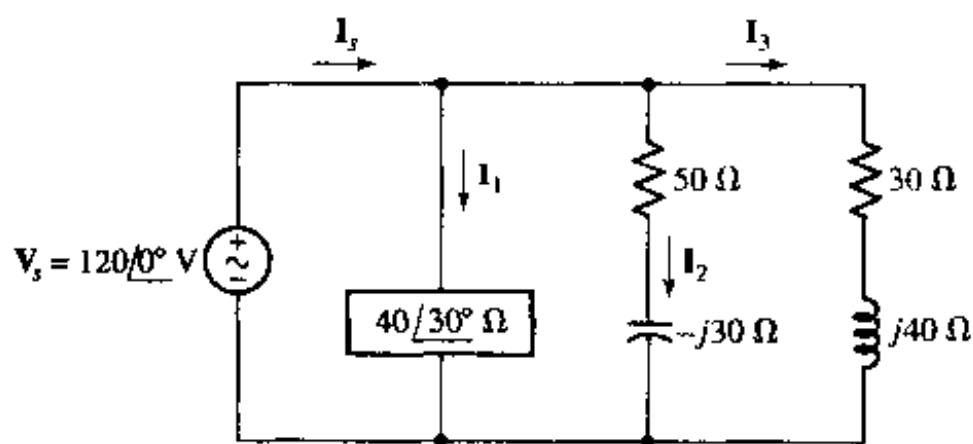


图 10.85

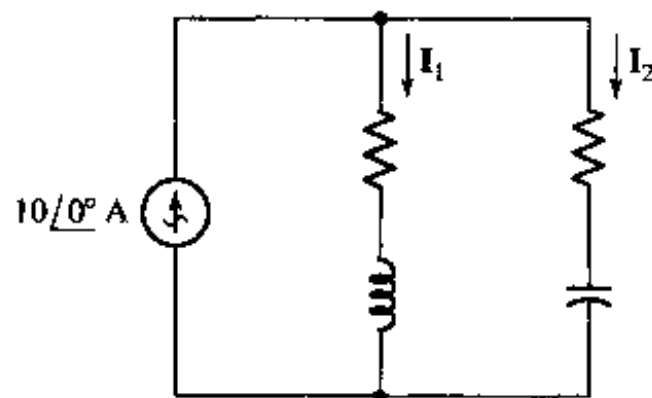


图 10.86

84. 设 $\mathbf{V}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $|\mathbf{V}_2| = 140 \text{ V}$ 和 $|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2| = 120 \text{ V}$, 使用图解法求出 $\mathbf{V}_2$ 的相角的两个可能值。

① 1 英寸 = 2.54 cm ——编者注。

第 11 章 交流电路的功率分析

本章要点:

- 提供给元件的瞬时功率
- 正弦电源提供的平均功率
- 时变波形的方均根值
- 利用复功率确定平均功率和无功功率
- 确定给定负载的功率因数及它的改进方法

11.1 引言

首先考虑瞬时功率,瞬时功率是与元件或网络相关联的时变电压和时变电流的乘积。瞬时功率本身有时是相当有用的,因为必须限制它的最大值,以免超过实际器件的安全或有效工作范围。例如晶体管和真空管功率放大器,当峰值功率超过一定值时都会引起输出失真。但是关心瞬时功率主要是因为它提供了计算更重要的平均功率的方法。类似地,跨越乡村道路旅行的进展情况最好用平均速度来描述,对于瞬时速度的兴趣,只是为了避免最大速度超过安全范围,或招来高速公路巡逻警察。

在实际问题中涉及的平均功率从小到低于 1 皮瓦的遥感勘测信号,到高保真立体音响输出到喇叭的几瓦声音功率,再到早上咖啡壶工作所需的几百瓦功率,甚至到大峡谷水电站所产生的 100 亿瓦的电力。

11.2 瞬时功率

提供给任何元件的瞬时功率是元件上的瞬时电压和流过元件的瞬时电流之乘积(假定符合无源符号规则)。所以:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (11.1)$$

如果所讨论的元件是阻值为 R 的电阻,那么功率可由电流和电压单独表示:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \quad (11.2)$$

如果与元件相关的电压或电流呈完全电感性,那么:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v(t) \int_{-\infty}^t v(t') dt' \quad (11.3)$$

其中假定在 $t = -\infty$ 时电压为零。对于电容的情况:

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \int_{-\infty}^t i(t') dt' \quad (11.4)$$

其中对电流也有类似假定。当开始考虑更一般的网络时,以上列出的仅含电流或仅含电压的

功率表达式,就显得笨拙了。这些公式也是很不必要的,因为在网络端口需要找到的仅仅是电流和电压。例如考虑图 11.1 中的 RL 串联电路,激励源为阶跃电压源。熟悉的电流响应为:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

那么电源提供的功率或无源网络吸收的功率为:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

因为单位阶跃函数的平方是函数本身。

提供给电阻的功率是:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$$

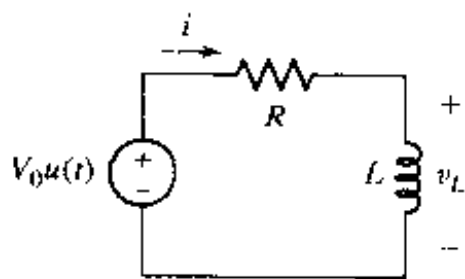


图 11.1 提供给 R 的功率为 $P_R(t) = i^2(t)R = (V_0^2/R)(1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$

为了确定电感所吸收的功率,首先求电感上的电压:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) + \frac{LV_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \frac{du(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) \end{aligned}$$

因为对于 $t > 0$, $du(t)/dt$ 为零,并且当 $t = 0$ 时, $(1 - e^{-Rt/L})$ 也为零,因此电感吸收的功率为:

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-Rt/L} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

只需几步代数运算就可得出:

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

上式用于检查结论的准确与否;结果画在图 11.2 中。

11.2.1 正弦激励下的功率

将图 11.1 中的电压源换成正弦电压源 $V_m \cos \omega t$ 。熟悉的时域响应为:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

其中:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{和} \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

因此在正弦稳态下提供给整个电路的瞬时功率为:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos \omega t$$

利用两个正弦函数相乘的三角恒等式,可将上式重写如下:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \phi) \end{aligned}$$

最后的式子具有几个特点,对一般的正弦稳态电路都有效。式中第一项,不是时间函数;第二项,是周期变量,其周期为外加频率两倍对应的周期。因为这项是余弦波,正弦波和余弦波的均值为零(整数个周期内的平均),这个例子提示,平均功率是 $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$,情况确实如此。

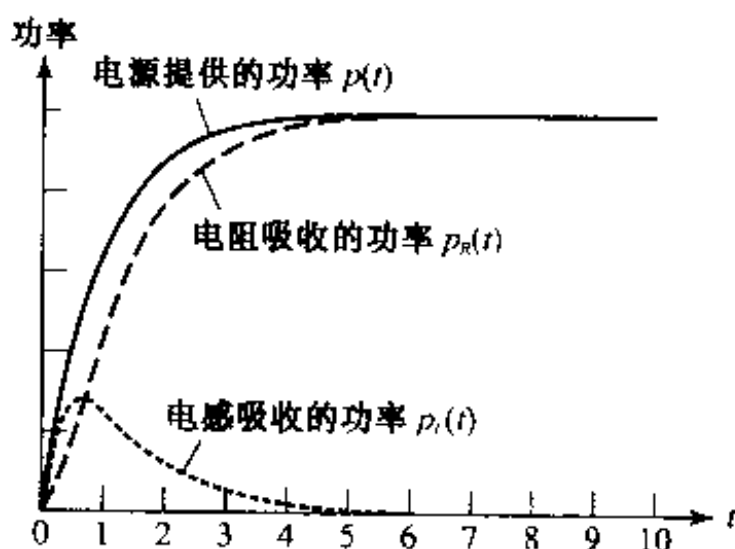


图 11.2 $p(t)$ 、 $p_R(t)$ 和 $p_L(t)$ 的波形。当瞬态过程结束后,电路回到稳态工作。因为留在电路中的惟一电源是直流源,电感最终表现为一个短接电路,吸收功率为零

例题 11.1 $40 + 60u(t)$ V 电压源, $5 \mu\text{F}$ 电容及 200Ω 电阻相串联。求 $t = 1.2 \text{ ms}$ 时电容以及电阻所吸收的功率

在 $t = 0$ 之前, 40 V 直流电压加在串联的电容和电阻上,因为没有电流, $v_C(0^-) = 40 \text{ V}$ 。在 $t = 0^+$, 加在串联电路上的电压增加到 100 V 。电容上的电压不能瞬时改变,所以 $t = 0^+$ 时电阻上的电压必定为 60 V 。因此 $t = 0^+$ 时流经电阻(也就是流经串联电路)的电流为 $60/200 = 300 \text{ mA}$ 。

$t > 0$ 时的电流为:

$$i(t) = 300e^{-t/\tau} \text{ mA}$$

其中 $\tau = RC = 1 \text{ ms}$ 。这样, $t = 1.2 \text{ ms}$ 时电流为 90.36 mA , 此时电阻吸收的功率为 $i^2(t)R = 1.633 \text{ W}$ 。

电容吸收的瞬时功率为 $i(t)v_C(t)$, 有不只一种方法可得到电容电压的表达式。认识到 $t > 0$ 时加在两个串联元件上的电压总是 100 V , 电阻上的电压为 $60e^{-t/\tau}$, 则:

$$v_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

求得, $v_C(1.2 \text{ ms}) = 100 - 60e^{-1.2} = 81.93 \text{ V}$ 。所以 $t = 1.2 \text{ ms}$ 时电容吸收的功率为 $(90.36 \text{ mA}) \times (81.93 \text{ V}) = 7.403 \text{ W}$ 。

练习

11.1 电流源 $12 \cos 2000t \text{ A}$, 200Ω 电阻和 0.2 H 电感相串联。假定满足稳态条件。在 t

$t = 1 \text{ ms}$ 时求 (a) 电阻; (b) 电感; (c) 正弦电源所吸收的功率。

答案: 13.98 W ; -5.63 W ; -8.35 W

11.3 平均功率

当提到瞬时功率的平均值时, 必须明确定义平均过程的时间间隔。选择一般时间间隔从 t_1 到 t_2 。从 t_1 到 t_2 对 $p(t)$ 积分并除以时间间隔 $t_2 - t_1$ 。这样:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (11.5)$$

用大写字母 P 表示平均值, 因为它不是时间的函数, 所以通常不用任何下标去表示它是一个平均值。尽管 P 不是时间函数, 它却是 t_1 和 t_2 这两个确定积分间隔的变量的函数。如果 $p(t)$ 为周期函数, P 对于特定时间间隔的相关性可以用简单方式表示。下面考虑这一重要情形。

11.3.1 周期波形的平均功率

假定激励函数和电路响应都是周期性的, 不一定是正弦稳态, 但达到一个稳态条件。数学上定义周期函数 $f(t)$ 为:

$$f(t) = f(t + T) \quad (11.6)$$

其中 T 为周期。现在指出, 式 (11.6) 表示的瞬时功率平均值可以用任意起始时刻的一个周期的时间间隔去计算。

图 11.3 表示一般的周期波形, 记为 $p(t)$ 。首先计算平均功率, 从 t_1 到 t_2 做积分, t_2 比 t_1 晚一个周期, $t_2 = t_1 + T$:

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p(t) dt$$

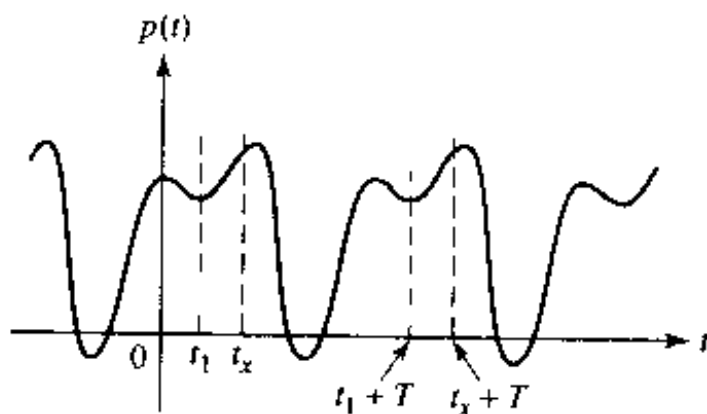


图 11.3 周期函数 $p(t)$ 的平均值 P 对于任何周期 T 都相同

然后从另一个时刻 t_x 到 $t_x + T$ 做积分:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p(t) dt$$

P_1 和 P_x 的等价性应该从间隔的图形解释中明显看出。 P_x 对应的积分面积比 P_1 的面积少一

块 t_1 到 t_x 的面积, 但比它多 $t_1 + T$ 到 $t_x + T$ 的面积。曲线的周期性质要求这两块面积相等。所以平均功率的计算可以对瞬时功率在任意一个长度等于一个周期的时间上积分, 再除以这个周期:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p dt \quad (11.7)$$

重要的一点是, 也可以在任何整数个周期上进行积分, 只要将结果除以同样整数个周期, 即

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_1}^{t_1+nT} p dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.8)$$

如果把这一概念应用到极限情况, 对全体时间积分, 就得到另一有用的结果。首先假定积分的对称条件:

$$P = \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p(t) dt$$

然后取边界 n 为无穷大:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p(t) dt$$

只要 $p(t)$ 是一个完美的数学函数, 就像所有的实际激励函数和响应那样, 显然如果用一个比 n 稍大的非整数代替大整数 n , 积分值和 P 的变化是微不足道的。而且误差随着 n 的增大而减小。因此, 不加严格证明, 用连续变量 τ 取代离散变量 nT :

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t) dt \quad (11.9)$$

可以发现在某些情况下, 它对于“无限周期”上的周期函数求积分是方便的。下面是几个使用式(11.7)、式(11.8)和式(11.9)的例子。

考虑计算周期波形的平均功率, 见图 11.4(a), 求(周期性)锯齿电流波形提供给电阻 R 的平均功率。有:

$$i(t) = \frac{I_m}{T} t, \quad 0 < t \leq T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T} (t - T), \quad T < t \leq 2T$$

如此等等, 并且:

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R t^2, \quad 0 < t \leq T$$

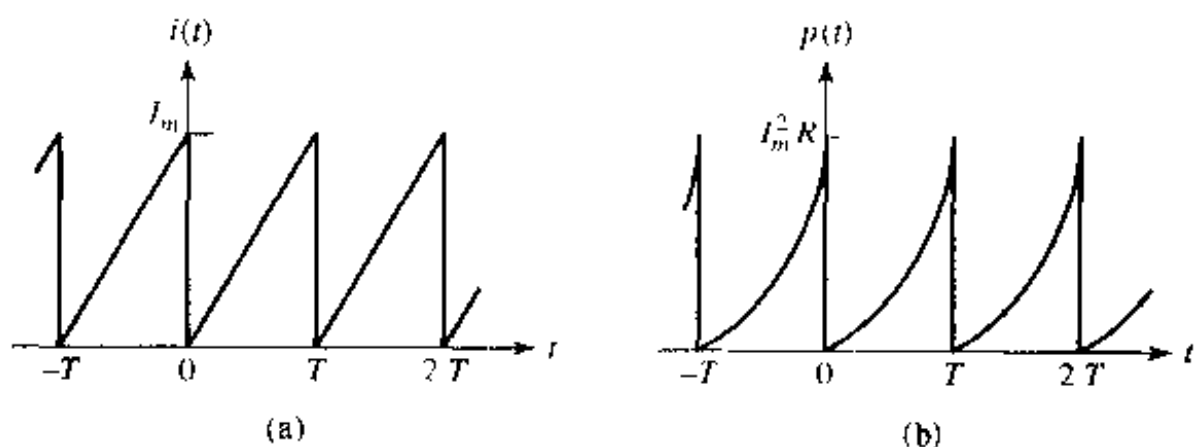
$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R (t - T)^2, \quad T < t \leq 2T$$

等等, 见图 11.4(b)所示。

在最简单的一个周期上, 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 积分, 得到:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2} t^2 dt = \frac{1}{3} I_m^2 R$$

选取其他周期, 比如从 $t = 0.1T$ 到 $t = 1.1T$ 将得到同样结果。从 0 到 $2T$ 积分并除以 $2T$, 即以 $n = 2, t_1 = 0$ 代入公式(11.8), 也将得到同样结果。

图 11.4 (a)锯齿电流波形;(b)电阻 R 上的瞬时功率波形

11.3.2 正弦稳态下的平均功率

现在考虑正弦稳态下的一般结论。假定所研究元件中的正弦电压和电流的一般形式分别为:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

和

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

瞬时功率为:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

将两个余弦函数乘积表示为差角的余弦与和角的余弦之和的一半:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \quad (11.10)$$

检查一下结果可以节省一部分积分工作。第一项是与 t 无关的常数。剩下的为余弦函数, 所以 $p(t)$ 是周期性的, 它的周期为 $\frac{1}{2} T$ 。注意周期 T 是所给电流和电压的周期, 而不是功率的周期, 功率函数的周期为 $\frac{1}{2} T$ 。可是如果愿意, 也可以在间隔 T 上做积分以确定功率的平均值, 只是必须也除以 T 。已知余弦和正弦在一个周期上的平均值为零, 所以不需对式(11.10)认真积分。通过检查, 在周期 T (或 $\frac{1}{2} T$) 上第二项的平均值为零; 第一项为常数, 其平均值为常数本身。所以:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \quad (11.11)$$

这一重要结论在先前的章节中针对特定电路介绍过, 它对正弦稳态是相当通用的。平均功率是峰值电压、峰值电流以及电流电压相角差的余弦三者乘积的一半。此相角差的含义是抽象的。

例题 11.2 给定时域电压为 $v = 4 \cos(\pi t/6)$ V, 求平均功率和当 $\mathbf{V} = 4 \angle 0^\circ$ V 时加在阻抗 $\mathbf{Z} = 2 \angle 60^\circ \Omega$ 上的瞬时功率

相量电流为 $\mathbf{V}/\mathbf{Z} = 2 \angle -60^\circ$ A, 平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} \times (4) \times (2) \cos 60^\circ = 2 \text{ W}$$

时域电压为:

$$v(t) = 4 \cos \frac{\pi t}{6} \text{ V}$$

时域电流为:

$$i(t) = 2 \cos \left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) \text{ A}$$

瞬时功率为:

$$p(t) = 8 \cos \frac{\pi t}{6} \cos \left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) = 2 + 4 \cos \left(\frac{\pi t}{3} - 60^\circ \right) \text{ W}$$

在图 11.5 中将它们画在同一时间轴上。2 W 的平均功率以及 6 s 的周期(电流或电压周期的一半)都看得很明显。当电压或电流为零时瞬时功率也为零,这一点也很清楚。

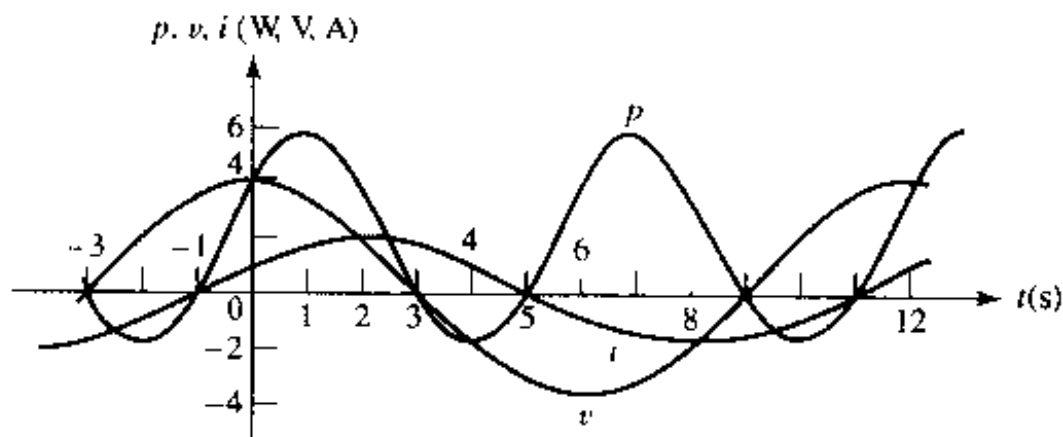


图 11.5 一个简单电路,其中 $V = 4 \angle 0^\circ$ V 加在阻抗 $Z = 2 \angle 60^\circ \Omega$ 上,
 $\omega = \pi/6$ rad/s,它的时间函数 $v(t)$, $i(t)$ 和 $p(t)$ 的曲线

练习

- 11.2 给定阻抗 $Z = 16.26 \angle 19.3^\circ \Omega$ 上相量电压为 $V = 115 \sqrt{2} \angle 45^\circ$ V,求瞬时功率表达式,若 $\omega = 50$ rad/s,计算平均功率。

答案: $767.5 + 813.2 \cos(100t + 70.7^\circ)$ W; 767.5 W

两种特殊情况值得分开考虑:提供给理想电阻以及理想电抗(仅含电容和电感的电路组合)的平均功率。

11.3.3 理想电阻吸收的平均功率

纯电阻上电流与电压的相角差为零。因此:

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 0 = \frac{1}{2} V_m I_m$$

或

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \quad (11.12)$$

或

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \quad (11.13)$$

时刻记住,所求为正弦电源提供给电阻的平均功率,不要把它与瞬时功率也相混淆,瞬时功率

也有类似的形式。

上面最后两个公式既简单又重要,根据正弦电流或电压的知识,公式可以用于确定提供给纯电阻的平均功率。遗憾的是,这两个公式常常被误用。最为常见的错误是使用式(11.13),而其中的电压不是电阻上的电压。如果注意将电阻上的电流代入式(11.12)中,将电阻上的电压代入式(11.13)中,保证得到满意的运算结果。另外,不能忘记系数 $\frac{1}{2}$!

11.3.4 纯电抗元件吸收的平均功率

提供给纯电抗元件(即不含电阻)的平均功率必定为零。这是电流与电压之间必定存在的 90° 相位差的直接结果。因此 $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90^\circ = 0$,且:

$$P_X = 0$$

提供给任何完全由理想电感和电容组成网络的平均功率为零。只是在特定时刻瞬时功率才为零。所以,在周期的一部分时间里,有功率流入网络;在周期的另一部分时间里,有功率流出网络,没有功率损失。

例题 11.3 电流为 $\mathbf{I} = 5/\underline{20^\circ}$ A, 求提供给阻抗 $\mathbf{Z}_L = 8 - j11 \Omega$ 的平均功率

用式(11.12)可以很快求出解答。只是 8Ω 电阻成分出现在平均功率的计算中,因为 $-j11 \Omega$ 成分不会吸收任何平均功率。这样:

$$P = \frac{1}{2} \times (5^2) \times 8 = 100 \text{ W}$$

还应注意,如果给定电流为直角形式,即 $\mathbf{I} = 2 + j5$ A, 那么幅度平方为 $2^2 + 5^2$, 提供给 $\mathbf{Z}_L = 8 - j11 \Omega$ 的平均功率将是:

$$P = \frac{1}{2} \times (2^2 + 5^2) \times 8 = 116 \text{ W}$$

练习

11.3 电流为 $\mathbf{I} = 2 + j5$ A, 计算提供给阻抗 $6/\underline{25^\circ} \Omega$ 的平均功率

答案: 78.85 W

例题 11.4 求图 11.6 中每个无源元件吸收的平均功率,以及每个电源提供的平均功率

应用几种方法中的任一种都可求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的值,比如网孔分析法、节点分析法或叠加法。它们是:

$$\mathbf{I}_1 = 5 - j10 = 11.18/\underline{-63.43^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 5 - j5 = 7.071/\underline{-45^\circ} \text{ A}$$

流过 2Ω 电阻的向下电流为:

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = -j5 = 5/\underline{-90^\circ} \text{ A}$$

所以 $I_m = 5$ A, 电阻吸收的平均功率利用公式(11.12)来求最为方便:

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} \times (5^2) \times 2 = 25 \text{ W}$$

可以用式(11.11)和式(11.13)来检查结果。每个电抗元件吸收的平均功率为零。下面考

虑左边的电源。电压 $20\angle 0^\circ$ V 和相关电流 $I_1 = 11.18\angle -63.43^\circ$ A 满足有源符号规则,那么这个电源提供的功率为:

$$P_{\text{left}} = \frac{1}{2} \times (20) \times (11.18) \cos [0^\circ - (-63.43^\circ)] = 50 \text{ W}$$

以同样的方法,利用无源符号规则求出右边电源吸收的功率:

$$P_{\text{right}} = \frac{1}{2} \times (10) \times (7.071) \cos(0^\circ + 45^\circ) = 25 \text{ W}$$

因为 $50 = 25 + 25$, 功率关系满足。

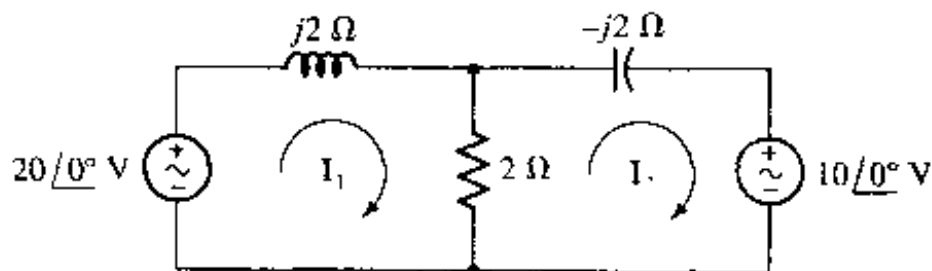


图 11.6 在正弦稳态下提供给每个电抗元件的平均功率为零

练习

11.4 对图 11.7 电路计算提供给每个无源元件的平均功率。计算两个电源提供的功率以证实前面的结果。

答案: 37.6 mW

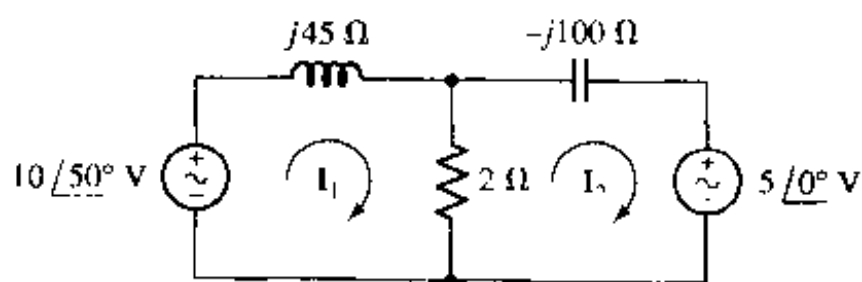


图 11.7

11.3.5 最大功率传输

记号 Z^* 表示复数 Z 的复共轭。将所有的“ j ”替换为“ $-j$ ”即可构成复共轭。详见附录 E。

前面曾考虑过最大功率传输定理,将它应用于电阻负载和电阻性电源阻抗场合。对于戴维南电源 V_{th} 和阻抗 $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$ 连接到负载 $Z_L = R_L + jX_L$, 可以证明当 $R_L = R_{th}$, $X_L = -X_{th}$, 即 $Z_L = Z_{th}^*$ 时, 提供给负载的功率最大。这个结果常被称为正弦稳态的最大功率传输定理:

一个与阻抗 Z_{th} 相串联的独立电压源, 或者一个与阻抗 Z_{th} 相并联的独立电流源, 当负载阻抗 Z_L 等于 Z_{th} 的复共轭, 即 $Z_L = Z_{th}^*$ 时, 提供给负载阻抗 Z_L 的平均功率最大。

证明的细节留做习题 11, 但是考虑图 11.8 的简单回路, 可以理解其基本方法。戴维南等效阻抗可以写成两个分量之和, $R_{th} + jX_{th}$, 类似地, 负载阻抗 Z_L 可以写为 $R_L + jX_L$ 。流过回路的电流为:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_L &= \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L} \\ &= \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_L &= \mathbf{V}_{th} \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L} \\ &= \mathbf{V}_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \mathbf{V}_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)} \end{aligned}$$

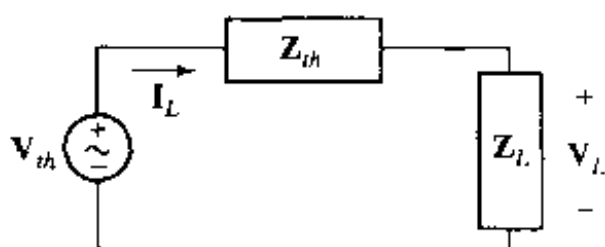


图 11.8 用以导出最大功率传输定理的简单回路,电路工作于正弦稳态下

$\mathbf{I}_L$ 的幅度为:

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

相角为:

$$\angle \mathbf{V}_{th} - \tan^{-1} \left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L} \right)$$

类似地, $\mathbf{V}_L$ 的幅度为:

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}| \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

其相角为:

$$\angle \mathbf{V}_{th} + \tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R_L} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L} \right)$$

参考式(11.11),得出提供给负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 的平均功率 P 的表达式为:

$$P = \frac{\frac{1}{2} |\mathbf{V}_{th}|^2 \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R_L} \right) \right] \quad (11.14)$$

为了证实当 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ 时提供给负载的平均功率确实最大,必须分两步进行。首先式(11.14)关于 R_L 的导数必须为零。余下的细节为渴望探索的读者留做习题。

例题 11.5 一电路由串联的正弦电压源 $3 \cos(100t - 3^\circ)$ V, 500Ω 电阻, 30 mH 电感以及一个未知阻抗组成。如果肯定电压源向未知阻抗提供最大功率,那么最大平均功率是多少?

图 11.9 画出了这个电路的相量表示电路图。容易将电路看做一个未知阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 与包含 $3 \angle -3^\circ$ 电源和戴维南阻抗 $500 + j3 \Omega$ 的戴维南等效电路相串联的结构。

因为图 11.9 的电路形式已经可以直接应用最大平均功率传输定理,已知当负载阻抗等于

Z_L 的复共轭时,它得到的平均功率最大,即:

$$Z_L = Z_{th}^* = 500 - j3 \Omega$$

构造这个阻抗有几种方法,最简单的是 500Ω 电阻串联阻抗为 $-j3 \Omega$ 的电容。因为电路的工作频率为 100 rad/s ,这对应 3.333 mF 的电容。

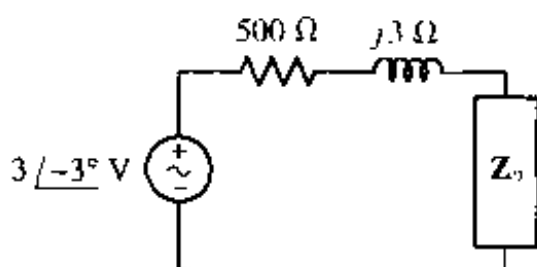


图 11.9 一个用相量表示的,由正弦电压源、电阻、电感和未知阻抗串联组成的简单电路

练习

11.5 如果将例题 11.5 中的 30 mH 电感替换为 $10 \mu\text{F}$ 电容,假定未知阻抗 Z_L 吸收最大功率,那么 Z_L 的电感成分是多少?

答案: 10 H

11.3.6 非周期函数的平均功率

现在必须考虑非周期函数的情况。一个求非周期函数功率的实际例子是指向“射电星”的射电望远镜功率输出。另一个例子是许多个具有不同周期的周期函数之和,数量多到找不到一个较大的共同周期。例如,电流:

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \quad (11.15)$$

是非周期的,因为两个正弦波的周期之比为无理数。 $t=0$ 时,两项均为零,且增大。但第一项只是在 $t=2\pi n$ 时为零且增大,其中 n 为整数。所以周期性要求 πt 或者 $\pi(2\pi n)$ 必须等于 $2\pi m$, m 也是一个整数。这个方程无解(m 和 n 均为整数)。通过比较式(11.15)的非周期表达式与周期函数:

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \quad (11.16)$$

可以看出来,其中 3.14 是一个确切的十进制表达式,而不要理解为 $3.141592\dots$ 。花一点时间^①,可以证明这个电流波形的周期是 100π 秒。

式(11.16)那样的周期电流或式(11.15)那样的非周期电流提供给 1Ω 电阻的平均功率可以通过无限周期上的积分求得。由于对简单函数平均值的了解,大部分积分可以避免。应用式(11.9)可以得到式(11.15)中电流提供的平均功率:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t) dt$$

现在考虑三个平均值之和的 P 。 $\sin^2 t$ 在无限间隔上的平均值可用 $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t)$ 取代 $\sin^2 t$ 求

① $T_1 = 2\pi, T_2 = 2\pi/3.14$ 。求 m 和 n 的整数解, $2\pi n = 2\pi m/3.14$, 即 $3.14n = m$, 或 $\frac{314}{100}n = m$, 或 $157n = 50m$ 。这样 n 和 m 的最小整数解为 $n = 50, m = 157$ 。因此周期为 $T = 2\pi n = 100\pi$, 或 $T = 2\pi(157/3.14) = 100\pi \text{ s}$ 。得, 平均值就是

得,平均值就是 $\frac{1}{2}$ 。类似地, $\sin^2 \pi t$ 的平均值也是 $\frac{1}{2}$ 。最后一项可以表达为两个余弦函数之和,每一个的平均值必定为零。所以:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

对式(11.16)的周期电流可得同样结果。对几个不同周期和任意幅度的正弦曲线之和的电流函数采用同样方法:

$$i(t) = I_{m1} \cos \omega_1 t + I_{m2} \cos \omega_2 t + \cdots + I_{mN} \cos \omega_N t \quad (11.17)$$

求得提供给电阻 R 的平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} (I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \cdots I_{mN}^2) R \quad (11.18)$$

给电流各个成分赋以任意相角,结果将不会改变。当考虑推导步骤时,这一重要结果是惊人地简单:给电流函数平方、积分并取极限。结果也并不出乎意料,因为可以表明,像式(11.17)这样电流的特殊情况,叠加原理也适用于功率。叠加原理不适用于两个直流电流之和,也不适用于两个具有相同频率的正弦函数之和。

例题 11.6 求电流 $i_1 = 2 \cos 10t - 3 \cos 20t$ A 提供给 4Ω 电阻的平均功率

因为两个余弦项有不同的频率,可以分开计算两个平均功率然后相加。所以电流提供给 4Ω 电阻的功率为 $\frac{1}{2} \times (2^2) \times 4 + \frac{1}{2} \times (3^2) \times 4 = 8 + 18 = 26 \text{ W}$ 。

例题 11.7 求电流 $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t$ A 提供给 4Ω 电阻的平均功率

这里电流的两个成分有相同频率,因此它们必定组合为某个单一频率的正弦波。这样, $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t = -\cos 10t$ 对 4Ω 电阻只提供 $\frac{1}{2} \times (1^2) \times 4 = 2 \text{ W}$ 的平均功率。

练习

11.6 一个电压源 v_s 连接到 4Ω 电阻上。如果 v_s 等于 (a) $8 \sin 200t$ V; (b) $8 \sin 200t - 6 \cos (200t - 45^\circ)$ V; (c) $8 \sin 200t - 4 \sin 100t$ V; (d) $8 \sin 200t - 6 \cos (200t - 45^\circ) - 5 \sin 100t + 4$ V, 求提供给电阻的平均功率。

答案: 8.00 W; 4.01 W; 10.00 W; 11.14 W

11.4 电流和电压的有效值

大多数人知道在北美地区电源插座上得到的电压是正弦电压,频率为 60 Hz 且“电压值”为 115 V。但“115 V”是什么意思? 当然不是瞬时值,因为电压不是常数。115 V 电压值也不是用符号 V_m 表示的幅度。如果在校准后的示波器上显示这个电压波形就会发现,交流插座上的电压幅度为 $115\sqrt{2}$, 即 162.6 V。也不能说 115 V 是一个平均值,因为正弦波的平均值是零。在正半周或负半周求平均将得到较为接近的数值,用整流型电压表测量交流电压,读数是 103.5 V。然而 115 V 是正弦电压的有效值。它是电压源向电阻负载提供功率的有效性的度量。

11.4.1 周期波形的有效值

用电流波形定义有效值(选择电压也完全相同)。如果一直流电流流经电阻 R , 并像周期电流那样, 向电阻提供同样的功率, 则周期电流的有效值等于相应的直流电流值。

换句话说, 让给定的周期电流流过电阻, 确定瞬时功率 $i^2 R$, 接着在一个周期上求 $i^2 R$ 的平均值, 这是平均功率。然后让一直流电流流过同一电阻, 调节直流电流的大小直到得到同样的平均功率。最后的直流电流大小就等于给定周期电流的有效值。图 11.10 解释了这样的看法。

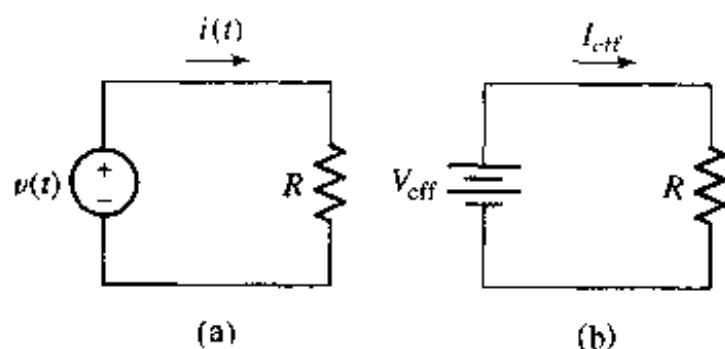


图 11.10 如果电路(a)和电路(b)中的电阻接收同样平均功率, 那么 $i(t)$ 的有效值等于 I_{eff} , 且 $v(t)$ 的有效值等于 V_{eff}

现在容易得到 $i(t)$ 有效值的一般数学表达式。周期电流提供给电阻的平均功率为:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

其中 T 是 $i(t)$ 的周期。直流电流提供的功率为:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

令两个功率表达式相等, 解出 I_{eff} 为:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (11.19)$$

结果与电阻 R 无关, 这个结论是符合设想的。用 v 和 V_{eff} 分别替换 i 和 I_{eff} 可以得到周期电压有效值的类似表达式。

注意, 首先取时间函数的平方, 再取一个周期内平方函数的平均值, 最后取平方函数平均值的平方根。简短地说, 求有效值的运算是方均根运算。为此, 有效值常称为方均根值, 或 rms 值。

11.4.2 正弦波形的有效(rms)值

周期波形有效值最重要的特例是正弦波形的有效值。选择正弦电流:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

其周期为:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

代入式(11.19)得到有效值为:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

$$\begin{aligned}
 &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\phi) \right] dt} \\
 &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} [t]_0^{2\pi/\omega}} \\
 &= \frac{I_m}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

因此,正弦电流的有效值是与相角无关的实数,数值上等于电流幅值的 $1/\sqrt{2} = 0.707$ 倍。所以电流 $\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$ A 的有效值为 1 A,该正弦电流向任一电阻提供的平均功率与 1 A 直流电流提供的平均功率相同。

应该特别注意,周期电流的幅度与有效值的比例系数 $\sqrt{2}$ 仅适用于正弦周期函数。对于图 11.4 的锯齿波,有效值等于最大值除以 $\sqrt{3}$ 。在求有效值时所用到的除以最大值的系数取决于给定周期函数的数学形式,它既可以是有理的,也可以是无理的,取决于函数的性质。

11.4.3 利用 rms 值计算平均功率

有效值的使用也稍微简化了正弦电流或电压提供的平均功率的表达式,免去了 $\frac{1}{2}$ 这个系数。例如正弦电流提供给电阻 R 的平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

因为 $I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}$, 平均功率可以写成:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \quad (11.20)$$

用等效直流量定义有效值使得电阻电路的平均功率公式,与直流分析中使用的公式相同。其他功率表达式也可用有效值表示:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi) \quad (11.21)$$

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \quad (11.22)$$

尽管从平均功率关系中成功地消去了系数 $\frac{1}{2}$, 现在必须注意一个正弦量是用幅度还是用有效值表示的。在实际中,有效值通常用在功率传输或分配以及旋转电机领域。在电子学和通信领域,往往使用幅度。除非明显使用术语 rms 或是特别指出,这里一般采用幅度。

在正弦稳态下,电压或电流相量可用有效值或幅度给出,两者只差系数 $\sqrt{2}$ 。电压 $50/30^\circ$ V 是用幅度表示。作为 rms 电压,同样的电压将表示为 $35.4/30^\circ$ V rms。

11.4.4 多频率电路的有效值

为了确定含有多种不同频率的周期或非周期波形的有效值,可以使用前一节得出的式 (11.18) 中的适当平均功率关系,几个成分的有效值重写如下:

$$P = (I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \cdots I_{n\text{eff}}^2) R \quad (11.23)$$

从中可见,由任意个不同频率正弦电流组成的电流的有效值可以表示为:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \cdots + I_{N\text{eff}}^2} \quad (11.24)$$

这些结果表明,如果 60 Hz, 5 A rms 正弦电流流过 $2\ \Omega$ 电阻,电阻吸收的功率为 $5^2 \times (2) = 50\ \text{W}$;如果还存在第二个电流,比如是 3 A rms, 120 Hz, 吸收功率为 $3^2 \times (2) + 50 = 68\ \text{W}$ 。而利用式 (11.24), 发现 60 Hz 和 120 Hz 电流之和的有效值为 5.831 A。那么 $P = 5.831^2 \times (2) = 68\ \text{W}$, 与前面相同。可是如果第二个电流也是 60 Hz, 这两个 60 Hz 电流之和的有效值可能介于 2 A ~ 8 A 之间。这时吸收功率可能介于 8 W ~ 128 W 之间, 取决于两个电流成分的相对相位。

练习

11.7 计算每个周期电压的有效值: (a) $6 \cos 25t$; (b) $6 \cos 25t + 4 \sin (25t + 30^\circ)$; (c) $6 \cos 25t + 5 \cos^2(25t)$; (d) $6 \cos^2 5t + 5 \sin 30t + 4\ \text{V}$ 。

答案: 4.24 V; 6.16 V; 5.23 V; 6.82 V

计算机辅助分析

在 PSpice 中有几种有效方法可用于功率计算。特别是 Probe 的内建函数可以画出瞬时功率曲线和计算平均功率。例如考虑图 11.11 的简单分压电路, 激励是 60 Hz 正弦波, 幅度为 $115\sqrt{2}\ \text{V}$ 。先在电压波形一个周期 ($\frac{1}{60}\ \text{s}$) 上进行瞬态模拟。

应用 Plot 菜单下 Add Plot to Window 选项, 图 11.12 中画出了电流和电阻 R1 消耗的瞬时功率。瞬时功率是周期性的, 均值不为零, 峰值为 6.61 W。

利用 Probe 求平均功率最容易的方法是利用内建 running average 函数, 预计平均功率为 $\frac{1}{2} \times (162.6 \times \frac{1\ 000}{1\ 000 + 1\ 000}) \times (81.3 \times 10^{-3}) = 3.305$ 。一旦 Add Traces 对话框出现 (Trace, Add), 在 Trace Expression 窗内键入:

$$\text{AVG}(I(R1) * I(R1) * 1\ 000)$$

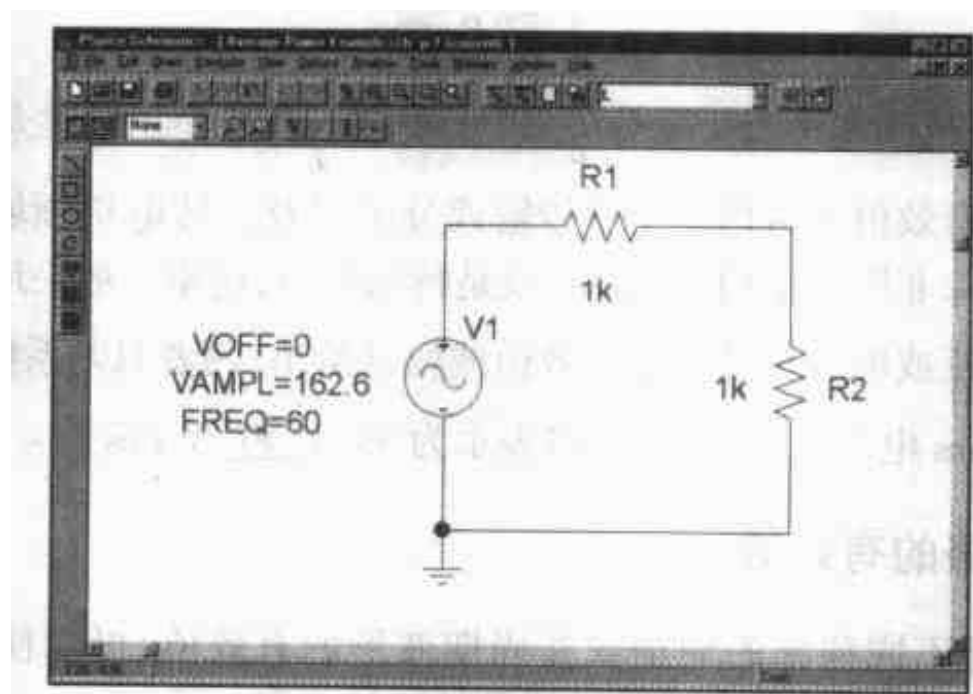


图 11.11 简单分压电路

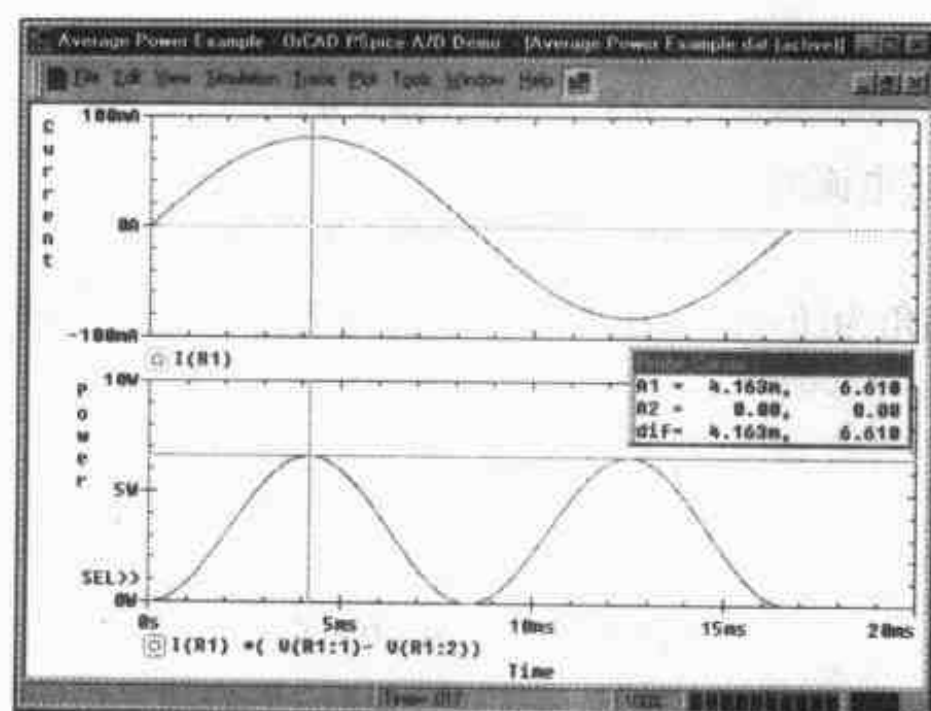


图 11.12 电阻 R1 上的电流和瞬时功率

如图 11.13 所示,一个或两个周期上的平均值都是 3.305 W,与手算一致。

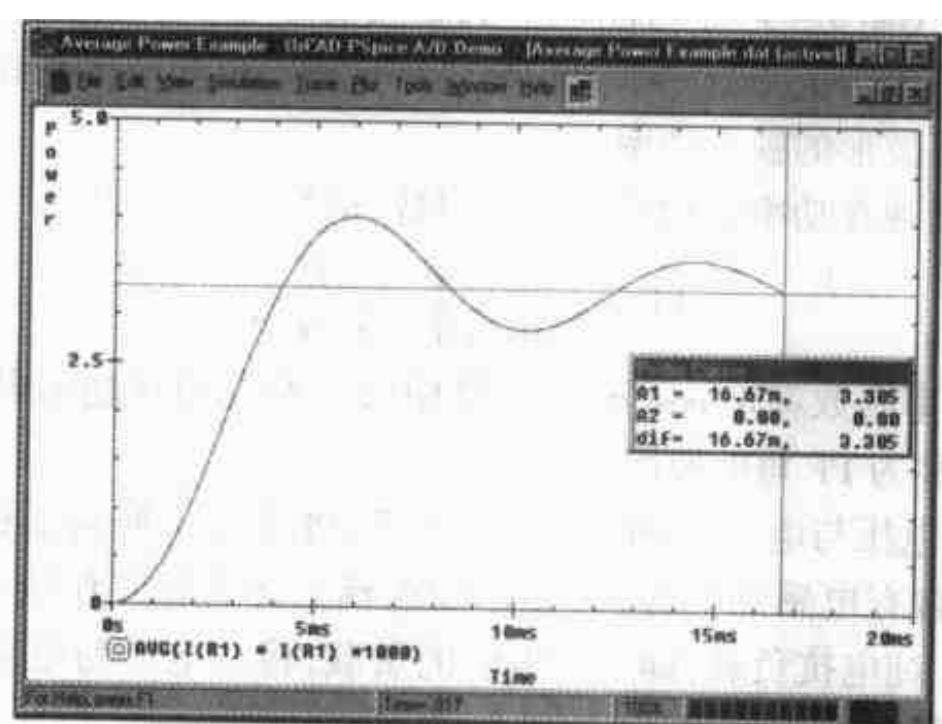


图 11.13 求电阻 R1 消耗的平均功率

利用内建函数 avgx 还可以计算特定间隔内的平均值。例如,用这个函数计算单个周期 (这里是 $1/120 = 8.33 \text{ ms}$) 上的平均功率,输入:

$$\text{AVGX}(I(R1) * I(R1) * 1000, 8.33\text{m})$$

两种方法在曲线终点产生的结果都是 3.305 W。

11.5 视在功率和功率因数

大量电能必须从一处传送到另一处,传输效率将直接关系到最终由用户付出的电能花费。如果用户的负载使传输效率降低,他必须为实际收到和使用的每一千瓦小时(kWh)的电能付出更高价格。类似地,如果用户要求发电公司在传送和配电设备方面做更多投入,也要为每一千瓦小时付出更多的钱,除非公司是乐善好施的。

下面首先定义视在功率和功率因数,然后简要介绍这些术语是怎样与前面提到的经济问

题相联系的。假定正弦电压：

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

作用于网络,产生的正弦电流为:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

因此电压超前电流的相角为 $(\theta - \phi)$ 。在无源符号规则下,提供给网络输入端的平均功率用最大电压表示为:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

或用有效值表示为:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

如果施加的是直流电压,将得到直流响应,提供给网络的平均功率可以简单地用电压与电流的乘积表示。把这一方法用于正弦情况,就会得到由熟悉的乘积 $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ “视在”提供的吸收功率值。可是这个电压和电流有效值乘积并不是平均功率,而被定义为视在功率。量纲上,视在功率肯定与实际功率有相同单位,因为 $\cos(\theta - \phi)$ 是无量纲的。但为了避免混淆,视在功率用伏安或 VA 表示。又因为 $\cos(\theta - \phi)$ 不可能大于 1,显然实际功率永远不可能大于视在功率值。

视在功率的概念不限于正弦激励函数和响应。只要简单地取电流和电压有效值的乘积就可得出任何电流和电压波形的视在功率。

实际或平均功率与视在功率之比称为功率因数,记为 PF。所以:

$$\text{PF} = \frac{\text{平均功率}}{\text{视在功率}} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

在正弦情况下,功率因数就是 $\cos(\theta - \phi)$,其中 $(\theta - \phi)$ 是电压超前电流的相角。这就是为什么常常将角 $(\theta - \phi)$ 称为 PF 角的原因。

对于纯电阻负载,电压与电流同相, $(\theta - \phi)$ 为零,PF 为 1。换句话说,视在功率等于平均功率。可是如果负载含有电感和电容,只要仔细选择元件值和工作频率,使输入阻抗相角为零,也可获得单位 PF。纯电抗负载,即不含电阻的负载,将在电压与电流之间产生要么 $+90^\circ$,要么 -90° 的相位差,所以 PF 为零。

在这两个极端情况之间是一般网络的情况,PF 可从零变到 1。例如 PF 等于 0.5,表示负载输入阻抗的相角为 $+60^\circ$ 或 -60° ;前者描写的是电感负载,因为电压超前电流 60° ,而后者指电容负载。负载性质可由 PF 超前或是 PF 滞后加以区分,超前或滞后指电流相对于电压的相角。这样电感负载具有滞后 PF,电容负载具有超前 PF。

例题 11.8 计算电源提供给图 11.14 所示的两个负载的平均功率、视在功率以及组合负载的功率因数

● 弄清问题的目标:

平均功率指负载元件中电阻成分所吸收的功率;视在功率指组合负载的有效电压和有效电流之乘积。

● 收集已知信息:

有效电压是 60 V rms,它是组合负载 $2 - j + 1 + j5 = 3 + j4 \Omega$ 上的电压。

● 选择最适合问题的已有方法:

两个功率值的计算是直截了当的,但是要记住,必须保持定义的连续性。

● 建立适当的方程组:

平均功率由下式给出:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\text{ang } \mathbf{V} - \text{ang } \mathbf{I})$$

视在功率为 $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ 。

功率因数是这两个量的比值:

$$\text{PF} = \frac{\text{平均功率}}{\text{视在功率}} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

● 确定是否还需其他信息:

求 I_{eff} :

$$\mathbf{I}_s = \frac{60 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 12 \angle -53.13^\circ$$

所以 $I_{\text{eff}} = 12 \text{ A rms}$, $\text{ang } \mathbf{I}_s = -53.13^\circ$ 。

● 试解:

电源提供的平均功率为:

$$P_s = (60) \times (12) \cos[0^\circ - (-53.1^\circ)] = 432 \text{ W}$$

视在功率为 $60 \times (12) = 720 \text{ VA}$ 。

最后考虑组合负载的电压和电流, 得出组合负载的功率因数。当然这个功率因数等同于电源的功率因数。所以:

$$\text{PF} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{432}{60 \times (12)} = 0.6$$

● 证实所得解是否合理和满足要求:

上面那个负载得到平均功率为:

$$P_{\text{upper}} = 12^2 \times (2) = 288 \text{ W}$$

而右边那个负载, 其平均功率为:

$$P_{\text{right}} = 12^2 \times (1) = 144 \text{ W}$$

因此电源提供 432 W, 其中 288 W 消耗在上面那个负载, 144 W 消耗在右边那个负载。功率平衡正确。

还可以将组合负载写成 $5 \angle 53.1^\circ \Omega$, 53.1° 是 PF 角, 所以 PF 为 $\cos 53.1^\circ = 0.6$ 。还要注意, 组合负载是电感性的, 因此 PF 为 0.6 滞后。

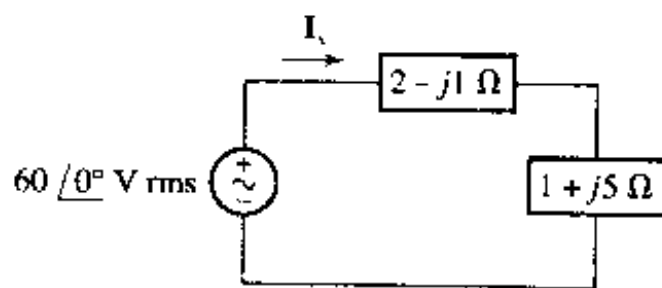


图 11.14 求电源提供给每个元件的平均功率、视在功率以及组合负载的功率因数