

## 练习

11.8 对于图 11.15 电路,确定组合负载的功率因数,  $Z_L = 10 \Omega$ 。

答案: 0.9966 超前

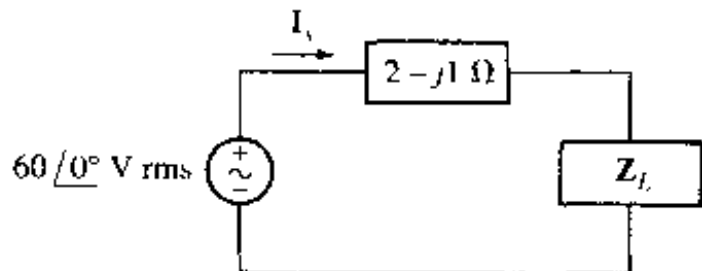


图 11.15

## 11.6 复功率

如果将功率看成复数,可使功率计算得到一定简化。复功率的幅值将取为视在功率,复功率的实部取为(实)平均功率。复功率的虚部这一新物理量将称为无功功率。

定义一对端点上的正弦电压  $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} \angle \theta$  和流进一个端点的电流  $I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} \angle \phi$ ,使它们满足无源符号规则。这样两端网络吸收平均功率为:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

同引入相量时所做的那样,下面利用欧拉公式引入复物理量,将  $P$  表示为:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \operatorname{Re} \{ e^{j(\theta - \phi)} \}$$

或

$$P = \operatorname{Re} \{ V_{\text{eff}} e^{j\theta} I_{\text{eff}} e^{-j\phi} \}$$

电压相量就是上式括号中前面两个系数,但是后面两个系数与电流相量不太对应,因为相角含有负号,电流相量中却不存在。即电流相量是:

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} e^{j\phi}$$

因此必须利用共轭标记:

$$I_{\text{eff}}^* = I_{\text{eff}} e^{-j\phi}$$

所以:

$$P = \operatorname{Re} \{ V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* \}$$

现在功率就成为复数,定义复功率  $S$  为:

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* \quad (11.25)$$

先来检查复功率的极坐标或指数形式:

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j(\theta - \phi)}$$

很明显,  $S$  的幅度  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  是视在功率,  $S$  的角度  $(\theta - \phi)$  是 PF 角(即电压超前电流的角度)。

在直角坐标形式下,有:

$$S = P + jQ \quad (11.26)$$

其中  $P$  同以前一样是平均功率。复功率的虚部记为  $Q$ ,称为无功功率。 $Q$  的量纲与有功功率

$P$ 、复功率  $S$  和视在功率  $|S|$  相同。为避免与其他量混淆,  $Q$  的单位定义为伏安电抗(缩写为 VAR)。从式(11.25)和式(11.26)可见:

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta - \phi) \quad (11.27)$$

无功功率的物理解释是能量在电源(即供电公司)和负载的电抗成分(即电感和电容)之间来回流动的时间速率。这些成分交替充电和放电,分别导致电源到负载和负载到电源的电流流动。

常用的表示复功率的图形称为功率三角形,示于图 11.16。图中显示三个功率量中只有两个是待求的,因为可以利用三角关系得到第三个。如果功率三角形位于第一象限( $\theta - \phi > 0$ ),功率因数滞后(对应于感性负载);如果功率三角形位于第四象限( $\theta - \phi < 0$ ),功率因数超前(对应于容性负载),有关负载的许多定性信息可以一目了然。

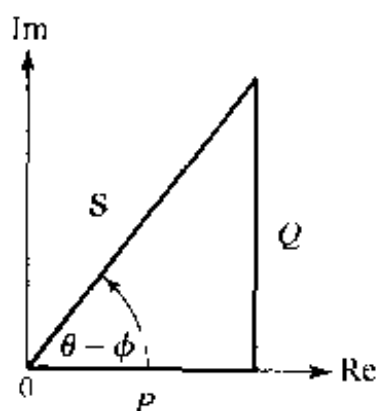


图 11.16 复功率的功率三角形表示

无功功率的另一解释,可以通过构造包含  $V_{\text{eff}}$  和  $I_{\text{eff}}$  的相角图看出,如图 11.17 所示。如果将电流相量分解为两个分量,一个与电压同相,幅度为  $I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$ ,另一个与电压相位成  $90^\circ$  角,幅度等于  $I_{\text{eff}} \sin|\theta - \phi|$ ,那么显然有功功率就是电压相量和电流相量中与电压同相分量的乘积。而且,电压相量幅度和电流相量中与电压相量成  $90^\circ$  角的分量之乘积,就是无功功率  $Q$ 。相量中与另一相量成  $90^\circ$  角的分量通常称为正交分量。这样  $Q$  就是  $V_{\text{eff}}$  乘以  $I_{\text{eff}}$  的正交分量。 $Q$  也称为正交功率。

若规定负载上的电压和电流为  $V_{\text{eff}}$  和  $I_{\text{eff}}$ ,则无功功率的正负描绘了无源负载特性。若负载为感性,那么角  $(\theta - \phi)$  介于  $0$  到  $90^\circ$  之间,这个角的正弦为正,无功功率也为正。电容负载导致负的无功功率。

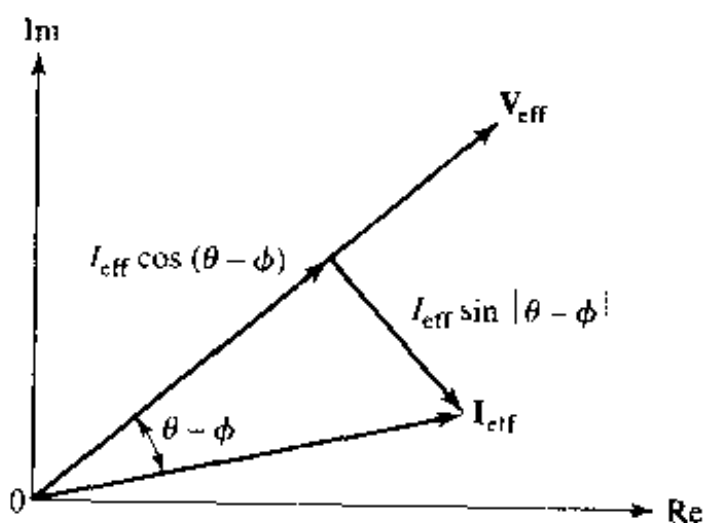


图 11.17 电流相量  $I_{\text{eff}}$  分解为两个分量,一个与电压相量  $V_{\text{eff}}$  同相,另一个与电压相量成  $90^\circ$  角,后一分量称为正交分量

### 11.6.1 功率测量

瓦特计读取负载吸收的平均有功功率,而无功功率表读取负载吸收的平均无功功率  $Q$ 。两个量可同时测量。此外,瓦特小时表和伏安小时表可以同时使用,用以在任何所希望的时间间隔内记录用户使用的实能量和电抗能量。根据这些记录可以确定平均 PF,并且相应调整用户的账单。

可以说明提供给几个相互连接的负载的复功率是提供给单个负载复功率之和,不管负载是如何连接的。例如考虑图 11.18 中并联连接的两个负载。采用 rms 值,组合负载吸收的复功率为:

$$S = VI^* = V(I_1 + I_2)^* = V(I_1^* + I_2^*)$$

那么:

$$S = VI_1^* + VI_2^*$$

正如所料

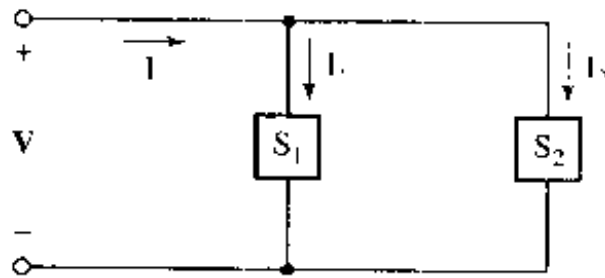


图 11.18 电路显示,两个并联负载吸收的复功率是它们分别吸收复功率之和

## 实际应用

### 功率因数的校正

当电力公司向大型工业用户提供电能时,往往在其费率表中包含一个 PF 条款。在这一条款下,每当 PF 值低于规定值时,一般在 0.85 滞后左右,用户要额外付费。受典型工业负载的性质决定,很少有工业用户的功率因数超前。有几个原因迫使电力公司对低 PF 值额外收费。首先,在一定功率和一定电压下,显然低 PF 值运行的发电机必须具有较高的电流承载能力。另一个原因是传输和配电系统的损耗增加。

为了补偿损失和鼓励用户高 PF 值运行,某电力公司对超过标准值(按平均功率需求的 0.62 倍计算)的每 kVAR 收取罚金 0.22 美元:

$$S = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62) = P(1.77 \angle 31.8^\circ)$$

由于  $\cos 31.8^\circ = 0.85$ ,且  $Q$  为正值,所以这一标准值等同于 0.85 滞后的 PF 值。对于 PF 角大于这一标准的用户会受到罚款。

通常通过安装与负载并联的补偿电容去补偿电抗性功率,电容一般安装在用户设备外面的变电站。要求的电容值为:

$$C = \frac{P(\tan \theta_{\text{old}} - \tan \theta_{\text{new}})}{\omega V_{\text{rms}}^2} \quad [11.28]$$

其中  $\omega$  是频率,  $\theta_{\text{old}}$  是目前的 PF 角,  $\theta_{\text{new}}$  是目标 PF 角。为了方便, 补偿电容堆是按规定的递增率, 以 kVAR 容量为单位制造的。安装实例示于图 11.19。

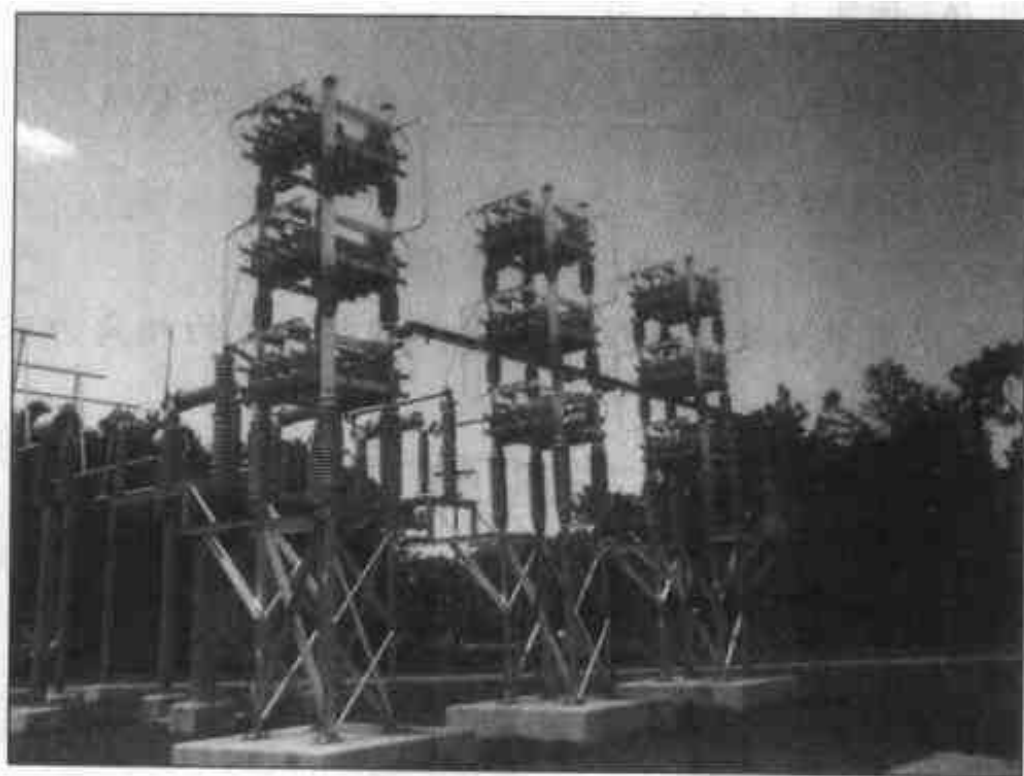


图 11.19 补偿电容安装现场

现在考虑一个特例。某一工业机器厂月峰值需求为 5 000 kW, 月电抗需求为 6 000 kVAR。利用上述费率表计算该用户与 PF 罚款有关的年花费。如果电力公司提供电容补偿的费用为每增加 1 000 kVAR 增加 2 390 美元; 每增加 2 000 kVAR 增加 3 130 美元, 什么是对用户最经济有效的方案?

需要补偿的 PF 是复功率  $S$  的角度, 这里为  $5\,000 + j6\,000$  kVA。那么角度为  $\tan^{-1}(6\,000/5\,000) = 50.19^\circ$ , PF 为 0.64 滞后。标准无功功率值为 0.62 倍的峰值需求, 即  $0.62 \times (5\,000) = 3\,100$  kVAR。所以这个工厂比电力公司允许值多吸收  $6\,000 - 3\,100 = 2\,900$  kVAR 无功功率。这表示将比普通电力花费年估计多花  $12 \times (2\,900) \times (0.22) = 7\,656$  美元。

如果用户选择只安装 1 000 kVAR 补偿电容(花费为 2 390 美元), 吸收的过剩无功功率减少到  $2\,900 - 1\,000 = 1\,900$  kVAR, 那么年罚款现在为  $12 \times (1\,900) \times (0.22) = 5\,016$  美元。这年的总花费为  $5\,016 + 2\,390 = 7\,406$  美元, 节省 250 美元。如果用户选择安装 2 000 kVAR 补偿电容(花费为 3 130 美元), 吸收的过剩无功功率减少到  $2\,900 - 2\,000 = 900$  kVAR, 那么年罚款现在为  $12 \times (900) \times (0.22) = 2\,376$  美元。这年的总花费为  $2\,376 + 3\,130 = 5\,506$  美元, 第一年就节省 2 150 美元。可是如果用户着了迷, 安装 3 000 kVAR 补偿电容, 在第一年将比只安装 2 000 kVAR 电容实际多花 14 美元。

**例题 11.9** 一个工业用户在滞后 0.8 PF 下运行 50 kW 电感电动机。电源电压为 230 V rms。为获得较低的电力费率, 用户希望将 PF 提高到 0.95 滞后。请确定一个合适的方案。尽管可以在保持一定的无功功率下增加有功功率来提高 PF 值, 但这不会减轻用户的账单, 所以不是用户所感兴趣的。必须在系统中加入纯电抗负载, 又因为电感电动机上的电压不允许改变, 显然附加的纯电抗负载只能并联连接。如果把  $S_1$  解释为电感电动机的复

功率,  $S_2$  为补偿器吸收的复功率, 图 11.18 电路(这里重画于图 11.20)是可行的。

提供给电感电动机的复功率的实部必然是 50 kW, 相角为  $\cos^{-1}(0.8)$ , 即  $36.9^\circ$ 。所以:

$$S_1 = \frac{50 \angle 36.9^\circ}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

为得到 0.95 的 PF 值, 总复功率必须为:

$$S = \frac{50}{0.95} \angle \cos^{-1}(0.95) = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

这样补偿负载所吸收的复功率为:

$$S_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

所需负载阻抗  $Z_2$  可以简单地按下述步骤求得。取电压源的相角为零, 那么  $Z_2$  吸收的电流为:

$$I_2^* = \frac{S_2}{V} = \frac{-j21.070}{230} = -j91.6 \text{ A}$$

或

$$I_2 = j91.6 \text{ A}$$

因此:

$$Z_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{230}{j91.6} = -j21.5 \Omega$$

如果工作频率为 60 Hz, 这个负载可由一个与电动机并联的  $1056 \mu\text{F}$  的电容提供。可是必须用电费账单所节省的经费支付它的初始花费、维护和折旧费用。

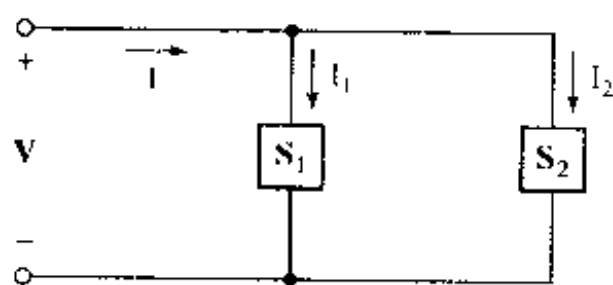


图 11.20

### 练习

- 11.9 对于图 11.21 所示的电路, 求 (a)  $1 \Omega$  电阻; (b)  $-j10 \Omega$  电容; (c)  $5 + j10 \Omega$  阻抗; (d) 电源所吸收的复功率。

答案:  $26.6 + j0 \text{ VA}$ ;  $0 - j1331 \text{ VA}$ ;  $532 + j1065 \text{ VA}$ ;  $-559 + j266 \text{ VA}$

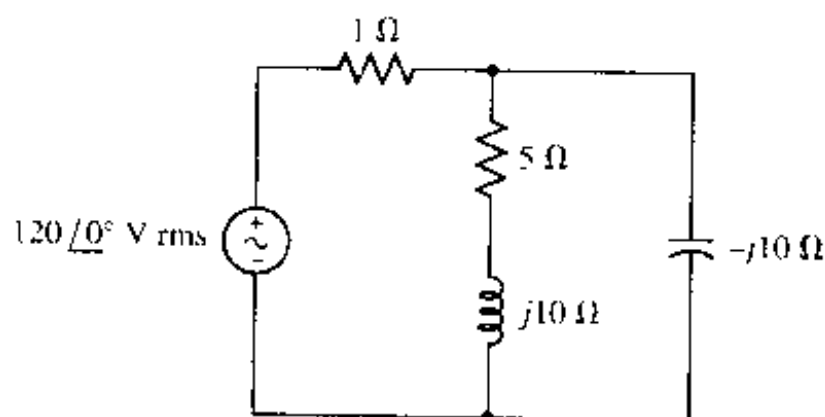


图 11.21

## 11.7 功率术语比较

本章中引入了多得令人生畏的功率术语,现在应该停下来做一整体考虑。表 11.1 汇集了这些术语,并提供了每一术语的简短描述。

表 11.1

术 语	符 号	单 位	描 述
瞬时功率	$p(t)$	W	$p(t) = v(t)i(t)$ 。它是功率在特定时刻的值,不是电压相量和电流相量的乘积
平均功率	$P$	W	在正弦稳态中, $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$ ,其中 $\theta$ 为电压的角度, $\phi$ 为电流的角度。电抗对 $P$ 没有贡献
有效或 rms 值	$V_{\text{rms}}$ 或 $I_{\text{rms}}$	V 或 A	例如定义 $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$ 。如果 $i(t)$ 为正弦波,那么 $I_{\text{eff}} = I_m / \sqrt{2}$
视在功率	$ S $	VA	$ S  = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ ,是平均功率可能的最大值,仅当纯电阻负载时 $P =  S $
功率因数	PF	无	平均功率与视在功率之比。对于纯电阻负载 PF 等于 1,对纯电抗负载 PF 为零
无功功率	$Q$	VAR	能量流进和流出电抗负载速率的度量
复功率	$S$	VA	包含平均功率 $P$ 和无功功率 $Q$ 的方便的复物理量, $S = P + jQ$

下面的实际情况可以表明这些新术语的实际重要性。首先假定有一个正弦发电机,它是在其他具有力矩输出的装置,比如蒸汽涡轮、电动机或内燃机驱动下旋转的机器。让发电机产生 200 V rms, 60 Hz 的电压。此外假定发电机规定的最大功率输出为 1 kW。因此发电机有能力向电阻负载提供 5 A rms 电流。可是如果连接到发电机的负载在滞后功率因数为 0.5 下需求 1 kW,那么需要有 10 A rms 电流才行。随着 PF 值降低,为保持负载在 200 V 和 1 kW 下工作,所要提供的电流将越来越大。如果发电机是按照能安全提供最大 5 A 电流正确和经济地设计的,过大的电流会导致令人不满意的工作,比如使绝缘层过热并冒烟,这将损害电机的寿命。

按照以伏安为单位的视在功率给出发电机的额定值更有价值。这样额定 200 V 下 1 000 VA 表明发电机可以在额定电压下提供的最大电流为 5 A;提供的功率取决于负载,极端情况下可能是零。在一定电压下,规定视在功率与规定电流是等价的。

## 练习

- 11.10 440 V rms 电源通过总电阻为  $1.5 \Omega$  的传输线向负载  $Z_L = 10 + j2 \Omega$  提供功率。求 (a) 提供给负载的平均功率和视在功率; (b) 传输线上平均和视在功率损失; (c) 电源提供的平均功率和视在功率; (d) 电源工作的功率因数。

答案: 14.21 kW; 14.49 kVA; 2.131 kW; 2.131 kVA; 16.34 kW, 16.59 kVA; 0.985 滞后

## 11.8 小结与复习

- 元件吸收的瞬时功率为  $p(t) = v(t)i(t)$
- 正弦电压提供给阻抗的平均功率为  $\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$ , 其中  $\theta =$  电压相角,  $\phi =$  电流相角。
- 只有负载的电阻成分才吸收平均功率, 提供给负载电抗成分的平均功率为零。
- 当满足条件  $Z_L = Z_m^*$  时, 将出现最大平均功率传输
- 正弦波的有效值或 rms 值是其幅值除以  $\sqrt{2}$
- 负载的功率因数(PF)是其平均消耗功率与视在功率之比
- 纯电阻负载的功率因数为 1, 纯电抗负载的功率因数为零
- 复功率定义为  $S = P + jQ$ , 或  $S = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}^*$ , 它的单位为伏安(VA)。
- 无功功率  $Q$  是复功率的虚部, 是能量流进或流出负载电抗成分的速率, 它的单位为乏(VAR)。
- 常常用电容改进工业负载的 PF 值, 以减小对电力公司的无功功率要求。

## 习题

1. 电流源  $i_s(t) = 2 \cos 500t$  A 与  $50 \Omega$  电阻,  $25 \mu\text{F}$  电容并联连接。当  $t = \pi/2$  ms 时, 求电源提供的功率, 电阻吸收功率和电容吸收功率。
2. 电流  $i = 2t^2 - 1$  A,  $1 \leq t \leq 3$ , 流经某一电路元件。(a) 如果元件为 4 H 电感, 求给定时间间隔内提供给它的能量; (b) 如果元件为 0.2 F 电容, 且  $v(1) = 2$  V, 求  $t = 2$  s 时提供给它的功率。
3. 如果图 11.22 中  $v_c(0) = -2$  V,  $i(0) = 4$  A, 求在  $t$  等于 (a)  $0^+$ ; (b) 0.2 s; (c) 0.4 s 时电容吸收的功率。
4. 如果  $v_s = 20 \cos(1000t + 30^\circ)$  V, 求图 11.23 电路中每个无源元件在  $t = 0$  时吸收的功率。用 PSpice 证实你的答案。

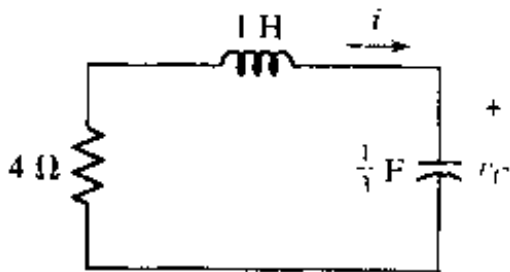


图 11.22

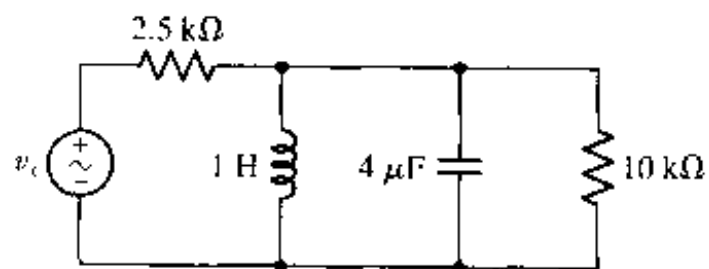


图 11.23

5. 图 11.24 的电路已经达到稳态条件。求  $t = 0.1$  s 时 4 个电路元件分别吸收的功率。
6. 求图 11.25 中 5 个电路元件分别吸收的平均功率。
7. 计算图 11.26 的电路中每个源产生的平均功率和提供给每个阻抗的平均功率。

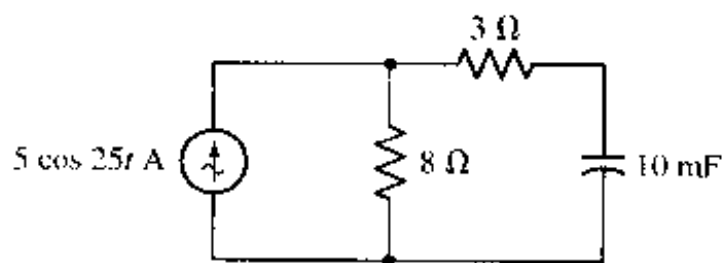


图 11.24

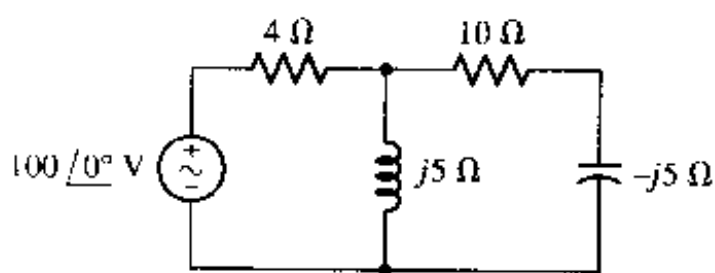


图 11.25

8. 在图 11.27 所示的电路中求 (a) 3 Ω 电阻消耗的功率; (b) 电源产生的功率。

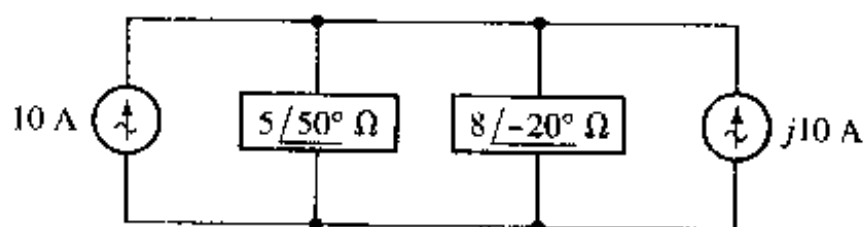


图 11.26

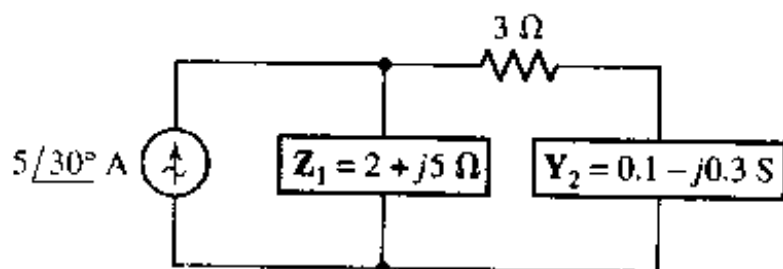


图 11.27

9. 求图 11.28 所示的 5 个元件分别吸收的平均功率。

10. 确定图 11.29 的电路中受控源提供的平均功率

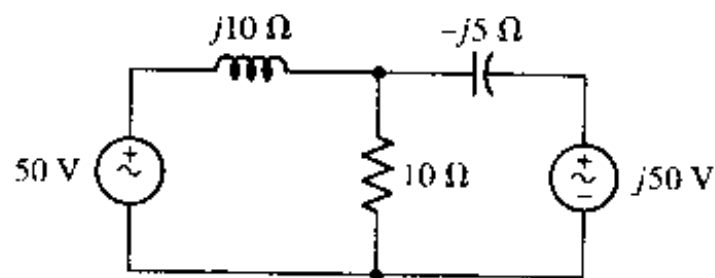


图 11.28

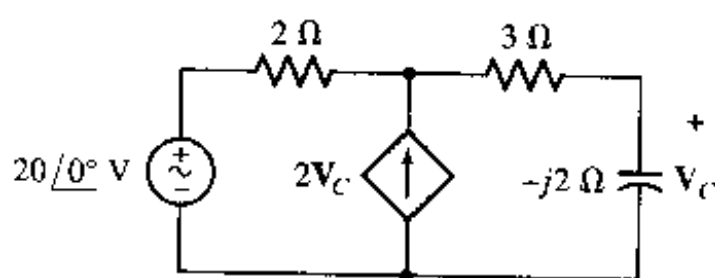


图 11.29

11. 频域戴维南等效电路由正弦电源  $V_{th}$  与阻抗  $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$  组成。如果负载  $Z_L = R_L + jX_L$  在下列约束条件下得到最大平均功率: (a)  $X_{th} = 0$ ; (b)  $R_L$  和  $X_L$  可以独立选择; (c)  $R_L$  固定 (不等于  $R_{th}$ ); (d)  $X_L$  固定 (独立于  $X_{th}$ ); (e)  $X_L = 0$ , 请确定相应条件。

12. 对图 11.30 的电路, (a) 怎样的  $Z_L$  会吸收最大平均功率? (b) 最大平均功率是多少?

13. 对图 11.30 的电路, 要求负载为纯电阻  $R_L$ , 怎样的  $R_L$  会吸收最大平均功率? 最大平均功率是多少?

14. 求图 11.31 中受控源提供的平均功率。

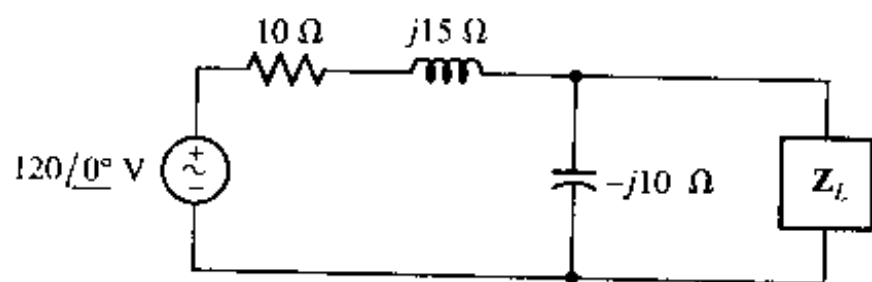


图 11.30

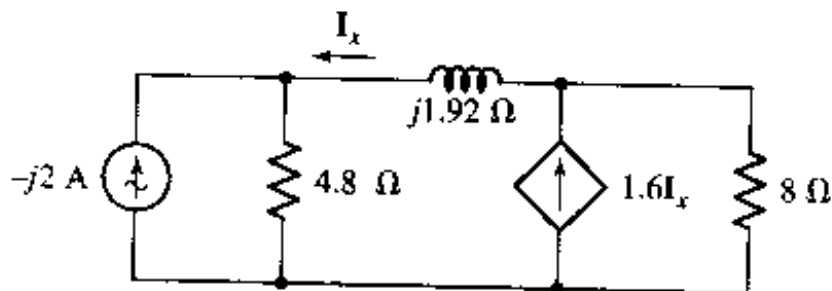


图 11.31

15. 对图 11.32 的网络: (a) 在 a 和 b 之间怎样的阻抗  $Z_L$  将吸收最大平均功率? (b) 最大平均功率值是多少?



16. 在图 11.33 中用工作频率为 50 Hz 的  $5\angle -30^\circ$  A 电源替换  $10\angle 0^\circ$  A 电源, 确定提供给每个方框网络的平均功率。

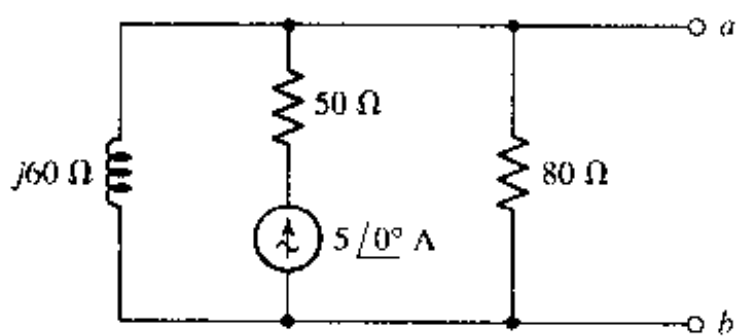


图 11.32

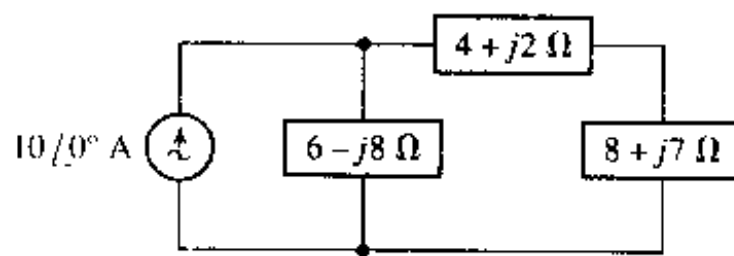


图 11.33

17. 在图 11.34 电路中求吸收最大功率的  $R_L$  值, 并确定该功率值。

18. 在图 11.35 中, 如果 (a)  $\lambda = 0$ ; (b)  $\lambda = 1$ , 确定提供给每个电阻的平均功率; (c) 假定实际电路工作在 60 Hz, 用 PSpice 证实你的答案

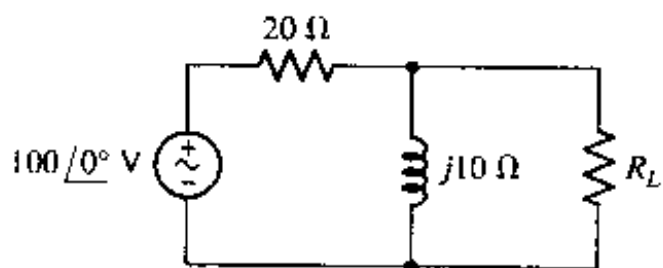


图 11.34

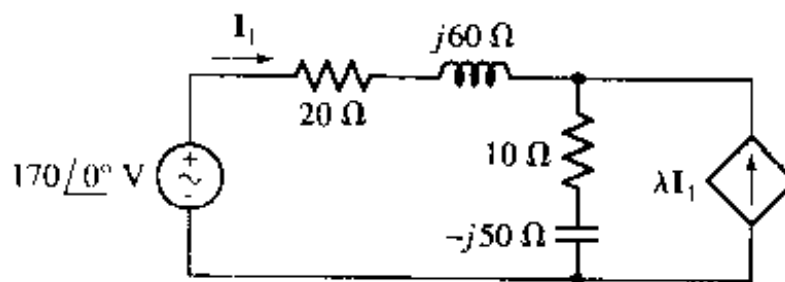
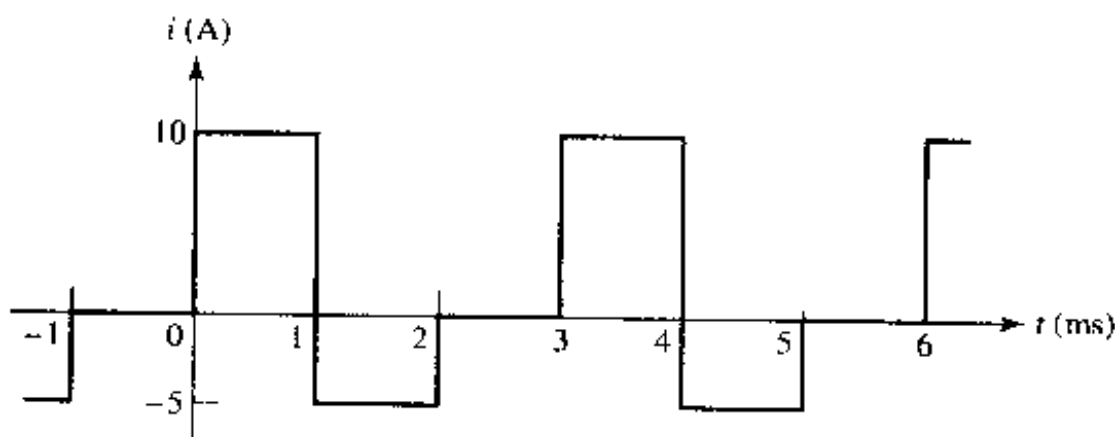
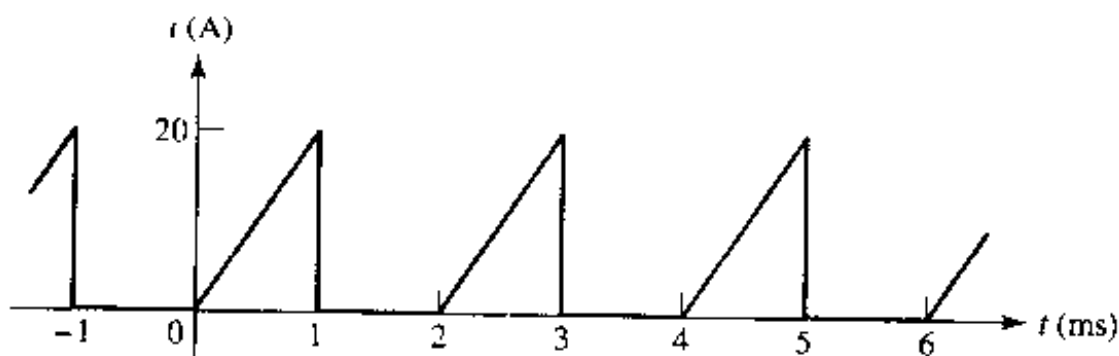


图 11.35

19. (a) 计算图 11.36 所示的每个波形的平均值; (b) 如果每个波形都取平方, 求这些新周期波形的平均值 (单位:  $A^2$ )。



(a)



(b)

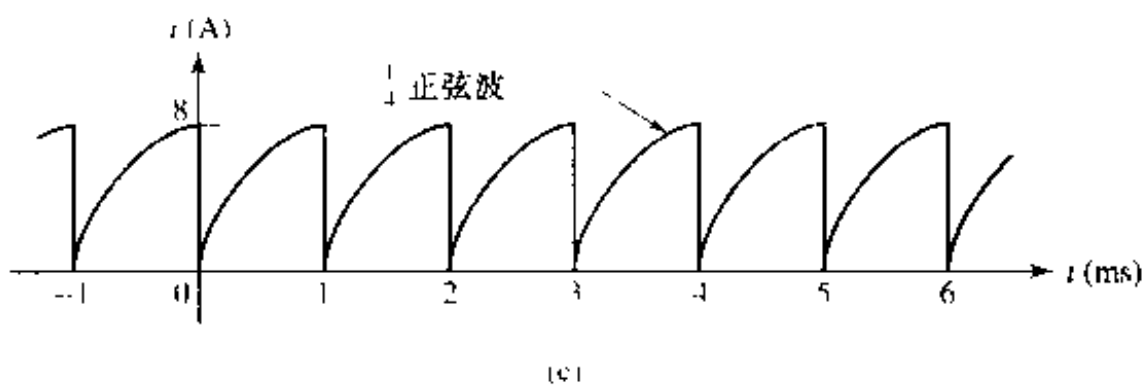


图 11.36

20. 在图 11.23 的电路中, 如果  $v_s = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - 9^\circ)$  V, 求提供给每个元件的平均功率, 用 PSpice 证实你的答案
21. (a) 求  $v(t) = 10 + 9\cos 100t + 6\sin 100t$  的有效值; (b) 求图 11.37 所示波形的有效值; (c) 它的平均值.

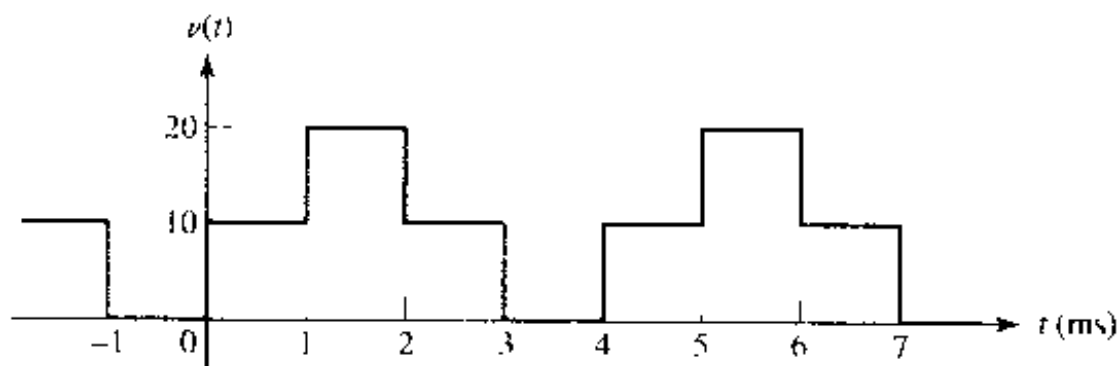


图 11.37

22. 求下列波形的有效值: (a)  $g(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(100t - 120^\circ)$ ; (b)  $h(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(101t - 120^\circ)$ ; (c) 图 11.38 所示波形.

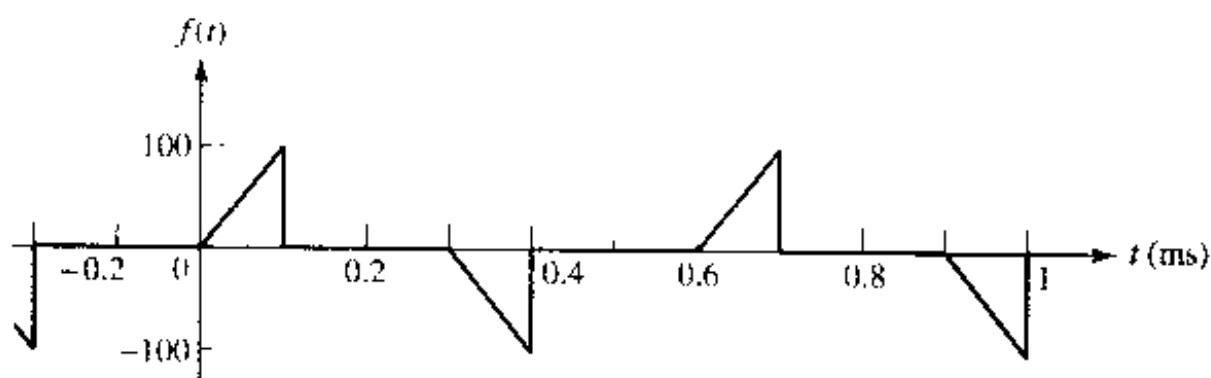


图 11.38

23. 给定周期函数  $f(t) = (2 - 3\cos 100t)^2$ , 求 (a) 它的平均值; (b) 它的 rms 值.
24. 计算图 11.36 中所示的每个波形的有效值
25. 四个理想独立电压源,  $A\cos 10t$ ,  $B\sin(10t + 45^\circ)$ ,  $C\cos 40t$  和常数  $D$ , 与一个  $4\Omega$  电阻相串联. 如果 (a)  $A = B = 10$  V,  $C = D = 0$ ; (b)  $A = C = 10$  V,  $B = D = 0$ ; (c)  $A = 10$  V,  $B = -10$  V,  $C = D = 0$ ; (d)  $A = B = C = 10$  V,  $D = 0$ ; (e)  $A = B = C = D = 10$  V, 求电阻消耗的平均功率.
26. (a) 在图 11.39 中  $R$  取何值可使两个电感上的 rms 电压相等? (b) 该 rms 电压值是多少? (c) 用 PSpice 证实你的答案.

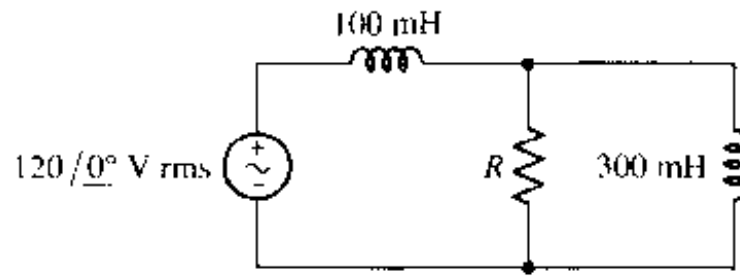


图 11.39

27. 在图 11.40 中每个波形的周期均为 3 s, 它们有些类似。(a) 计算每个波形的平均值; (b) 确定它们的有效值; (c) 用 PSpice 证实你关于锯齿波的答案。

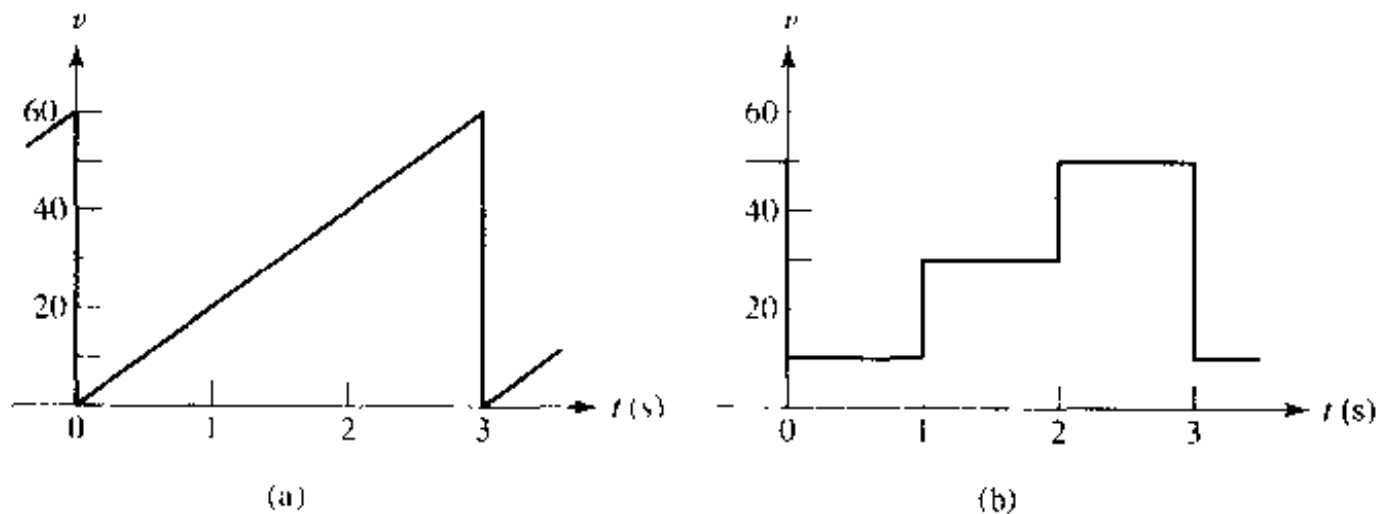


图 11.40

28. 在图 11.39 中用  $1 \mu\text{F}$  电容替换  $100 \text{ mH}$  电感, 用  $3 \mu\text{F}$  电容替换  $300 \text{ mH}$  电感。(a)  $R$  取何值可使流经两个电容的 rms 电流相等? (b) 该 rms 电流值是多少? (c) 用 PSpice 证实你的答案
29. 一电压波形的周期为 5 s, 在时间间隔  $0 < t < 5 \text{ s}$  内, 波形表示为  $v(t) = 10t[u(t) - u(t-2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t-3) - u(t-5)] \text{ V}$  求波形的有效值。
30.  $1 \text{ k}\Omega$  电阻和  $2 \text{ H}$  电感的串联组合, 在任何时候消耗功率不允许超过  $250 \text{ mW}$ 。假定正弦电流的  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ , 所允许的最大 rms 电流为多少?
31. 在图 11.41 中, 让  $\mathbf{I} = 4\angle 35^\circ \text{ A rms}$ 。求 (a) 电源提供的平均功率; (b) 提供给  $20 \Omega$  电阻的平均功率; (c) 提供给负载的平均功率; (d) 求电源提供的视在功率; (e) 提供给  $20 \Omega$  电阻的视在功率; (f) 提供给负载的视在功率; (g) 负载 PF 值是多少?

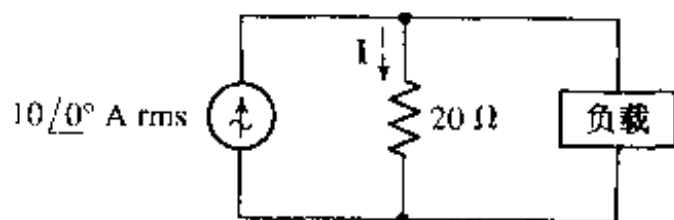


图 11.41

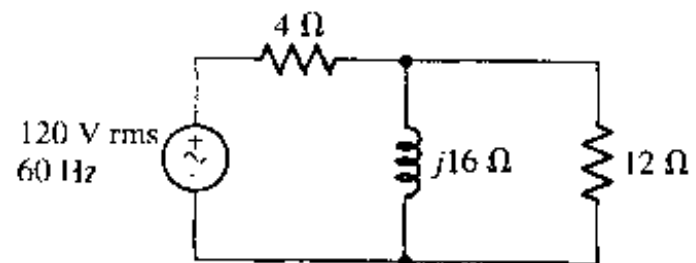


图 11.42

32. (a) 求图 11.42 中电源工作的功率因数; (b) 求电源提供的平均功率; (c) 为使功率因数为 1, 应使用多大的电容与电源并联? (d) 用 PSpice 证实你的答案。
33. 在图 11.43 所示电路中, 令  $\mathbf{Z}_A = 5 + j2 \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_B = 20 - j10 \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_C = 10\angle 30^\circ \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_D =$

- $10\angle 60^\circ \Omega$ 。求提供给每个负载的视在功率和电源产生的视在功率。
34. 导出式(11.28)
35. 考虑一个工作频率为  $f = 50 \text{ Hz}$  的网络, 它与负载串联, 公共电流为  $10\angle 0^\circ \text{ A rms}$ 。这样的系统是具有并联负载和公共电压系统的对偶系统。在串联系统中, 要取消负载需要将负载短路。开路将引发各种火灾。本系统有两个元件:  $Z_1 = 30\angle 15^\circ \Omega$  和  $Z_2 = 40\angle 40^\circ \Omega$ 。(a) 电源工作的 PF 为多少? (b) 为使功率因数达到 0.9 需要安装多大的串联电容?
36. 组合负载由三个并联负载组成。一个 PF 为 0.92 滞后, 吸收 100 W 功率; 另一个 PF 为 0.8 滞后, 吸收 250 W 功率; 第三个 PF 为 1, 吸收 150 W 功率。电源为电压源  $V_s$  与  $10 \Omega$  电阻串联。所有负载都必须工作在  $115 \text{ V rms}$  下。确定 (a) 流过电源的 rms 电流; (b) 组合负载的 PF 值。
37. 图 11.44 中负载 PF = 0.8 滞后, 吸收 10 kVA 功率。如果  $|I_L| = 40 \text{ A rms}$ , 为使电源工作于 PF = 0.9 滞后, 应安装多大的电容?

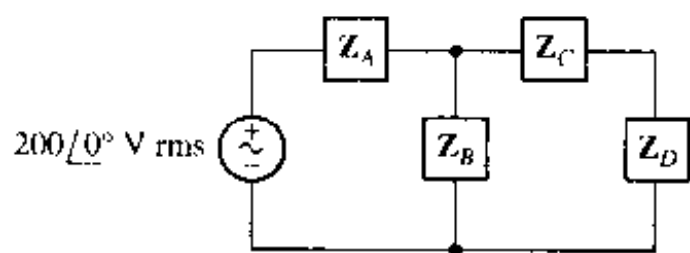


图 11.43

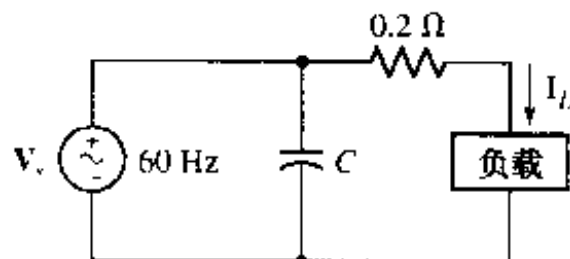


图 11.44

38. 考虑图 11.45 电路。为使连接电源的总负载 PF 值提高到 0.92 滞后, 应增加多大电容? (a) 如果电容与  $100 \text{ mH}$  电感串联; (b) 与  $100 \text{ mH}$  电感并联。用 PSpice 证实你对 (a) 和 (b) 的回答。
39.  $250 \text{ V rms}$  系统对三个并联负载供电。第一个在单位功率因数下吸收  $20 \text{ kW}$ ; 第二个 PF = 0.8 滞后, 用电  $25 \text{ kVA}$ ; 第三个 PF 为 0.75 滞后, 吸收  $30 \text{ kW}$  功率; (a) 求电源提供的总功率; (b) 电源提供的总视在功率; (c) 电源工作的 PF 值。
40. 一个烤面包机月用电峰值  $200 \text{ kW}$ , 月电抗需求为  $280 \text{ kVAR}$ 。为补偿损失和鼓励用户提高 PF 值, 某地方电力公司对超过标准的电抗用量罚款  $\$0.22/\text{kVAR}$ , 标准电抗用量按 0.65 乘以平均功率用量计算; (a) 利用以上费率表计算用户与 PF 罚款有关的年度费用; (b) 计算电力公司制定政策所根据的目标 PF 值; (c) 如果电力公司提供补偿电容的花费为每增加  $100 \text{ kVAR}$  为 200 美元, 每增加  $200 \text{ kVAR}$  为 395 美元, 用户的最佳解决方案是什么? (d) 校正功率因数所需的实际电容是多大(以法拉为单位)?
41. 分析图 11.46 的电路, 求 5 个电路元件分别吸收的复功率。

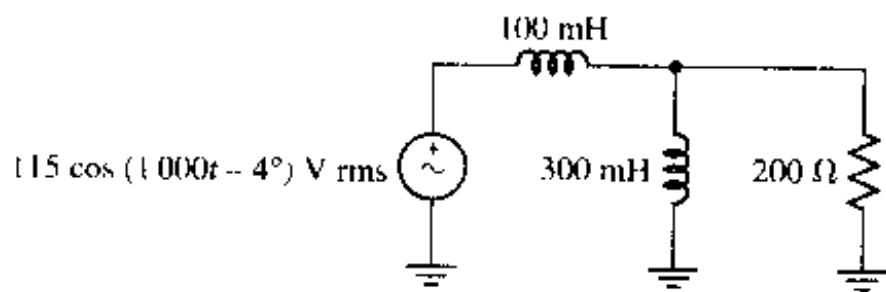


图 11.45

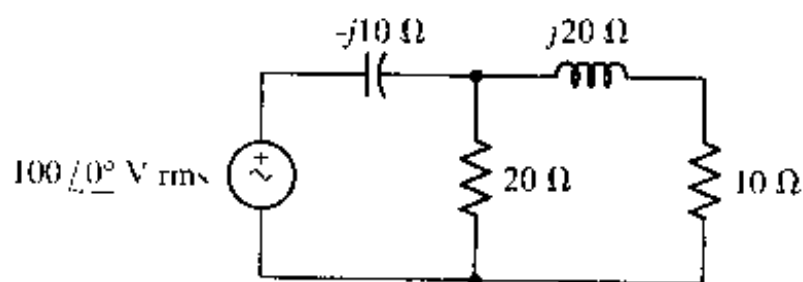


图 11.46

42. 图 11.47 中的两个电源工作于同一频率。求每个电源产生的复功率和每个无源电路元件吸收的复功率。
43. 求向负载提供的复功率, 负载 (a) PF 为 0.75 超前, 吸收 500 VA; (b) PF 为 0.75 超前, 吸收 500 W; (c) PF 为 0.75, 吸收 -500 VAR。
44. 电容阻抗  $Z_c = -j120 \Omega$  与负载  $Z_L$  并联, 它们与  $V_s = 400 \angle 0^\circ \text{ V rms}$  电源并联, 电源产生的复功率为  $1.6 + j0.5 \text{ kVA}$ 。求 (a) 提供给  $Z_L$  的复功率; (b)  $Z_L$  的 PF 值; (c) 电源的 PF 值。
45. 230 V rms 电源向三个并联连接的负载供电: PF 为 0.8 滞后, 吸收 1.2 kVA; PF 为 0.9 滞后, 吸收 1.6 kVA 和单位 PF 吸收 900 W。求 (a) 电源电流的幅值; (b) 电源工作的 PF 值; (c) 电源提供的复功率。
46. 电压源  $339 \cos(100\pi t - 66^\circ) \text{ V}$  与  $1 \text{ k}\Omega$  纯电阻相连。(a) 电压源的有效电压是多少? (b) 负载吸收的峰值瞬时功率是多少? (c) 负载吸收的最小瞬时功率是多少? (d) 计算电源提供的视在功率; (e) 计算电源提供的无功功率; (f) 提供给负载的复功率是多少?
47. 电压源  $339 \cos(100\pi t - 66^\circ) \text{ V}$  与  $150 \text{ mH}$  纯电感相连。(a) 电路中的有效电流是多少? (b) 负载吸收的峰值瞬时功率是多少? (c) 负载吸收的最小瞬时功率是多少? (d) 计算电源提供的视在功率; (e) 计算电源提供的无功功率; (f) 提供给负载的复功率是多少?
48. 对于图 11.23 的电路,  $v_s = 5 \cos t \text{ V}$ 。(a) 提供给  $10 \text{ k}\Omega$  电阻的峰值瞬时功率是多少? (b) 计算提供给  $10 \text{ k}\Omega$  电阻的无功功率; (c) 求提供给  $10 \text{ k}\Omega$  电阻的视在功率; (d) 电源提供的复功率是多少?
49. 在图 11.48 中, 求 (a) 提供给每个无源元件的复功率; (b) 指出上述功率之和等于电源产生的复功率; (c) 这个结论对视在功率也适用吗? (d) 电源提供的平均功率是多少? (e) 电源提供的无功功率是多少?

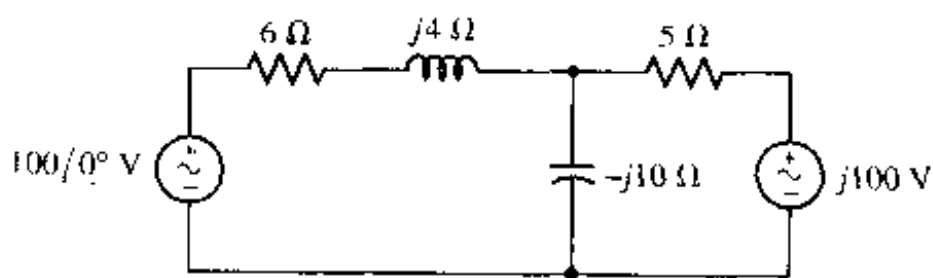


图 11.47

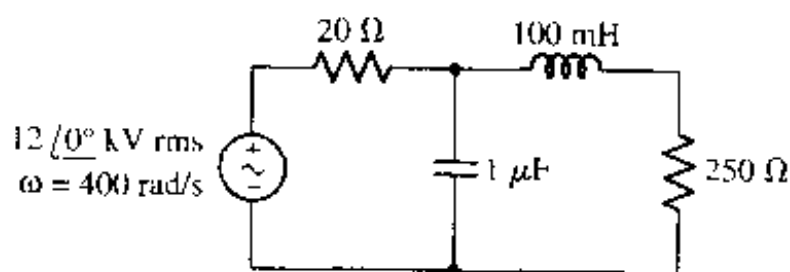


图 11.48

50. 负载的工作电压为  $2300 \text{ V rms}$ , 功率因数为 0.812 滞后, 吸收电流为  $28 \text{ A rms}$ 。求 (a) 以安培为单位的峰值电流; (b) 假定工作频率为 60 Hz, 在  $t = 2.5 \text{ ms}$  时的瞬时功率; (c) 负载吸收的有功功率; (d) 负载的复功率; (e) 视在功率; (f) 阻抗; (g) 无功功率。

## 第 12 章 多相电路

本章要点:

- 理解单相和多相系统的区别
- 熟悉对 Y 形和  $\Delta$  形三相电源的处理
- 熟悉对 Y 形和  $\Delta$  形网络的处理
- 掌握三相系统的按相(per-phase)分析法

### 12.1 引言

电力部门向居民和工业部门提供的是正弦波形式的电流或电压,通常称为交流电(AC)。大多数北美居民使用的是频率为 60 Hz,有效值为 120 V 的正弦交流电。在世界的其他地区,则是频率为 50 Hz,有效值为 240 V 的正弦交流电。最初,托马斯·爱迪生提议电力部门采用直流方式来传输电能,但电力领域的先驱尼古拉·特斯拉和乔治·韦斯汀豪斯强烈提倡使用交流方式进行传输。最后,人们采纳了后者的建议。

家用电器的电压有效值通常是 120 V,但也有 110 V 或 115 V(美国标准),这取决于生产厂商。在确定交流电功率需求的峰值时,交流电系统的瞬态响应是很重要的,因为大多数电器在启动时所需要的电流比稳定运转时大很多。然而,在大多数情况下,所关心的是稳定状态的运行,因此使用相量图分析的方法是很方便的。这里将介绍一种新型电压源——三相电源,它可以用三线或四线配置成 Y 形,也可以用三线配置成  $\Delta$  形,如何配置,取决于设备需要。

### 12.2 多相系统

迄今为止,每当使用术语“正弦源”时,总可以想像一个单一的正弦电压或电流源,它具有一定的幅度、频率和相位。在这一章中,将介绍多相源的概念,主要集中介绍三相系统。利用旋转发电机产生三相电比单相电有其独特的优势,而且三相电的传输在经济效益上也比较高。虽然我们所接触的电器设备大部分都是使用单相电,然而使用三相电的设备也不少见,尤其是在制造业的设备中更为普遍。特别是,大型制冷系统以及机械设备中的电机线圈大多是按三相电要求绕制的。一旦熟悉了多相系统的原理就会发现,对于其他的应用,很容易从多相系统的一条“腿”获得单相电。

现在考虑一种最常见的多相系统——三相系统。源有三个接线端(不计中线或地线),用电压表测量,会发现任意两端的电压都是等幅度的正弦波,但是这些电压的相位不同;每一个电压与其他两个电压的相位都相差  $120^\circ$ ,相角符号依赖于电压的读取顺序。图 12.1 给出了一组可能的电压关系。平衡负载可以从三个相中取得相等的功率,但是如果其中的一相瞬时为零,由于相位关系,要求其他两相的幅度是原来的一半。任何时刻,总负载获得的瞬时功率均不为零;事实上,总负载上的瞬时功率是常数。这在旋转发电机中是很有利的,因为它保证了

转子上的转矩比单相电源中更稳定,这样就减少了振动

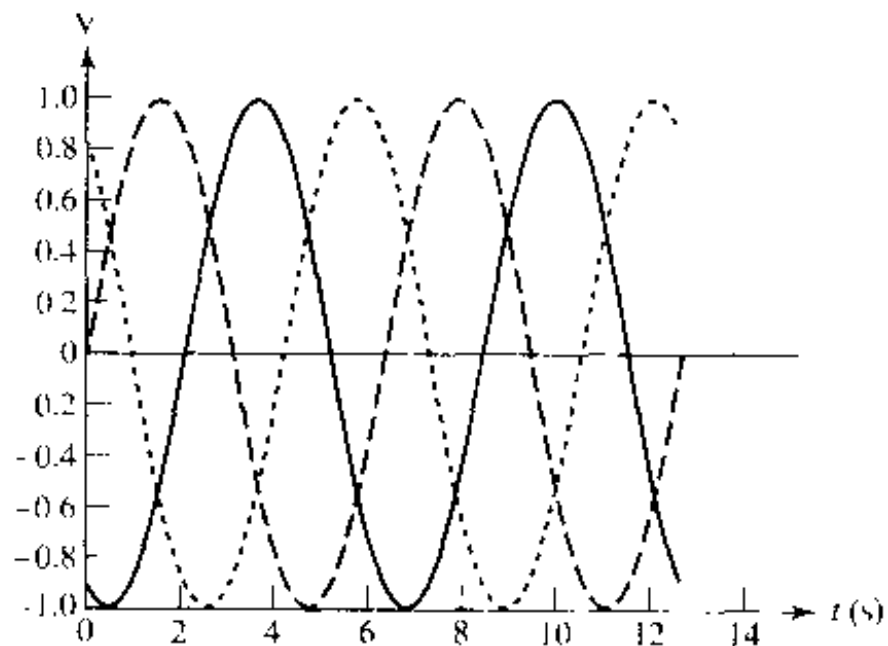


图 12.1 三相电的一个例子,任何一相与其他两相的相位相差为  $120^\circ$  可以看出,在任意的瞬间,只可能有一相的电压为零

对于更多相的使用,例如六相和十二相系统,大多数只限于为大型整流器提供电源。整流器把交流电转变成直流电,使得流过负载的电流保持一个方向,这样负载上的电压符号保持不变。整流器的输出是直流,带有一些脉冲成分或纹波,这些脉冲和纹波随着相数的增多而减弱。

几乎所有的实际多相系统所含的电源都近似于理想电压源或者理想电压源与一个小内阻的串联,而三相电流源在实际中很少使用。

### 12.2.1 双下标符号

使用双下标符号来描述多相电压和电流是很方便的。使用这些符号,电压或电流,例如相量  $\mathbf{V}_{ab}$  或  $\mathbf{I}_m$ , 比简单地描述成  $\mathbf{V}_3$  或  $\mathbf{I}$ , 有更多的含义。一般这样来定义,  $a$  点到  $b$  点的电压定义为  $\mathbf{V}_{ab}$ 。这样,正号就放在  $a$  点,如图 12.2(a) 所示。所以可以认为双下标就等价于一个正负符号对,同时使用两者就多余了。例如,参考图 12.2(b), 可以看到  $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bd}$ 。双下标符号的用处之一在于,基尔霍夫电压定律要求两点之间不管经过的路径有何不同,它们的电压一定相同,因此,  $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bd} = \mathbf{V}_{am} + \mathbf{V}_{md} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bm} + \mathbf{V}_{md}$  等等。这样做的好处是不必参考电路图就可以满足 KVL 条件;即使有一个点,或下标字母没有在图上标出也可以正确地写出方程。例如,可以这样写  $\mathbf{V}_{ax} = \mathbf{V}_{ax} + \mathbf{V}_{mx}$ , 这里的  $x$  可以表示任意一个点。

三相电压的一种表示方法如图 12.3 所示

假设电压  $\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_b, \mathbf{V}_c$  都是已知的:

$$\mathbf{V}_a = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_b = 100 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_c = 100 \angle -240^\circ \text{ V}$$

这样,电压  $\mathbf{V}_{ab}$  就可以计算出来,需要注意它们的下标:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \\ &= 100 \angle 0^\circ - 100 \angle -120^\circ \text{ V} \\ &= 100 - (-50 - j86.6) \text{ V} \\ &= 173.2 \angle 30^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

三个给定的电压和相量  $V_{ab}$  的构造可以从相量图 12.4 上看出来

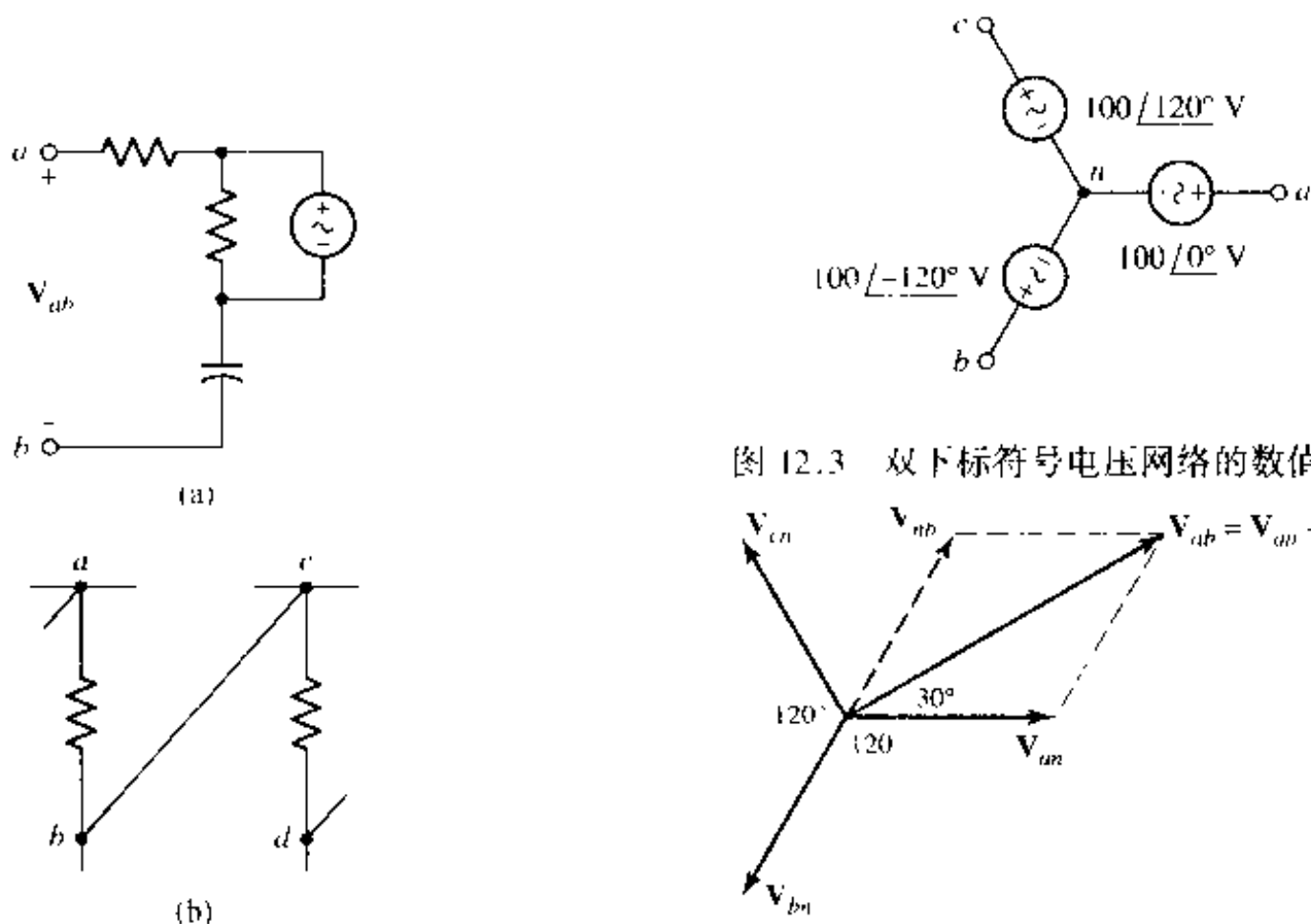


图 12.2 (a)电压  $V_{ab}$  的定义; (b)  $V_{ad} = V_{ab} + V_b + V_{cd} = V_{ab} + V_{cd}$

图 12.3 双下标符号电压网络的数值实例

图 12.4 该相量图解释了双下标法的图解应用: 在图 12.3 所示网络中如何获得  $V_{ab}$

双下标符号也可以应用于电流上。定义电流  $I_{ab}$  是从  $a$  到  $b$  的最短路径的电流。在考虑的每个电路中, 在  $a$  和  $b$  之间至少要有两条路径, 只有当一条路径明显比其他路径短, 或更直接时, 才使用双下标符号。通常这样的路径只通过一个元件, 这样电流  $I_{ab}$  可以在图 12.5 上正确地表示出来。实际上, 在讨论该电流时, 甚至不需要箭头表示, 下标已经指明其方向。但是, 对图 12.5 电路中的电流  $I_{cd}$  的辨认会使人产生疑惑。

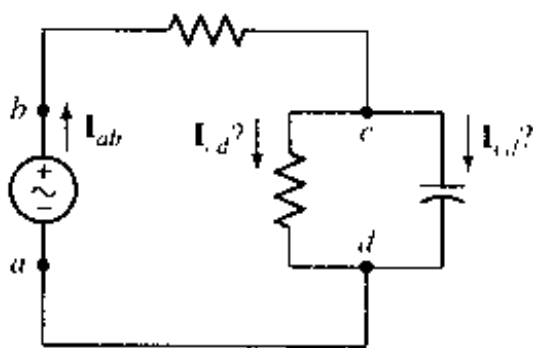


图 12.5 正确使用和错误使用电流双下标标记规则的说明

练习

- 12.1 令  $V_{ab} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $V_{bd} = 40 \angle 80^\circ \text{ V}$ ,  $V_{ca} = 70 \angle 200^\circ$ , 求: (a)  $V_{ad}$ ; (b)  $V_{bc}$ ; (c)  $V_{cd}$ 。
  - 12.2 参看图 12.6 中的电路图, 令  $I_{ff} = 3 \text{ A}$ ,  $I_{dr} = 2 \text{ A}$ ,  $I_{hd} = -6 \text{ A}$ , 求 (a)  $I_{cd}$ ; (b)  $I_{rf}$ ; (c)  $I_{g}$ 。
- 答案: 12.1:  $114.0 \angle 20.2^\circ \text{ V}$ ;  $41.8 \angle 145.0^\circ \text{ V}$  12.2:  $-3 \text{ A}$ ;  $7 \text{ A}$ ;  $7 \text{ A}$



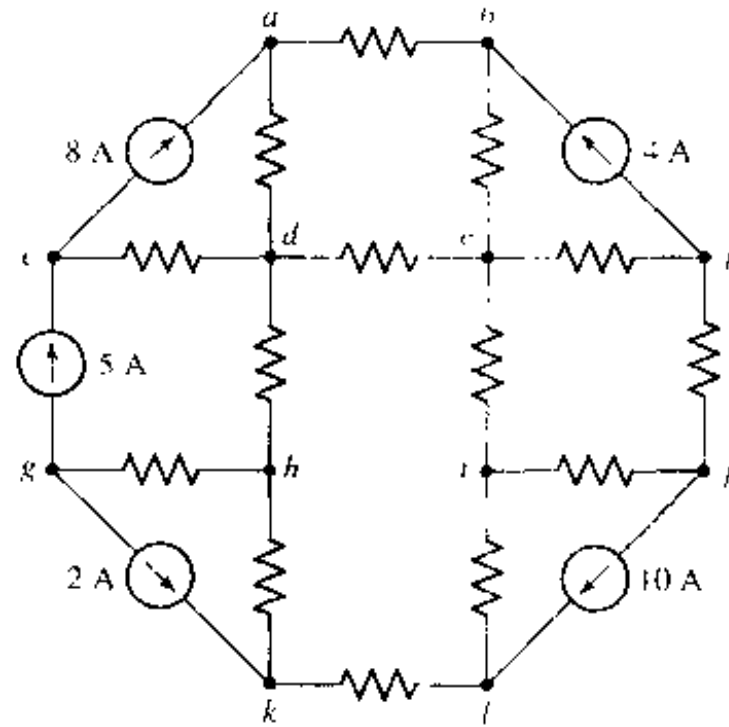


图 12.6

### 12.3 单相三线系统

单相三线电源是这样定义的,一个电源有三个输出端,如图 12.7(a)中的  $a, n$  和  $b$ , 在这里,相量电压  $V_{an}$  和  $V_{nb}$  是相等的。电源可以用两个相同的电压源组成;在图 12.7(b)中,  $V_{an} = V_{nb} = V_l$ 。很明显,  $V_{ab} = 2V_{an} = 2V_{nb}$ 。因此,这样的电源可以给负载提供两种电压。通常的家用电器都是单相三线制的,允许工作在 110 V 和 220 V。高电压的应用通常是那些需要较大功率的应用,相同的功率下,高电压工作时需要的电流小。这样,电器中、家庭中的电力布线以及发电厂的电力分配系统都可以安全地使用较细的导线。大电流应用必须使用较粗的导线,以降低由于导线电阻产生的热量。

之所以称之为单相,是因为电压  $V_{an}$  和  $V_{nb}$  是相等的,而且有相同的相角。然而,从另一个观点来看,边线和中线(通常称之为中性线)之间的电压,它们的相角恰好相差  $180^\circ$ 。也就是说  $V_{an} = -V_{bn}$ , 即  $V_{an} + V_{bn} = 0$ 。在后面的章节中将看到,平衡的多相系统就是由一组等幅度相等、相角之和为零的电压合成。从这个观点上看,单相二线系统实际上就是一个平衡的两相系统。然而,“两相”这个术语传统上是用于由两个相角相差  $90^\circ$  的电压源合成的不平衡系统。

下面考虑一个单相三线系统,每一条边线与中线之间都接一个相同的负载  $Z_p$  (图 12.8)。首先假设导线是理想导线

既然:

$$V_{an} = V_{nb}$$

那么:

$$I_{an} = \frac{V_{an}}{Z_p} = I_{nb} = \frac{V_{nb}}{Z_p}$$

所以:

$$I_{an} = I_{nb} + I_{na} = I_{nb} - I_{an} = 0$$

这样,在中线里并没有电流流过,它可以省略掉而又不会改变系统的电流或电压。如果两个负

载相同,并且两个电源相同,就可以得出这一结果。

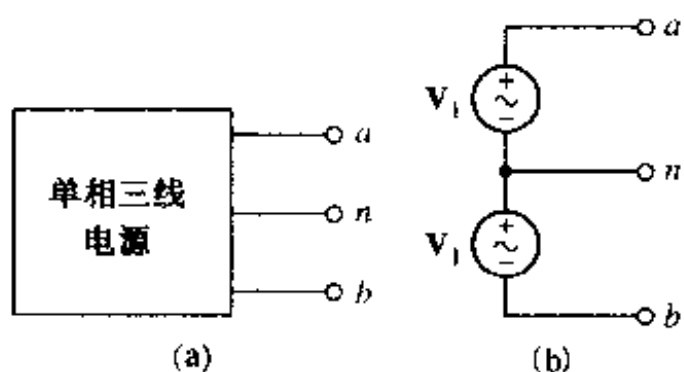


图 12.7 (a)单相三线电源;(b)用两个等同的电压源表示一个单相三线电源

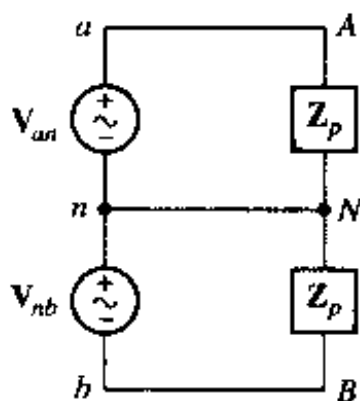


图 12.8 一个简单的单相三线系统。两个负载是相同的,中线电流为零

### 12.3.1 有限导线阻抗的影响

下面考虑导线具有有限阻抗的影响。如果导线  $aA$  和  $bB$  有相同的阻抗,该阻抗可被加到  $Z_p$  上,结果还是两个相同的负载,中线电流仍为零。现在让中线也有阻抗  $Z_n$ 。不需要经过仔细分析就可以知道由于电路的对称性,中线电流仍为零。但是,由于该阻抗与每一个电源都形成一个回路,这样,对中线电流,它就是一个平衡的或对称的负载;中线上的非零阻抗不会破坏电路的对称性。

最通用的单相三线系统在每一个边线和中线之间以及两个边线之间有不等的负载;两个边线上的阻抗可以看做大致相等,但中线的阻抗通常很大。现在考虑这样的一个系统,该系统有不平衡的负载,我们关心流过中线的电流,以及系统传送功率到非平衡负载的总效率。

**例题 12.1** 分析图 12.9 所示的系统,求出三个负载中每个负载所消耗的功率,以及中线和两条边线的功率损耗

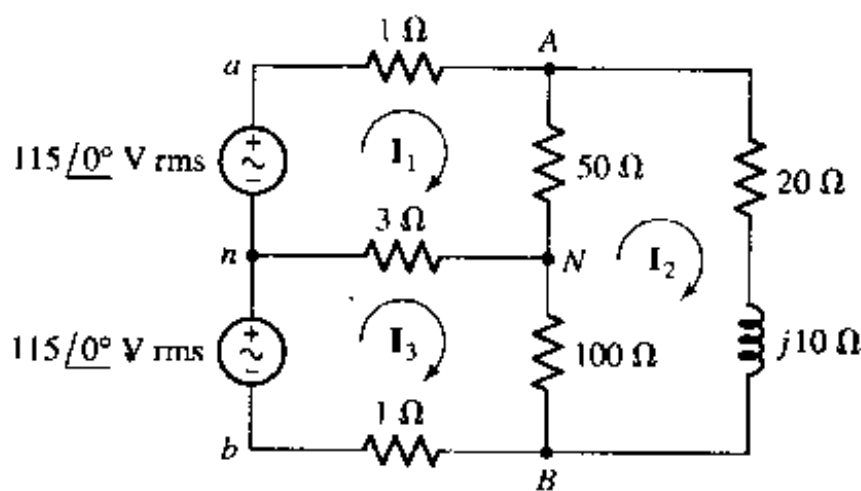


图 12.9 一个典型的单相三线系统

● 弄清问题的目标:

电路里的三个负载是:  $50\ \Omega$  电阻、 $100\ \Omega$  电阻、 $(20 + 10j)\ \Omega$  阻抗。两条边线上各有一个  $1\ \Omega$  电阻,中线有一个  $3\ \Omega$  电阻。需要求出通过每一个电阻或阻抗的电流才能求出功率来。

● 收集已知信息:

现在有一个单相三线的系统,在图 12.9 的电路图中做出了详细的标记,要计算的电流是有效电流。

● 选择最适合问题的已有方法:

该电路适合用网孔法来分析,因为它有三个非常明显的网孔。分析的结果将是一组网孔的电流,可以用它们来计算消耗的功率。

● 建立适当的方程组:

三个网孔方程是:

$$-115 \angle 0^\circ + I_1 + 50(I_1 - I_2) + 3(I_1 - I_3) = 0$$

$$(20 + j10)I_2 + 100(I_2 - I_3) + 50(I_2 - I_1) = 0$$

$$-115 \angle 0^\circ + 3(I_3 - I_1) + 100(I_3 - I_2) + I_3 = 0$$

整理后可以得到下面的三个方程:

$$54I_1 \quad \quad \quad -50I_2 \quad \quad -3I_3 = 115 \angle 0^\circ$$

$$-50I_1 + (170 + j10)I_2 - 100I_3 = 0$$

$$-3I_1 \quad \quad -100I_2 \quad \quad 104I_3 = 115 \angle 0^\circ$$

● 确定是否还需其他信息:

这里有三个方程,三个未知数,所以可以进行求解。

● 试解:

使用科学计算器可以解出相电流  $I_1, I_2, I_3$ , 得:

$$I_1 = 11.24 \angle -19.83^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 9.389 \angle -24.47^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = 10.37 \angle -21.80^\circ \text{ A}$$

边线上的电流是:

$$I_{aA} = I_1 = 11.24 \angle -19.83^\circ \text{ A}$$

和

$$I_{bB} = -I_3 = 10.37 \angle 158.20^\circ \text{ A}$$

中线上的电流是:

$$I_{nN} = I_3 - I_1 = 0.9459 \angle -177.7^\circ \text{ A}$$

每个负载的平均功率是:

$$P_{50} = |I_1 - I_2|^2 \times (50) = 206 \text{ W}$$

$$P_{100} = |I_3 - I_2|^2 \times (100) = 117 \text{ W}$$

$$P_{20+j10} = |I_2|^2 \times (20) = 1763 \text{ W}$$

总的负载功率消耗为 2086 W, 每条边线的损耗是:

$$P_{aA} = |I_1|^2 \times (1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = |I_3|^2 \times (1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nN} = |I_{nN}|^2 \times (3) = 3 \text{ W}$$

导线的总损耗为 237 W。显然,导线很长;否则,边线上如此高的功耗会导致导线过热。

● 证实所得解是否合理和满足要求:

总功耗为  $206 + 117 + 1763 + 237$ , 即 2323 W, 可以通过计算出每一个电压源消耗的功率来检查答案是否正确:

$$P_{an} = 115 \times (11.24) \cos 19.83^\circ = 1\,216 \text{ W}$$

$$P_{bn} = 115 \times (10.37) \cos 21.80^\circ = 1\,107 \text{ W}$$

即 2 323 W。系统的传输效率为：

$$\eta = \frac{\text{负载消耗的总功率}}{\text{电源发出的总功率}} = \frac{2\,086}{2\,086 + 237} = 89.8\%$$

这个数值对于蒸汽机或内燃机来说是不可能达到的，但对于一个设计很好的分布式系统来说却是很低的。如果源和负载不能靠得很近的话，最好使用直径较大的导线来连接。

图 12.10 给出了两个电压源、边线上的电流、中线上的电流的相量图。从图上可以看出， $I_{aA} + I_{bB} + I_{nN} = 0$ 。

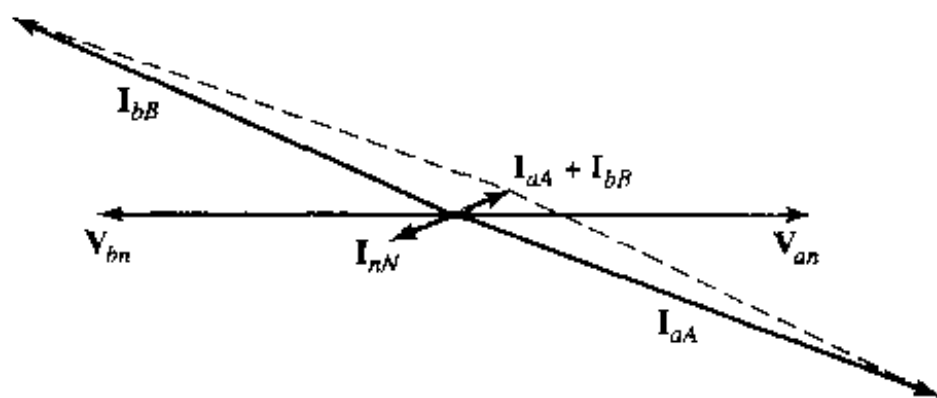


图 12.10 图 12.9 的电路图的电压源和三个电流的相量图。注意到， $I_{aA} + I_{bB} + I_{nN} = 0$

## 练习

12.3 对图 12.9 稍做改动，在两条边线上分别加一个  $1.5 \Omega$  电阻，在中线上加一个  $2.5 \Omega$  电阻。求三个负载上的功率。

答案：153.1 W；95.8 W；1 347 W

## 12.4 三相 Y-Y 形接法

三相源有三个端点，称为线端，第四个端点，即中线 (neutral) 端可以使用也可以不使用。现在先讨论一个有中线的三相源，它可以用三个理想的电压源接成 Y 形，如图 12.11 所示；图中给出了端点  $a, b, c$  和  $n$ 。下面只考虑平衡三相源，定义为：

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

和

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

这三个电压，每个都连接在边线和中线之间，称为相电压。如果任选  $V_{an}$  作为参考，即定义：

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

就可以使用  $V_p$  来表示任何一个相电压的均方根幅度，那么三相源的定义就可以是：

$$V_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad \text{和} \quad V_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$

或

$$V_{bn} = V_p \angle 120^\circ \quad \text{和} \quad V_{cn} = V_p \angle 240^\circ$$