

- 电阻损耗 240 W 功率。 $R_w = 2.3 \Omega$ 。求电源的相电压有效值以及负载相电流有效值。
25. 图 12.33 的电源是平衡的且是正相序列。求:(a) $I_{aA}$ ;(b) $I_{bB}$ ;(c) $I_{cC}$ ;(d)电源所提供的总复功率。
26. 对于图 12.32 所描述的电路, $V_{AB} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,正相序列, $R_w = 200 \text{ m}\Omega$ ,相阻抗  $Z_p$  为一个  $10 \Omega$  的电阻与一个感抗为  $30 \Omega$  的电感的并联。求电源所提供的总功率,功率因数以及传输效率。
27. 图 12.32 所示的平衡三相 Y 形连接的电源,它的  $V_{an} = 140 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,且是正相序列。令  $R_w = 0$ 。平衡三相负载吸收的功率为 15 kW 和正的 9 kVAR。求:(a) $V_{AB}$ ;(b) $I_{AB}$ ;(c) $I_{aA}$ 。
28. 对于图 12.34 所示的平衡三相系统,假设是一个正相序列的平衡电源。如果工作频率是 60 Hz,求下列值的大小,(a) $V_{AN}$ ;(b) $V_{BN}$ ;(c) $V_{CN}$ 。用适当的 Pspice 仿真验证你的答案。

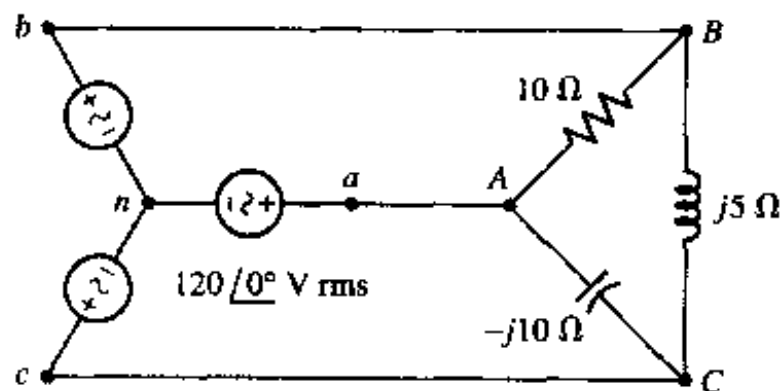


图 12.33

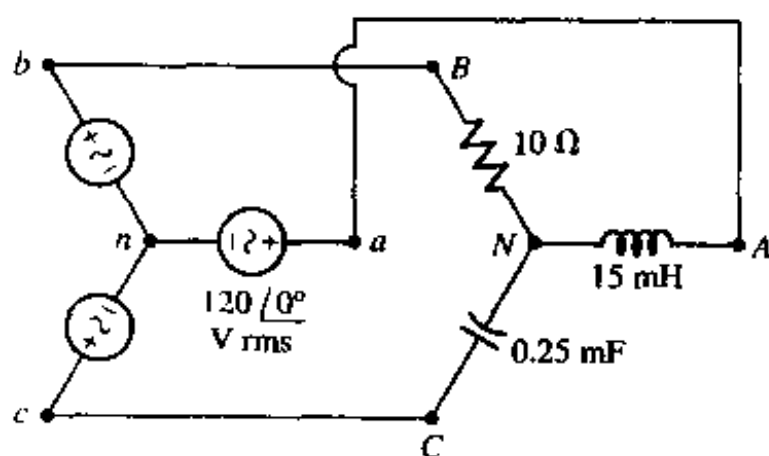


图 12.34

29. (a)在图 12.33 的每一边串入一个  $1 \Omega$  的电阻,重新计算习题 25;(b)用适当的 Pspice 仿真验证你的结果。
30. 一个平衡的三相系统,线电压有效值为 240 V,包含一个每相负载为  $12 + j \text{ k}\Omega$  的  $\Delta$  形负载以及一个每相为  $5 + j3 \text{ k}\Omega$  的 Y 形负载。求线电流,复合负载的总功率以及负载的功率因数。
31. 在图 12.35 所示的电路中,如果端点 A, B 分别连在(a)x 和 y;(b)x 和 z;(c)y 和 z。确定瓦特计的读数(指出是否需要反接两个接点)。

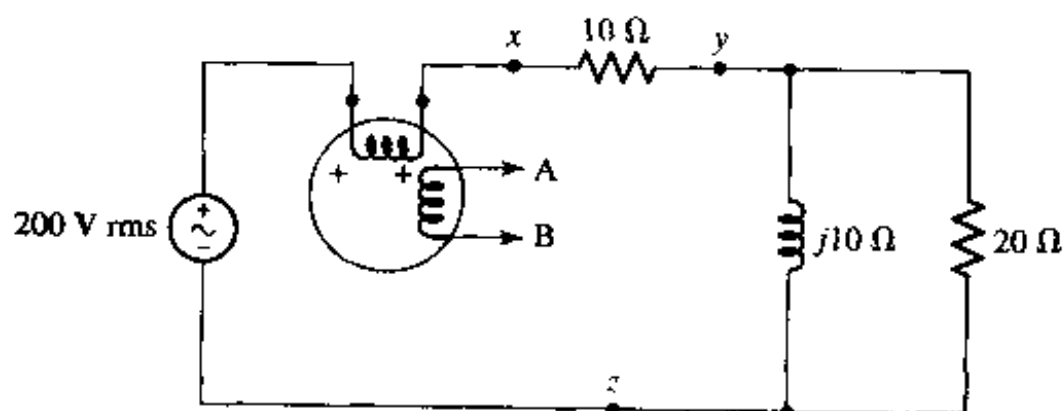


图 12.35

32. 一个瓦特计接入如图 12.36 所示的电路里,使得  $I_1$  进入电流线圈的正端, $V_2$  是电压线圈两端的电压。求瓦特计的读数,并用适当的 PSpice 仿真验证你的结果。
33. 确定图 12.37 所示电路的瓦特计读数。

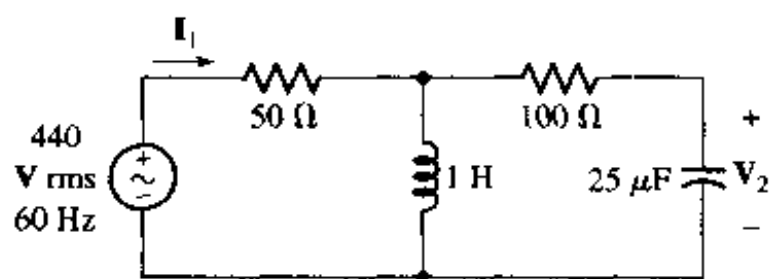


图 12.36

34. (a) 确定图 12.38 所示的两个瓦特计的读数, 其中  $V_A = 100 \angle 0^\circ$  V rms,  $V_B = 50 \angle 90^\circ$  V rms,  $Z_A = 10 - j10 \Omega$ ,  $Z_B = 8 + j6 \Omega$ ,  $Z_C = 30 + j10 \Omega$ ; (b) 它们读数的和是否等于三个负载获取的总功率? 用适当的 PSpice 仿真验证你的答案。
35. 图 12.39 所示的电路中的各值如下:  $V_{ab} = 200 \angle 0^\circ$ ,  $V_{bc} = 200 \angle 120^\circ$ ,  $V_{ca} = 200 \angle 240^\circ$  V rms,  $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 25 \angle 30^\circ \Omega$ ,  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50 \angle -60^\circ \Omega$ 。求每个瓦特计的读数。

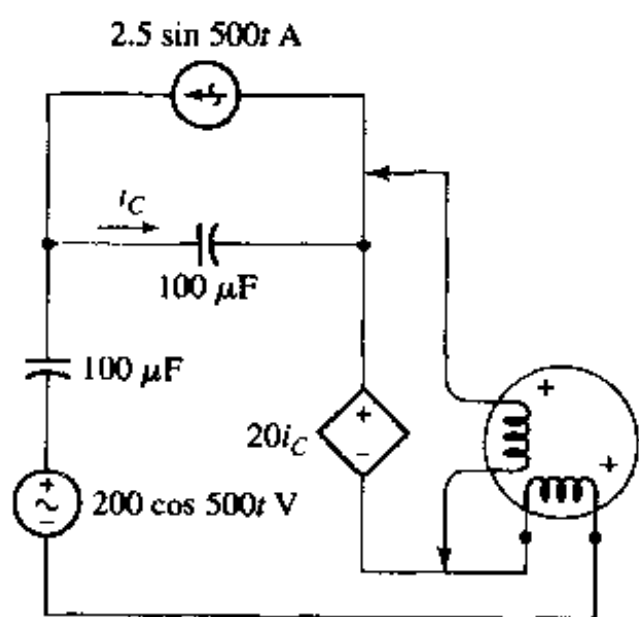


图 12.37

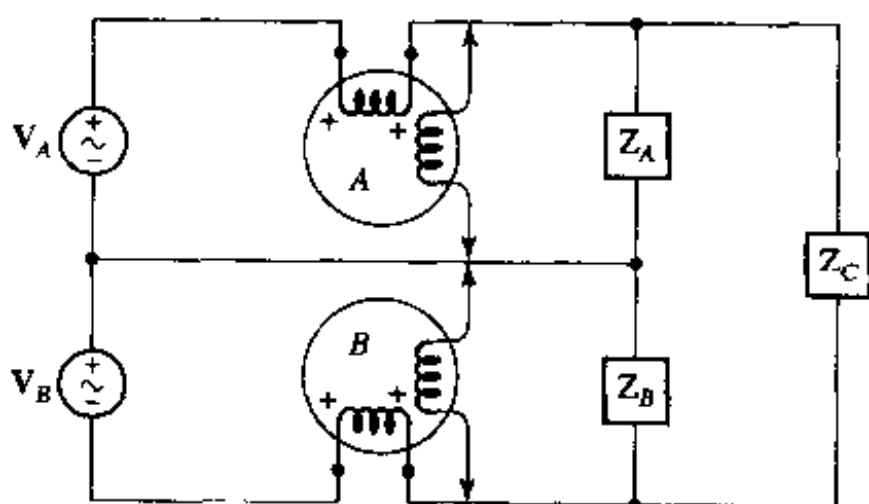


图 12.38

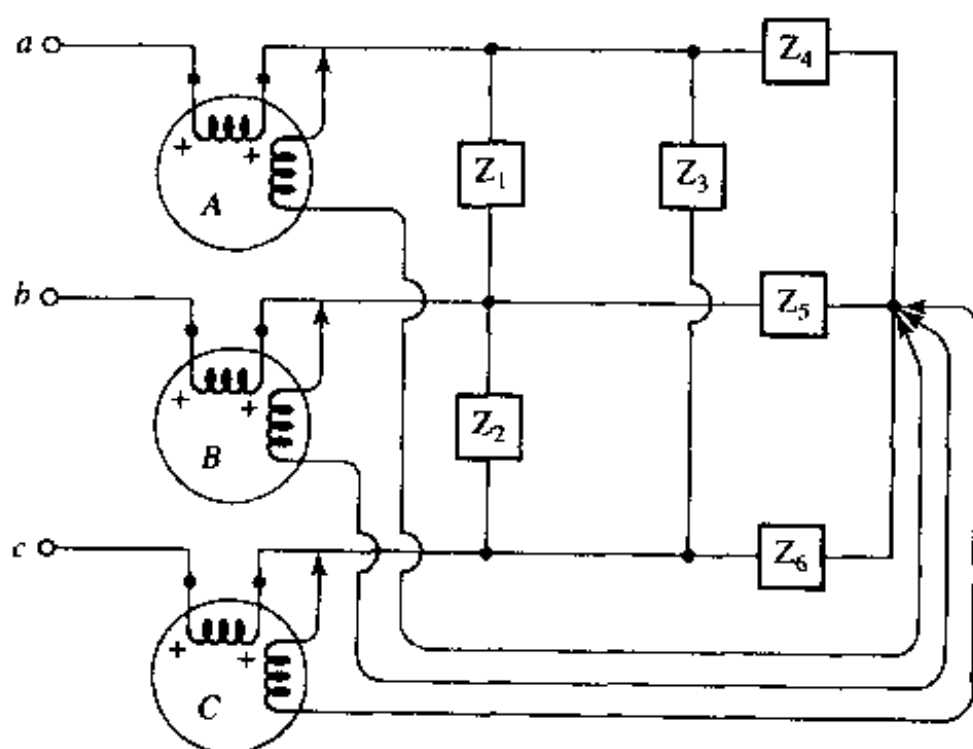


图 12.39

- 
36. 对于图 12.32 中的电路, 如何用下面的两种方法测量负载所吸收的功率: (a) 三瓦特计法; (b) 双瓦特计法。
37. 对于图 12.31 中的电路, 如何用下面的两种方法测量负载所吸收的功率: (a) 三瓦特计法; (b) 双瓦特计法。

## 第 13 章 磁耦合电路

本章要点:

- 理解互感和自感
- 学会正确使用同名端规则
- T形网络和II形网络的相互转换
- 学会分析包含理想变压器的电路
- 利用 PSpice 仿真变压器电路

### 13.1 引言

当电流流过电感时,不管是直流还是交流,电感周围均会产生磁场。在电路领域中,通常称之为穿过线圈的磁通,它等于线圈磁场垂直分量的平均值与线圈截面积的乘积。当线圈中的一个环产生的时变磁场穿过另一个环时,第二个环的导线两端将会产生电压。为了将这种现象和前面介绍的“电感”区别开来,下面定义一个新的概念,称为“互感”,而将前面介绍的“电感”称为“自感”。

不存在“互感”这样的设备,但却有一种源于这个概念的非常重要的设备——变压器。变压器由两组间隔很近的线圈组成,通常用来升高或降低交流电压的幅度,根据实际需要而定。所有需要在直流电流下工作但却使用市电进行供电的电器,在进行整流之前要先用变压器进行变压,以将电压调整到合适的范围。通常采用二极管来进行整流,所有电子学导论的教材中都会有关于二极管的介绍。

### 13.2 互感

在第 7 章中,用端电压和电流的关系来定义电感:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

上式使用了无源符号规则。这个电流 - 电压特性建立在以下两个假定的基础上:

1. 磁通是由线性电感中的电流产生的,且与此电流成正比。
2. 电压是由时变磁场产生的,且与磁场随时间的变化率或磁通随时间的变化率成正比。

#### 13.2.1 互感系数

互感是在电感的基础上稍做推广而得到的。当一个线圈有电流流过时,该线圈周围将出现磁通,同时,该线圈附近的另一个线圈也会出现磁通。第二个线圈周围的时变磁通将使得此线圈的两端产生电压,该电压与流过第一个线圈的电流随时间的变化率成正比。图 13.1(a)画出了两个线圈  $L_1$  和  $L_2$  的简单模型,它们之间的距离足够近,使得流过  $L_1$  的电流  $i_1(t)$  产生的

磁通在  $L_2$  的两端产生开路电压  $v_2(t)$ 。这时先不考虑符号关系,定义互感系数(或简称为互感)  $M_{21}$  为:

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (13.1)$$

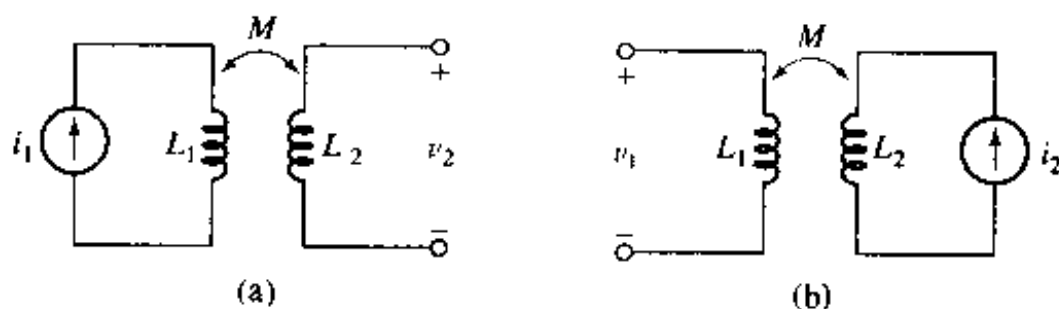


图 13.1 (a)  $L_1$  上的电流  $i_1$  在  $L_2$  上产生开路电压  $v_2$ ;  
(b)  $L_2$  上的电流  $i_2$  在  $L_1$  上产生开路电压  $v_1$

$M_{21}$  的下标排列顺序表示  $L_1$  上的电流源在  $L_2$  上产生的电压响应。如果将系统反过来,如图 13.1(b)所示,这时可以得到:

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (13.2)$$

不过,并不需要两个互感系数,后面将使用能量关系来证明  $M_{12}$  和  $M_{21}$  是相等的,即  $M_{12} = M_{21} = M$ 。两个线圈之间的互耦关系可以用双向箭头来表示,如图 13.1(a)和图 13.1(b)所示。

互感的单位为亨利(henry),和电阻、电感和电容一样,也是一个正的量<sup>①</sup>。不过,电压  $M di/dt$  则是可正可负的,这要看在某一特定时刻的电流是增大还是减小。

### 13.2.2 同名端规则

电感是一个双端元件,因此可以用无源符号规则来确定电压  $L di/dt$  或  $j\omega LI$  的符号。如果电流从正的电压参考端流入,则取其符号为正。不过,这种规则却不适合于互感,因为互感含有四个端子。有几种方法可以用于选取正确的符号,其中包括同名端规则,或者通过考察每个线圈的缠绕方向来判断。下面将使用同名端规则来选取符号,只是简单考虑线圈的物理结构,对于只有两个线圈的情况,没有必要使用其他的特殊符号。

同名端规则使用两个粗点来表示相互耦合的两个线圈的相对极性,每个线圈的一端各标一个点。采用下面的方法来确定互感电压的符号:

从一个线圈的同名端流入的电流在另一个线圈的(同名端)产生的开路电压的参考极性为正。

因此,图 13.2(a)中,  $i_1$  从  $L_1$  的同名端流入,  $L_2$  中产生的感应电压  $v_2$  在同名端为正,且  $v_2 = M di_1/dt$ 。以前曾经遇到过这样的情况,在选取电路中的电压和电流参考极性时,并不总是能满足无源符号规则,在互感中也存在相同的情况。例如,将  $v_2$  的正参考极性取在非同名端可能更方便一些,如图 13.2(b)所示,此时有  $v_2 = -M di_1/dt$ 。同样,电流也不总是从端同名端

<sup>①</sup> 并不总是假定互感为正,当含有三个或者更多个线圈,且每个线圈与其他所有的线圈均相关时,使用带有符号的互感则特别方便。不过,本书主要讨论两个线圈这种更重要的情况。

流入,比如图 13.2(c)和图 13.2(d)所示的情况。这时,可以得到:

从一个线圈的非同名端流入的电流在另一个线圈的非同名端产生的开路电压的参考极性为正。

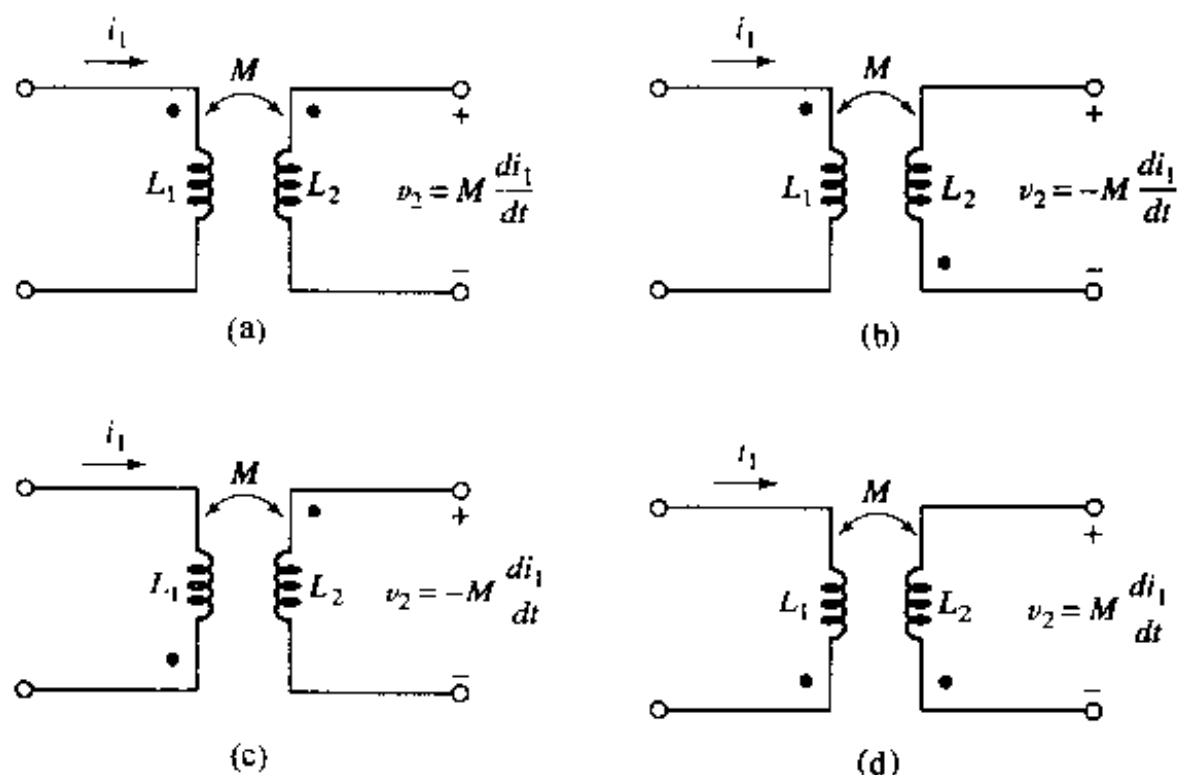


图 13.2 从一个线圈的同名端流入的电流在第二个线圈的同名端产生正的感应电压。从一个线圈的非同名端流入的电流在第二个线圈的非同名端产生正的感应电压

**例题 13.1** 对于图 13.3 所示电流, (a) 如果  $i_2 = 5 \sin 45t$  A,  $i_1 = 0$ , 求  $v_1$ ; (b) 如果  $i_1 = -8e^{-t}$  A,  $i_2 = 0$

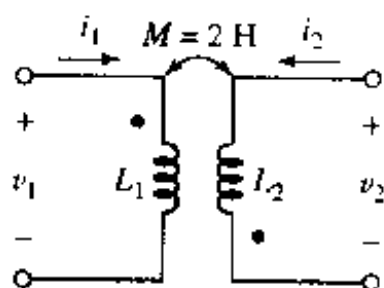


图 13.3 同名端

(a) 因为电流  $i_2$  从右线圈的非同名端流入, 于是左线圈中感应的正电压参考极性为非同名端。因此, 可以得到左线圈两端的开路电压为:

$$v_1 = -(2) \times (45) \times (5 \cos 45t) = -450 \cos 45t \text{ V}$$

这是由于  $i_2$  在右线圈产生的时变磁通在左线圈感应产生的。因为左线圈中没有电流流过, 因此, 左线圈的自感对  $v_1$  没有贡献。

(b) 现在电流是从同名端流入的, 但  $v_2$  的正的参考端为非同名端, 因此:

$$v_2 = -(2) \times (-1) \times (-8e^{-t}) = -16e^{-t} \text{ V}$$

### 练习

13.1 假定  $M = 10$  H,  $i_1 = -2e^{-5t}$  A, 对于(a)图 13.2(a); (b)图 13.2(b)分别求出电压  $v_2$ 。

答案:  $100e^{-5t}$  V;  $-100e^{-5t}$  V

### 13.2.3 组合的互感和自感电压

前面只考虑了开路线圈两端的互感电压。通常情况下,两个线圈的电流均不为零,于是每个线圈中均会产生互感电压,这是由另一个线圈中的电流所产生的。这个互感电压与自感电压无关,但却和自感电压叠加在一起。换句话说, $L_1$  两端的电压将包含两项, $L_1 di_1/dt$  和  $M di_2/dt$ ,每一项均带有符号,这个符号与电流方向和取定的电压参考方向以及同名端的位置均有关。图 13.4(a)所示的电路中,画出了电流  $i_1$  和  $i_2$ ,假定它们均从同名端流入。于是, $L_1$  两端的电压由两部分组成:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

类似地, $L_2$  两端的电压为:

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

在图 13.4(b)中,电流和电压的选取使得  $v_1$  和  $v_2$  的某些项为负。只考察  $i_1$  和  $v_1$  的参考方向,很显然,这里不满足无源符号规则,因此  $L_1 di_1/dt$  的符号必须取为负。同样,对于  $L_2 di_2/dt$  也是如此。 $v_2$  的互电压项的符号可以通过考察  $i_1$  和  $v_2$  的方向而定,因为  $i_1$  从同名端流入,且  $v_2$  的同名端为正参考极性,于是  $M di_1/dt$  的符号必然为正。最后, $i_2$  从  $L_2$  的非同名端流入,且  $v_2$  的非同名端为正参考极性,于是  $v_1$  的互电压项  $M di_2/dt$  的符号也必然为正。因此,有:

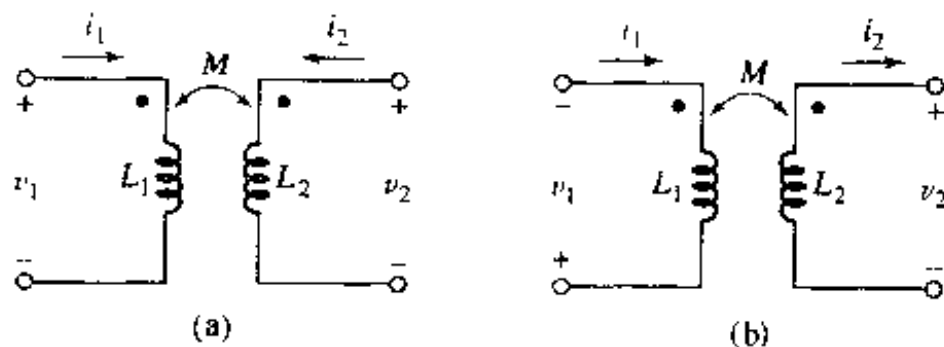


图 13.4 (a)因为  $v_1, i_1$  和  $v_2, i_2$  均符合无源符号规则,因此自感电压均取正号;因为  $i_1$  和  $i_2$  均从同名端流入,且  $v_1$  和  $v_2$  在同名端均产生正的感应电压,因此互感项也取正号;(b)由于  $v_1, i_1$  和  $v_2, i_2$  均不符合无源符号规则,因此自感电压均取负号;由于  $i_1$  从同名端流入, $v_2$  在同名端产生正的感应电压,因此  $v_2$  的互感项取正号;由于  $i_2$  从非同名端流入, $v_1$  在非同名端产生正的感应电压,因此  $v_1$  的互感项也取正号

$$v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

当激励源是频率为  $\omega$  的正弦信号时,采用同样的分析方法,可以得到:

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$$

### 13.2.4 同名端规则的物理根据

下面来看一下同名端规则的物理根据,这样有助于更深刻地理解它。在这里,可以将同名端理解为磁通。图 13.5 中画出了缠绕在一根圆柱上的两个线圈,从图中可以清楚地看出

它们的缠绕方向。现在假定电流  $i_1$  为正并且随时间逐渐增大, 可以用右手定则来确定  $i_1$  在圆柱内产生磁通的方向: 用右手绕在线圈上, 并且使手指指向电流方向, 则大拇指所指的方向即为线圈内磁通的方向。因此  $i_1$  产生向下的磁通, 因为  $i_1$  随时间逐渐增大, 于是磁通 (正比于  $i_1$ ) 也随时间增大。现在来看第二个线圈, 同样假定  $i_2$  为正且随时间逐渐增大, 使用右手定则可知  $i_2$  也产生向下并且逐渐增大的磁通。换句话说, 电流  $i_1$  和  $i_2$  产生相加的磁通。

两个相互耦合的电感的物理结构。考虑每个线圈产生的磁通, 可以发现既可以将两个点放置在每个线圈的上端, 也可以放在每个线圈的下端。

任何一个线圈两端产生的电压都是由于线圈内的时变磁通所引起的。第一个线圈两端的电压在  $i_2$  大于零时要比  $i_2$  等于零时大, 即  $i_2$  在第一个线圈上感应产生的电压与此线圈上的自感电压极性相同。根据无源符号规则可以确定自感电压的符号, 于是就可以知道互感电压的符号。

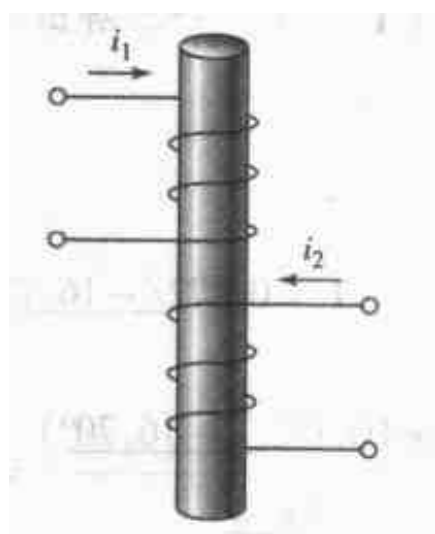


图 13.5 两个相互耦合电感的物理结构。考虑每个线圈产生的磁通, 可以发现既可将两个点放置在每个线圈的上端, 也可以放在每个线圈的下端

同名端规则仅仅通过在每个线圈的其中一端分别用一个点来表示两个线圈的极性关系, 从两个同名端流入的电流会产生相加的磁通, 因而不必考虑线圈的物理构造。很显然, 总是有两种可能的选取同名端的方法, 因为同时将两个线圈一端的名同端移到它们的另一端, 这种磁通相加关系仍然成立。

**例题 13.2** 如图 13.6 所示电路, 求  $400\ \Omega$  电阻两端的电压与电源电压的比值

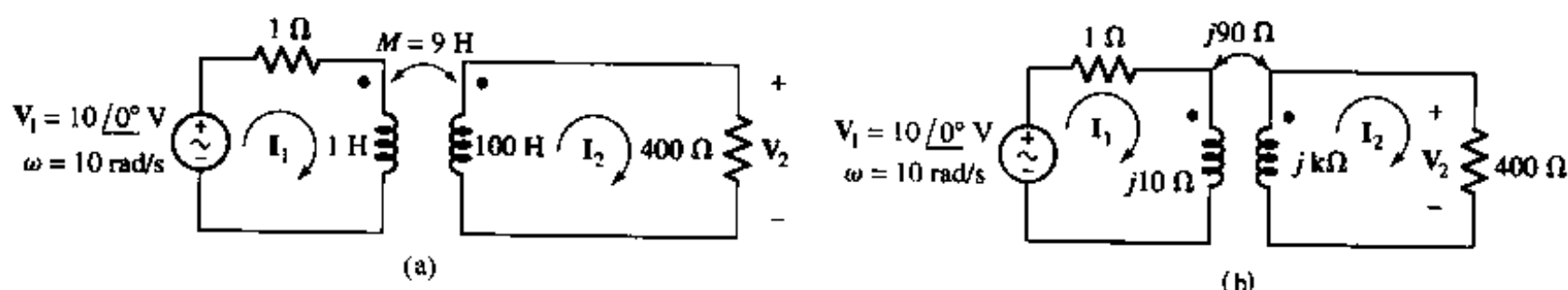


图 13.6 (a)含有互感的电路, 求电压比  $V_2/V_1$ ; (b)将自感和互感用与它们相应的阻抗替换

● 弄清问题的目标:

这里需要根据已知量求出  $V_2$ , 然后将它除以  $10\angle 0^\circ\ \text{V}$ 。

● 收集已知信息:



首先将 1 H 和 100 H 的电感用相应的阻抗形式表示,分别为  $j10\ \Omega$  和  $j\text{k}\Omega$ [如图 13.6(b) 所示]。同时将 9 H 的互感表示为  $j\omega M = j90\ \Omega$ 。

● 选择最适合问题的已有方法:

很明显该电路有两个网孔,因此采用网孔分析是一个不错的选择。

● 建立适当的方程组:

对于左边的网孔,根据同名端规则容易确定互感项的符号。因为  $I_2$  从  $L_2$  的非同名端流入,因此  $L_1$  上的互感电压在非同名端为正。因此:

$$(1 + j10)I_1 - j90I_2 = 10\angle 0^\circ$$

采用类似的方法可以确定第二个网孔的互感项的符号。因为  $I_1$  从同名端流入,于是右边网孔互感项的 (+) 参考端在 100 H 电感的同名端。因此,可以得到:

$$(400 + j1\ 000)I_2 - j90I_1 = 0$$

● 确定是否需要其他信息:

这里有两个方程与两个未知数  $I_1$  和  $I_2$ 。一旦解出这两个电流,然后将  $I_2$  乘以  $400\ \Omega$  即可得到  $V_2$ 。

● 试解:

求解这两个方程,可以得到:

$$I_2 = 0.172\angle -16.70^\circ\text{A}$$

因此:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400 \times (0.172\angle -16.70^\circ)}{10\angle 0^\circ} = 6.880\angle -16.70^\circ$$

● 证实所得解是否合理和满足要求:

可以看到,输出电压  $V_2$  的幅度要比输入电压  $V_1$  的幅度大。但是不是总是如此呢? 答案是否定的,在后面的章节中将看到,变压器既可以降低电压,也可以升高电压。不过可以做一个简单的估计,以求得此解答的上下限。如果将  $400\ \Omega$  的电阻用短路线替代,则  $V_2 = 0$ ; 如果将它替换为开路,则  $I_2 = 0$ , 因此:

$$V_1 = 1 + j\omega L_1 I_1$$

以及:

$$V_2 = j\omega M I_1$$

解之,可以得到  $V_2/V_1$  的最大值为  $8.955\angle 5.711^\circ$ 。因此,求得的解答看来至少是合理的。图 13.6(a) 所示电路的输出电压的幅度比输入电压的幅度大,因此,这种电路可以产生电压增益。将这个电压比值看做是关于  $\omega$  的函数也是很有趣的。

为了求出这个电路的  $I_2(j\omega)$ , 列出关于角频率  $\omega$  的网孔方程:

$$(1 + j\omega)I_1 - j\omega 9I_2 = 10\angle 0^\circ$$

以及

$$-j\omega 9I_1 + (400 + j\omega 100)I_2 = 0$$

用代入法解之,可以得到:

$$I_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

因此,得到输出电压和输入电压的比值用  $\omega$  表示的形式:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400I_2}{10} = \frac{j\omega 3600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

有时将这个比值称为电路传输函数,图 13.7 画出了该曲线,它在频率 4.6 rad/s 附近有一个幅度约为 7 的峰值。当频率非常低或者非常高时,传输函数的幅度均小于 1。

除了电压源外,这个电路仍属于无源电路,因此不能将电压增益看做是功率增益。当  $\omega = 10$  rad/s 时,电压增益为 6.88,但理想电压源的端电压为 10 V,传递的功率为 8.07 W,其中只有 5.94 W 传给了  $400 \Omega$  的电阻。可以将输出功率与电源功率的比值定义为功率增益,它等于 0.736。

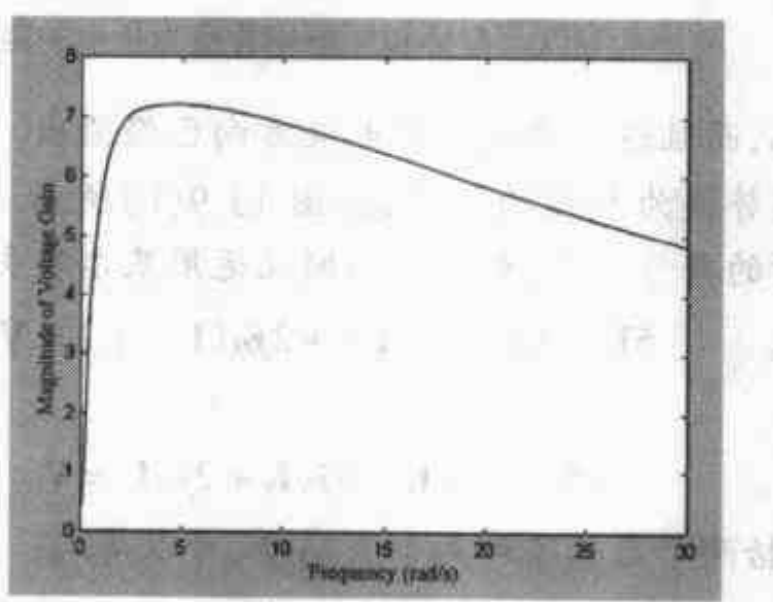


图 13.7 图 13.6(a)所示电路的电压增益  $|V_2/V_1|$  随着  $\omega$  变化的曲线,该曲线由下面的 MATLAB 语句画出:

```
EDU >> w = linspace(0,30,1000);
EDU >> num = j * w * 3600;
EDU >> for indx = 1:1000
den = 400 + j * 500 * w(indx) - 19 * w(indx) * w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
EDU >> plot(w,abs(gain));
EDU >> xlabel('Frequency(rad/s)');
EDU >> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

## 练习

13.2 如图 13.8 所示电路,设  $v_s = 20e^{-1000t}$  V,分别列出左网孔和右网孔的网孔方程。

答案:  $20e^{-1000t} = 3i_1 + 0.002 di_1/dt - 0.003 di_2/dt$ ;  $10i_2 + 0.005 di_2/dt - 0.003 di_1/dt = 0$

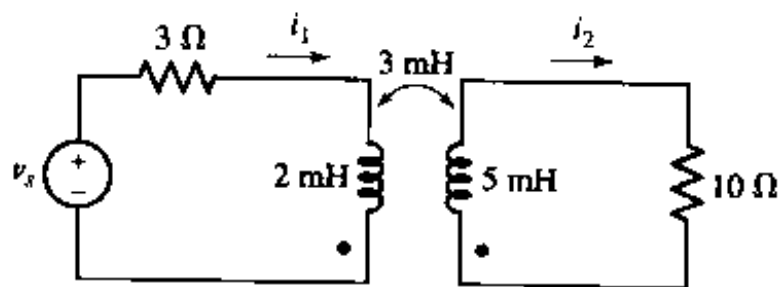


图 13.8

例题 13.3 对于图 13.9(a)所示电路,列出正确的方程组

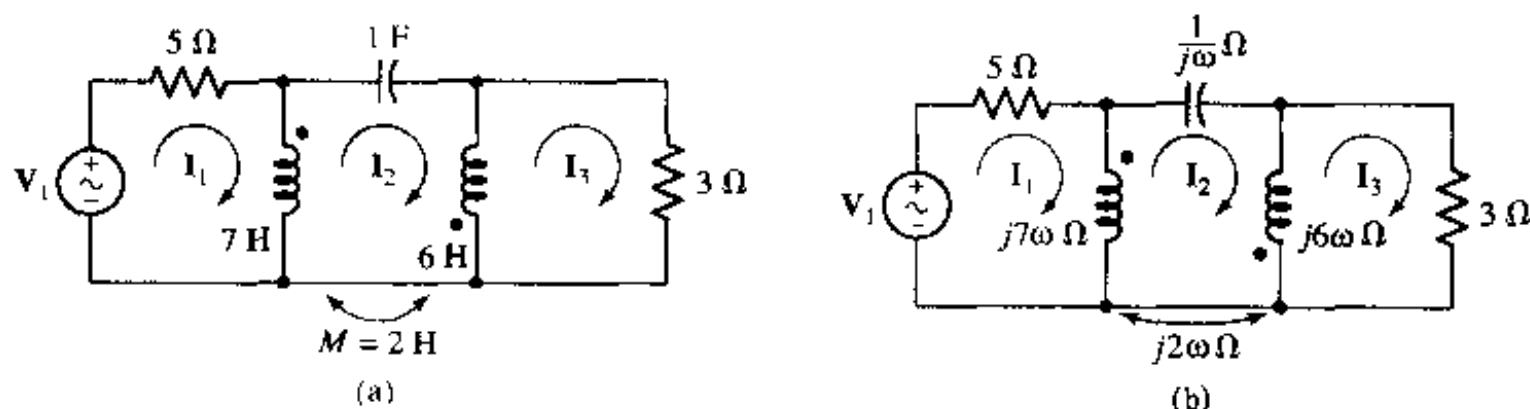


图 13.9 (a)含有互感的三网孔电路;(b)1 F 的电  
容以及自感和互感均替换为相应的阻抗

该电路含有三个网孔,而且这三个网孔的电流方向已经给出。同样地,第一步要做的是将互感和两个自感分别替换为相应的阻抗,如图 13.9(b)所示。设流过第二个线圈的电流为  $(I_3 - I_2)$ ,则互感项的符号为正,对第一个网孔运用基尔霍夫电压定律,有:

$$5I_1 + 7j\omega(I_1 - I_2) + 2j\omega(I_3 - I_2) = V_1$$

或

$$(5 + 7j\omega)I_1 - 9j\omega I_2 + 2j\omega I_3 = V_1 \quad (13.3)$$

注意,第二个方程包括两个自感项和两个互感项,可以得到:

$$7j\omega(I_2 - I_1) + 2j\omega(I_2 - I_3) + \frac{1}{j\omega}I_2 + 6j\omega(I_2 - I_3) + 2j\omega(I_2 - I_1) = 0$$

或

$$-9j\omega I_1 + \left(17j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)I_2 - 8j\omega I_3 = 0 \quad (13.4)$$

最后,对于第三个网孔,有:

$$6j\omega(I_3 - I_2) + 2j\omega(I_1 - I_2) + 3I_3 = 0$$

或

$$2j\omega I_1 - 8j\omega I_2 + (3 + 6j\omega)I_3 = 0 \quad (13.5)$$

可以用任何常规的办法来求解方程(13.3)到方程(13.5)。

### 练习

13.3 对于图 13.10 所示电路,以  $I_1$  和  $I_2$  为自变量,分别对左网孔和右网孔列出合适的网孔方程。

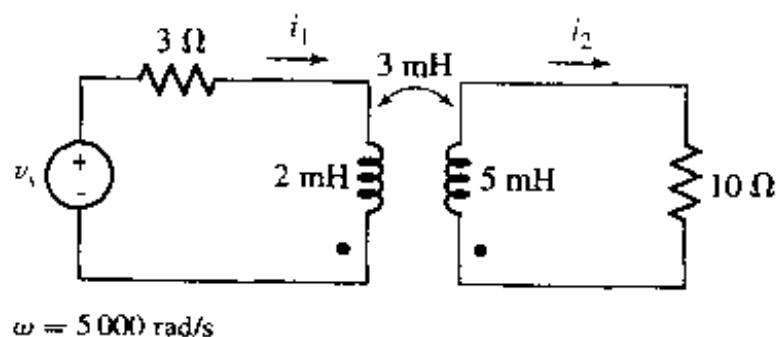


图 13.10

$$\text{答案: } \mathbf{V}_1 = (3 + j10)\mathbf{I}_1 - j15\mathbf{I}_2; \quad 0 = -j15\mathbf{I}_1 + (10 + j25)\mathbf{I}_2$$

### 13.3 能量考虑

现在来考虑储存在一对相互耦合的电感中的能量,这个结论很有用。下面首先来验证  $M_{12} = M_{21}$  的假定,然后来求两个给定电感之间的互感的最大可能值。

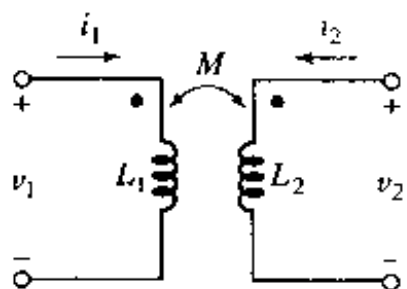


图 13.11 一对耦合线圈,其互感为  $M_{12} = M_{21} = M$

#### 13.3.1 $M_{12}$ 和 $M_{21}$ 之间的同一性

如图 13.11 所示的互耦电感,已经标出了电流、电压和表示极性关系的点。为了证明  $M_{12} = M_{21}$ ,首先令所有的电流和电压均为零,因此网络存储的初始能量为零。然后将右边的两个端点开路,从零开始增大  $i_1$ ,在  $t = t_1$  时增加到某个(直流)定值  $I_1$ 。在任何时刻,从左边网络输入的功率为:

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

从右边网络输入的功率为:

$$v_2 i_2 = 0$$

这是因为  $i_2 = 0$ 。

因此,当  $i_1 = I_1$  时存储在网络中的能量为:

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1 dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

现在让  $i_1$  保持为定值,  $i_1 = I_1$ ,然后在  $t = t_1$  时从零逐渐增加  $i_2$ ,在  $t = t_2$  时增加到某个定值  $I_2$ 。因此,从右边的电源输入的能量为:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2 dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

在这段时间内,虽然  $i_1$  保持不变,左边的电源也同样给网络提供了能量:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

当  $i_1$  和  $i_2$  均增长到相应的定值时,存储在网络中的总能量为:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

现在,采用相反的顺序,让两个电流分别达到与前面一样的最大值,也就是说,首先将  $i_2$  从 0

增加到  $I_2$ , 然后保持  $i_2$  不变, 让  $i_1$  从 0 增加到  $I_1$ 。采用同样的办法, 可以计算出存储的总能量为:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

这两个总能量公式的惟一的不同之处是  $M_{21}$  和  $M_{12}$ , 但是, 由于网络的初态和终态是一样的, 因此, 所求的这两个能量必然是相同的, 于是:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

以及:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (13.6)$$

如果其中一个电流从同名端流入, 而另一个电流则从同名端流出, 则互感能量项要取相反的符号:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad (13.7)$$

虽然式(13.6)和式(13.7)是通过将两个电流的终止值取为定值得到的, 但是这两个“定值”可以为任何值, 因此, 这两个能量表达式就分别表示了  $i_1$  和  $i_2$  的瞬时值为  $I_1$  和  $I_2$  时系统所存储的能量。换句话说, 可以用小写字母来表示它们:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 \pm M [i_1(t)] [i_2(t)] \quad (13.8)$$

式(13.8)所隐含的惟一的假定是当两个电流为零时能量为零。

### 13.3.2 $M$ 的上界

现在可以根据式(13.8)来推导  $M$  的上界。因为  $w(t)$  表示无源网络所存储的能量, 因此, 不管  $i_1, i_2, L_1, L_2$  或  $M$  为任何值,  $w(t)$  均为非负值。假定  $i_1$  和  $i_2$  同为正值或同为负值, 因此它们的积为正值。根据式(13.8), 能量可能取负值的情况是:

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

配方得:

$$w = \frac{1}{2} (\sqrt{L_1} i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 + \sqrt{L_1 L_2} i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

实际的能量不能为负值, 因此等式的右边不能为负。不过, 上式第一项最小可以为 0, 因此, 后面两项的和不能为负。于是可以得到:

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

或

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.9)$$

因此, 互感的取值有一个上界, 它不会大于该互感所在的两个线圈的自感的几何平均值。虽然上面是通过假定  $i_1$  和  $i_2$  取相同的符号来得到上述关系的, 但是如果假定  $i_1$  和  $i_2$  符号相反, 采用类似的方法, 只需要在开始的时候取式(13.8)中的正号, 同样可以得到这个关系。

还可以从物理角度出发来考虑磁耦合情况下的不等关系式(13.9)的正确性。如果认为  $i_2$

为0,而电流  $i_1$  建立磁通把  $L_1$  和  $L_2$  联系起来,很显然  $L_2$  中的磁通不会大于  $L_1$  中的磁通,因为总磁通等于  $L_1$  中的磁通。因此,从数值上看,两个线圈之间可能存在的互感会有一个上界。

### 13.3.3 耦合系数

$M$  与其最大值相接近的程度可以用耦合系数来描述,耦合系数定义为:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (13.10)$$

因为:

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1$$

当两个线圈相距较近,或者由于采用某种缠绕方法使它们的公共磁通较大时,或者由于采用特殊的材料(高导磁率材料)使磁通集中通过该材料,这时耦合系数就比较大。耦合系数接近1的两个线圈称为紧耦合。

**例题 13.4** 如图 13.12, 设  $L_1 = 0.4 \text{ H}$ ,  $L_2 = 2.5 \text{ H}$ ,  $k = 0.6$ ,  $i_1 = 4i_2 = 20 \cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$ 。计算  $t = 0$  时下列参数的值:(a)  $i_2$ ; (b)  $v_1$ ; (c) 系统中存储的总能量

(a)  $i_2(t) = 5 \cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$ , 因此  $i_2(0) = 5 \cos(-20^\circ) = 4.698 \text{ mA}$ 。

(b)  $v_1$  的值包含线圈 1 自感的贡献和线圈 2 互感的贡献。使用同名端规则可得:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

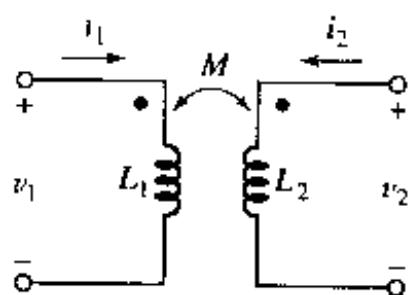


图 13.12

为了求出这个量,需要知道  $M$  的值,这可以根据式(13.10)求得:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0.6 \sqrt{(0.4) \times (2.5)} = 0.6 \text{ H}$$

因此,  $v_1(0) = 0.4[-10 \sin(-20^\circ)] + 0.6[-2.5 \sin(-20^\circ)] = 1.881 \text{ V}$ 。

(c) 将两个电感中所存储的能量相加即可以求得总能量,由于这两个线圈相互耦合,因此总能量由三部分组成。电流从同名端流入,于是:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 + M [i_1(t)][i_2(t)]$$

将(a)中求得的结果  $i_2(0) = 4.698 \text{ mA}$  以及  $i_1(0) = 4i_2(0) = 18.79 \text{ mA}$  代入,可以求出这两个线圈在  $t = 0$  时所存储的能量为  $151.2 \mu\text{J}$ 。

### 练习

13.4 图 13.13 电路中  $i_1 = 2 \cos 10t \text{ A}$ , 如果  $k = 0.6$ , 分别求出  $t = 0$  时, 在下列情况下该无源网络中所存储的能量:(a)  $x$  和  $y$  开路;(b)  $x$  和  $y$  短路。

答案: 0.8 J; 0.512 J

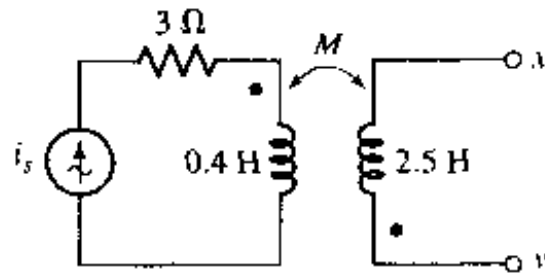


图 13.13

## 13.4 线性变压器

现在将应用前面所学的关于磁耦合的知识来分析两种实际的设备, 它们都可以用含有互感的模型来表示。这两种设备都属于变压器, 可以将变压器定义为包含两个或多个耦合线圈的网络。这一节将分析线性变压器, 这是实际的线性变压器的非常好的模型, 线性变压器主要工作于射频或者更高的频率。下一节将分析理想变压器, 这是一种含有磁芯的实际变压器的理想模型, 其耦合系数为 1, 其中磁芯由某种磁性材料制成, 通常是铁合金。

图 13.14 画出了一个变压器并标出了它的两个网孔电流。第一个网孔通常含有电源, 称为初级, 第二个网孔通常含有负载, 称为次级。标为  $L_1$  和  $L_2$  的线圈也分别称为变压器的初级和次级。如果变压器是线性的, 意味着它不含磁性材料(磁性材料会导致非线性的“磁通 - 电流”关系)。不过, 因为不含磁性材料, 其耦合系数很难大于十分之几。图中的两个电阻用来表示初级和次级线圈的导线电阻以及其他任何损耗。

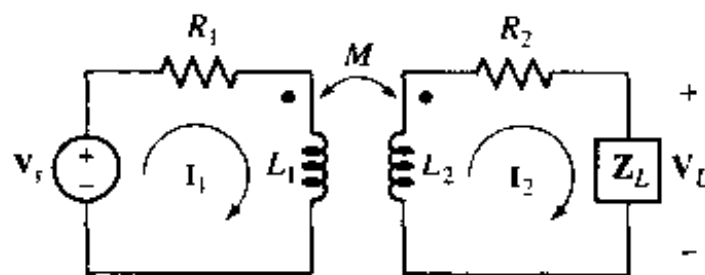


图 13.14 一个线性变压器, 其初级接有电源, 次级接有负载, 同时也画出了初级和次级的电阻

### 13.4.1 反射阻抗

下面来看初级回路的输入阻抗。列出两个网孔方程为:

$$V_s = (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega MI_2 \quad (13.11)$$

$$0 = -j\omega MI_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)I_2 \quad (13.12)$$

为了将其简化, 定义为:

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 \quad \text{和} \quad Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$$

因此:

$$V_s = Z_{11}I_1 - j\omega MI_2 \quad (13.13)$$

$$0 = -j\omega MI_1 + Z_{22}I_2 \quad (13.14)$$

从第二个方程中解出  $I_2$ , 然后将该结果代入第一个方程中, 可以得到输入阻抗为:

$$\mathbf{Z}_m = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \quad (13.15) \textcircled{1}$$

在对这个表达式进行进一步处理之前,可以事先得到几个有趣的结论。首先,上面这个结果与两个线圈上同名端的位置无关,因为如果将这两个同名端中的一个移到另一端,只会改变方程(13.11)到方程(13.14)中  $M$  符号。将  $M$  替换为  $(-M)$  可以产生同样的结果,这并不会改变式(13.15)所表示的输入阻抗。从式(13.15)也可以看到,如果线圈的耦合为零,则输入阻抗只有一项  $\mathbf{Z}_{11}$ ,当耦合从零开始增加时,输入阻抗与  $\mathbf{Z}_{11}$  之差变为  $\omega^2 M^2 / \mathbf{Z}_{22}$ ,这个差称为反射阻抗。为了更容易看出这一变化趋势的特性,将下面的表达式展开为:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

然后对反射阻抗进行有理化,得到:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

因为  $\omega^2 M^2 R_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$  必为正,所以,很显然由于第二项的存在增加了初级回路的损耗。换句话说,可以将第二项的存在看做是初级回路中  $R_1$  的增大。同时,次级回路反射到初级回路的阻抗的符号与次级回路的净阻抗  $X_{22}$  符号相反。其中,阻抗  $X_{22}$  为  $\omega L_2$  和  $X_L$  的和,对于感性负载其符号为正,而对于容性负载其符号可正可负,视负载的阻抗的幅度而定。

### 练习

- 13.5 某线性变压器的参数为  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $L_1 = 2 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 10 \text{ mH}$ ,  $M = 4 \text{ mH}$ 。如果  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ ,分别求出当  $\mathbf{Z}_L$  等于下列值时  $\mathbf{Z}_m$  的值:(a)  $10 \Omega$ ; (b)  $j20 \Omega$ ; (c)  $10 + j20 \Omega$ ; (d)  $-j20 \Omega$ 。

答案:  $5.32 + j2.74 \Omega$ ;  $3.49 + j4.33 \Omega$ ;  $4.24 + j4.57 \Omega$ ;  $5.56 - j2.82 \Omega$

### 13.4.2 T形和II形等效网络

为方便起见,通常需要将变压器变换为T形和II形等效网络。如果将初级和次级的电阻从变压器中分离出来,则只留下一对相互耦合的电感,如图13.15所示。注意到变压器的下端连接在一起,形成一个三端网络,这么做是因为这两种等效网络均为三端网络。再次列出描述此电路的微分方程:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (13.16)$$

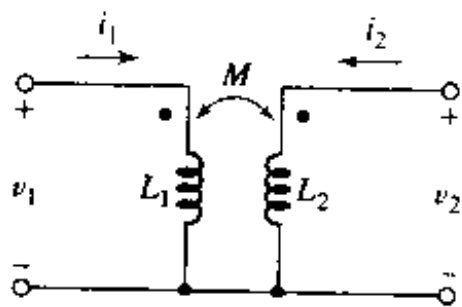


图 13.15 求给定变压器的T形或II形等效网络

①  $\mathbf{Z}_m$  为往变压器的初级线圈看过去的阻抗。



以及:

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (13.17)$$

现在已经很熟悉这两个方程的形式了,可以把它们看成网孔方程。与图 13.15 一致,取  $i_1$  为顺时针流方向的电流和  $i_2$  为逆时针方向的电流。方程(13.16)中的  $M di_2/dt$  和方程(13.17)中的  $M di_1/dt$  说明这两个网孔必然有一个公共的“自感” $M$ 。因为左网孔的总电感为  $L_1$ ,所以必须在左网孔中(而不在右网孔中)插入自感  $L_1 - M$ 。类似地,取右网孔的自感为  $L_2 - M$ 。最后所得到的网络如图 13.16 所示,该网络与原网络完全等效,因为可以用关于变量  $v_1, i_1, v_2$  和  $i_2$  同样的方程组来描述它们。

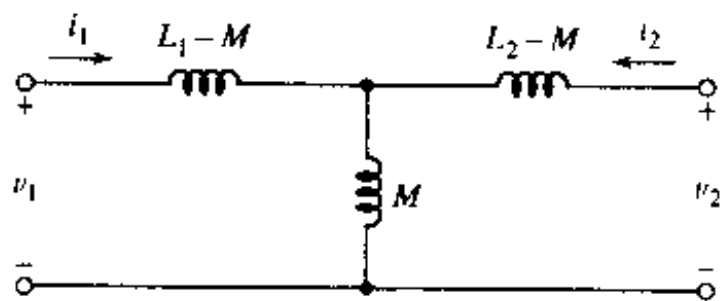


图 13.16 图 13.15 所示的变压器的 T 形等效网络

如果将图中的变压器中的一个线圈的同名端放到该线圈的另一端,则方程(13.16)和方程(13.17)的互感项取相反的符号,这相当于将  $M$  替换为  $-M$ ,对图 13.16 所示的网络做这样的替换后,就得到这时正确的等效电路。这时,这三个自感分别变为  $L_1 + M$ ,  $-M$  和  $L_2 + M$ 。

T 形等效网络中的电感均为自感,没有互感。对于这种等效电路,其中的电感可能取负值,如果只是为了做数学上的分析,这并不会有什么关系。当然,如果要做实际的等效网络,则电感无论如何不能取负值。不过,在进行网络综合的时候,可能会遇到一些传输函数,这些传输函数使得所求得的 T 形网络中含有负电感,这时就可以使用合适的变压器来实现。

**例题 13.5** 求图 13.17(a)所示的线性变压器的 T 形等效电路

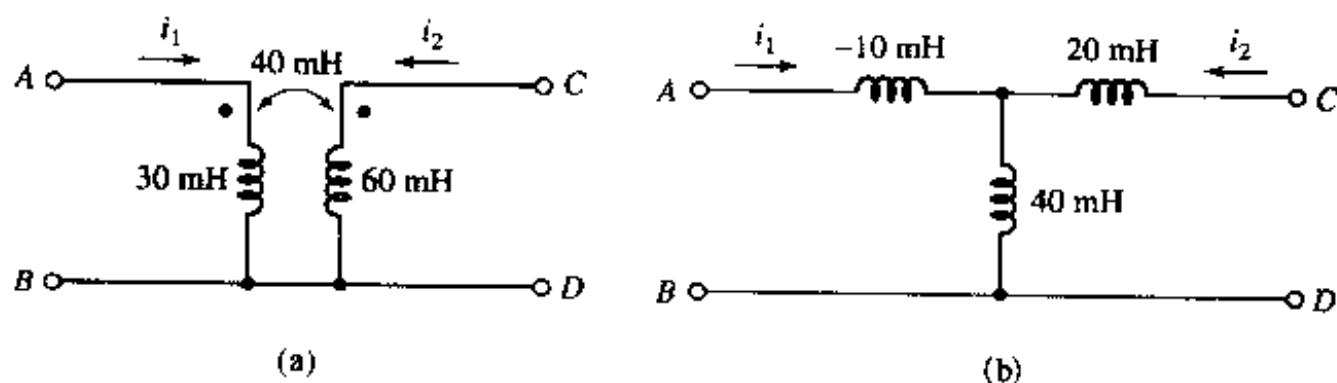


图 13.17 (a)一个线性变压器的例子;(b)该变压器的 T 形等效网络

可以看到  $L_1 = 30 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 60 \text{ mH}$ ,  $M = 40 \text{ mH}$ ,同时注意到图 13.15 的电路中,线圈的两个点均在上端。于是可以得到,电感  $L_1 - M = -10 \text{ mH}$  处于等效电路的“左上臂”, $L_2 - M = 20 \text{ mH}$  在“右上臂”,而位于中间的电感为  $M = 40 \text{ mH}$ 。完整的 T 形等效电路如图 13.17(b) 所示。

为了验证这个等效电路,将图 13.17(a)中的 C 端和 D 端开路,然后在输入端输入  $v_{AB} =$

10 cos 100t V。于是：

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10 \cos(100t) dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

以及：

$$\begin{aligned} v_{CD} &= M \frac{di_1}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t \\ &= 13.33 \cos 100t \text{ V} \end{aligned}$$

将同样的电压加到 T 形等效网络中, 同样可以得到：

$$i_1 = \frac{1}{(-10 + 40)10^{-3}} \int 10 \cos(100t) dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

C 端和 D 端的电压也等于 40 mH 电感两端的电压。因此：

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

可以看到, 这两个网络得到的结果相同。

### 练习

13.6 (a) 如果图 13.18 所示的两个网络互相等效, 求  $L_x$ ,  $L_y$  和  $L_z$  的值; (b) 如果将图 13.19(b) 中次级线圈的点放到下端, 重做 (a)。

答案: -1.5, 2.5, 3.5 H; 5.5, 9.5, -3.5 H

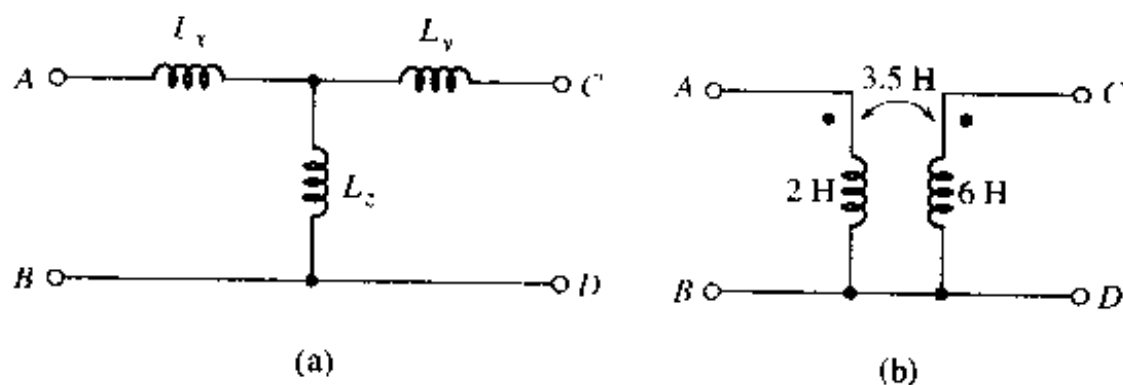


图 13.18

Π 形等效网络没有 T 形等效网络那么容易求得, 而且比较复杂, 用途也没有那么广。从方程(13.17)中解出  $di_2/dt$ , 然后将其代入方程(13.16)中, 得:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

所以:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2$$

如果将上式从 0 到  $t$  进行积分, 可以得到:

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (13.18)$$

采用类似的方法, 同样可以得到:

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (13.19)$$

对于方程(13.18)和方程(13.19),可以将它们看成一对节点方程。为了提供合适的初始条件,必须在两个节点上放置阶跃电流。和积分相乘的各因子具有等效电感的倒数形式,因此,方程(13.18)中的第二个系数  $M/(L_1 L_2 - M^2)$  为  $1/L_B$ ,即节点 1 和节点 2 之间的电感的倒数,Π形等效网络如图 13.19 所示,即:

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$$

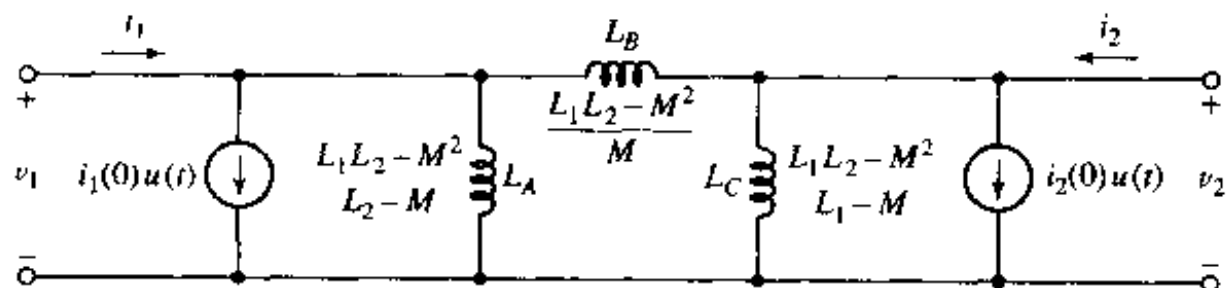


图 13.19 图 13.15 所示变压器的Π形等效网络

方程(13.18)的第一个系数  $L_2/(L_1 L_2 - M^2)$  为  $1/L_A + 1/L_B$ 。因此:

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2}$$

或

$$L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

最后,有:

$$L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

Π形等效网络中不存在磁耦合,且三个自感中的初始电流为零。

如果将所给的变压器的任何一个同名端颠倒过来,则只需要改变等效网络中的  $M$  的符号即可。和 T 形等效网络一样,同样可以看到Π形等效网络的自感也可以为负值。

**例题 13.6** 求图 13.17(a)所示的变压器的Π形等效网络,假定初始电流为零

因为  $L_1 L_2 - M^2$  为  $L_A, L_B$  和  $L_C$  的公因式,于是首先计算它:

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ H}^2$$

因此:

$$L_A = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{(20 \times 10^{-3})} = 10 \text{ mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20 \text{ mH}$$

以及:

$$L_B = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{M} = 5 \text{ mH}$$

等效网络如图 13.20 所示。

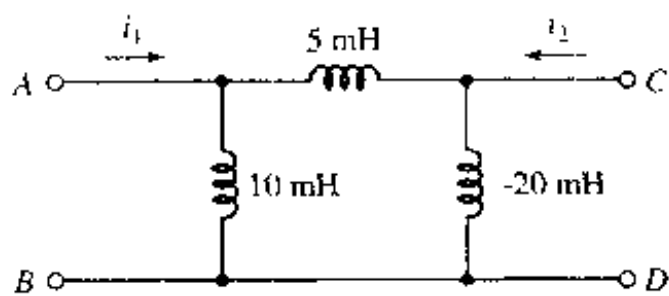


图 13.20 图 13.17(a)所示的线性变压器的 T 形等效网络。假定  $i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$

为了检验这个结果, 同样取  $v_{AB} = 10 \cos 100t$  V, 同时让 C 端和 D 端开路, 根据分压原理, 很容易求得输出电压为:

$$v_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

这和以前求得的结果一致。因此, 图 13.20 所示的网络在电气特性上和图 13.17(a)和图 (13.17b)所示的网络等效。

### 练习

13.7 如果图 13.21 所示的两个网络等效, 求  $L_A, L_B$  和  $L_C$  的值(单位为 mH)。

答案:  $L_A = 169.2$  mH;  $L_B = 129.4$  mH;  $L_C = -314.3$  mH

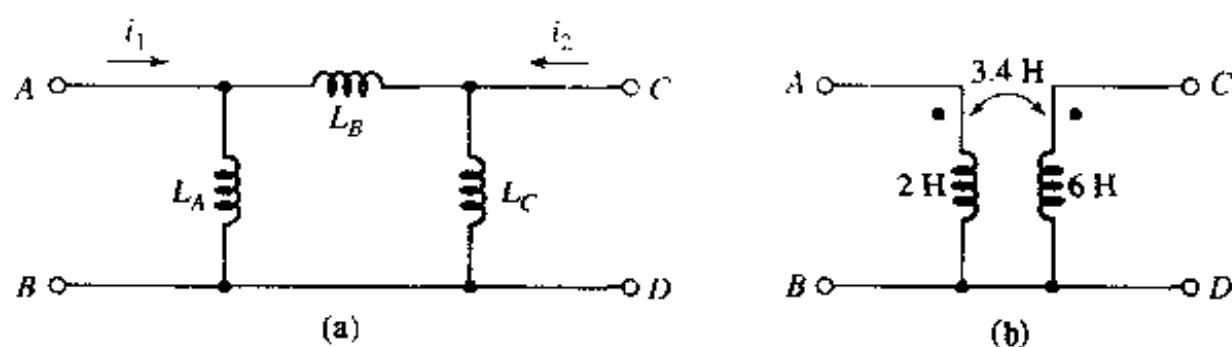


图 13.21

### 计算机辅助分析

对含有磁耦合电感的电路进行仿真是一项很有用的技能, 特别是随着现代电路规模的不断增加, 这种技能更显得重要。在现代电路设计中, 当各种各样的回路或者部分回路变得非常靠近时, 由于寄生磁场的影响, 使得原本是相互分开的电路或者支路不可避免地产生耦合, 从而产生相互作用。使用 PSpice, 可以将这种影响合并到 K\_Linear 部件中, 它可以将原理图中的一对电感的耦合关系用耦合系数  $k$  表示出来, 其中  $0 \leq k \leq 1$ 。

比如, 下面来对图 13.17(a)所示的电路进行仿真, 它含有两个互感系数为  $M = 40$  mH 的线圈, 相应的耦合系数为  $k = 0.9428$ , 其电路原理图如图 13.22 所示, 注意到电感符号旁边没有画“点”。将电感符号水平放置到原理图上的时候, 默认的同名端在左端, 同名端也是该符号旋转的中心, 可以根据需要将电感符号绕该点移动。同时注意到 K\_Linear 器件没有接到电路中, 可以将其放到任何地方, 而两个耦合电感 L1 和 L2 则和耦合系数一起填到该器件的对话框中 (图 13.23)。

该电路与  $100$  rad/s ( $15.92$  Hz) 的正弦电压源相连, 可以看做是交流单频扫描电路。为了让