

## 第 14 章 复频率和拉普拉斯变换

本章要点:

- 理解复频率的概念
- 掌握拉普拉斯变换的方法
- 学会使用拉普拉斯逆变换求时域表达式
- 使用 MATLAB 来计算多项式和求有理分式的留数
- 学会使用初值理论和终值理论

### 14.1 引言

现在开始学习电路分析的第四个主要部分,即讨论复频率的概念。下面将看到,这是一个非常好的概念,它可以把前面所学的分析方法有机地统一起来。采用复频率的概念进行电路分析后,前面所学过的阻性电路分析、正弦稳态分析、瞬态分析、受迫响应、完全响应和受指数函数激励的电路分析以及受指数衰减的正弦函数激励的电路分析等,都将成为这种一般电路分析方法的特例。

### 14.2 复频率

为了引入“复频率”的概念,考虑一个指数衰减的正弦函数,比如电压:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (14.1)$$

其中  $\sigma$  为实数,通常情况下它是负值。虽然通常将这个函数指定为“衰减”,但是也存在正弦振荡幅度增长的情况,当  $\sigma > 0$  时产生这种情况,不过更为实用的是衰减函数。此外,对 RLC 电路自由响应的分析也表明指数衰减系数  $\sigma$  为负值。

对于式(14.1),令  $\sigma = \omega = 0$ ,可以得到一个常数电压:

$$v(t) = V_m \cos \theta = V_0 \quad (14.2)$$

如果只是令  $\sigma$  为 0,那么可以得到一个普通的正弦电压:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (14.3)$$

如果  $\omega = 0$ ,则可以得到指数电压:

$$v(t) = V_m \cos \theta e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \quad (14.4)$$

因此,式(14.1)中的衰减正弦函数包含三种特例,它们分别是式(14.2)的直流、式(14.3)的正弦函数和式(14.4)的指数函数。

将式(14.4)中的指数函数和下面的相位为 0 的正弦函数相比较:

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t} \quad (14.5)$$

可以进一步看到  $\sigma$  的重要性。很显然,式(14.4)和式(14.5)中这两个函数有许多共同之处,惟

—不同的是式(14.4)的指数因子是实数而式(14.5)是虚数。如果将 $\sigma$ 称为“频率”，则更加突出了它们之间的相似性。下面几节中将会对这个术语进行详细讨论，暂时只需要知道 $\sigma$ 称为复频率的实部，但是不能称之为“实频率”，因为这个术语更适合于 $f$ (或者不严谨地用于称呼 $\omega$ )。有时也称 $\sigma$ 为奈培频率(neper frequency)，这一名称源于以 $e$ 为底的指数幂的无量纲单位。例如，给定 $e^{7t}$ ，则 $7t$ 的量纲为奈培(Np)，而 $7$ 为奈培频率，单位为奈培/秒。

“奈培”这个单位是以苏格兰哲学和数学家约翰·奈培(1550~1617)及其奈培算法系统而命名的。历史上对他的名字的拼写不是很确定。

### 14.2.1 一般形式

对于形如式(14.1)的一般形式的激励函数，使用与基于相量的分析方法几乎完全一样的方法，可以很容易求得网络的受迫响应。可以看到，一旦求出了该衰减正弦函数的受迫响应，就相当于求出了直流电压、指数电压、正弦电压的受迫响应。下面来看为什么可以将 $\sigma$ 和 $\omega$ 看做复频率的实部和虚部。

首先给出纯代数形式的复频率定义，随着本章的展开，将逐渐地对其做出物理解释。注意到任何可以写成下述形式的函数：

$$f(t) = \mathbf{K}e^{st} \quad (14.6)$$

都可由复频率 $s$ 表征，其中 $\mathbf{K}$ 和 $s$ 是复常数(与时间无关)。因此，复频率 $s$ 只是复指数表示式中与时间 $t$ 相乘的因子而已。对于一个给定的函数，只要先将其写成式(14.6)的形式，通过观察就可以直接确定其复频率。

### 14.2.2 直流的情况

首先将这个定义应用于较为熟悉的激励函数，比如常数电压：

$$v(t) = V_0$$

可以将它写为下列形式：

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

因此，可以得出结论：直流电压或电流的复频率为 $0$ (即 $s=0$ )。

### 14.2.3 指数的情况

另一种简单的情况是指数函数：

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

它已经是所需要的形式了，因此，其复频率为 $\sigma$ (即 $s=\sigma+j0$ )。

### 14.2.4 正弦的情况

现在来考虑正弦电压，它让人感到有些惊讶。给定：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

希望求出它的用复频率表示的等效表达式。根据以前的经验，使用欧拉公式：

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2} [ e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)} ]$$

于是：

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{1}{2} V_m [ e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)} ] \\
 &= \left( \frac{1}{2} V_m e^{j\theta} \right) e^{j\omega t} + \left( \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta} \right) e^{-j\omega t}
 \end{aligned}$$

或

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

得到的是两个复指数函数的和,因此存在两个复频率。其中第一项的复频率为  $s = s_1 = j\omega$ , 第二项的复频率为  $s = s_2 = -j\omega$ 。这两个  $s$  互为共轭,即  $s_2 = s_1^*$ ; 两个  $K$  也互为共轭:  $K_1 = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta}$ ,  $K_2 = K_1^* = \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta}$ 。因此,第一项和第二项互为共轭,其实早就可以预料到这一点,因为它们的和  $v(t)$  必须是实数。

通过把所有出现的“ $j$ ”均替换为“ $-j$ ”,可以得到任何复数的复共轭,这是因为已经选取  $j = +\sqrt{-1}$ ,其实,也可以取负根,由此可以得到复共轭的定义。

#### 14.2.5 指数衰减正弦的情况

最后来求指数衰减的正弦函数[式(14.1)]的复频率。使用欧拉公式,同样可以得到下面的复指数表达式:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \\
 &= \frac{1}{2} V_m e^{\sigma t} [ e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)} ]
 \end{aligned}$$

因此:

$$v(t) = \frac{1}{2} V_m e^{\sigma t} e^{j(\sigma + j\omega)t} + \frac{1}{2} V_m e^{-\sigma t} e^{j(\sigma - j\omega)t}$$

可以看到,为了表示指数衰减的正弦函数,同样也需要一对共轭复频率,  $s_1 = \sigma + j\omega$ ,  $s_2 = s_1^* = \sigma - j\omega$ 。通常情况下,  $\sigma$  和  $\omega$  均不为0,也就是说,指数变化的正弦波形是一般情况,而常数、正弦和指数的波形是特殊情况。

#### 14.2.6 $s$ 的物理意义

$s$  为正实数时,例如  $s = 5 + j0$ ,表示一个指数增长的函数  $K e^{5t}$ ,对于物理可实现的函数,  $K$  必须为实数。 $s$  为负实数时,例如  $s = -5 + j0$ ,表示一个指数衰减的函数  $K e^{-5t}$ 。

当  $s$  为纯虚数时,例如  $j10$ ,则无论如何都不能表示一个实数,其函数形式为  $K e^{j10t}$ ,还可以表示为  $K(\cos 10t + j\sin 10t)$ ,很显然它包含实部和虚部,每一个都是正弦的形式。为了构造一个实函数,有必要考虑一下  $s$  的共轭,比如  $s_{1,2} = \pm j10$ ,相应的  $K$  也必须是共轭的。不过,不那么严格地说,可以将  $s_1 = +j10$  或者  $s_2 = -j10$  看做是角频率为  $10 \text{ rad/s}$  的正弦电压。正弦电压的幅度和相位与每个频率的  $K$  的选择有关,因此,如果取  $s_1 = j10$ ,  $K_1 = 6 - j8$ ,有:

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad s_2 = s_1^* \quad \text{和} \quad K_2 = K_1^*$$

于是得到了实的正弦曲线  $20 \cos(10t - 53.1^\circ)$ 。

类似地,  $s$  取一般值时,比如  $3 - j5$ ,只有与其共轭  $3 + j5$  一起,才能表示实函数。同样,不那么严格地说,这对共轭频率表示了一个指数增长的正弦函数  $e^{3t} \cos 5t$ ,其幅度和相位也与  $K$

的选择有关。

到目前为止,应该已经对复频率  $s$  的物理意义有所了解,通常情况下,它表示一个指数变化的正弦波。 $s$  的实部与指数变化的特性有关,如果实部为负数,则随着  $t$  的增加函数值减小;如果它为正数,则函数增加;如果它等于 0,则正弦函数的幅度为常数。 $s$  的实部的绝对值越大,指数增长或衰减的速度就越大。 $s$  的虚部表示正弦波的变化情况,它实际上就是角频率。 $s$  的虚部越大,则函数随时间的变化率越大。

当  $s$  的实部和虚部的幅度很大时,即  $s$  的幅度很大时,表示一个快速变化的函数。

通常用字母  $\sigma$  表示  $s$  的实部,用  $\omega$  (不是  $j\omega$ ) 表示虚部:

$$s = \sigma + j\omega \quad (14.7)$$

角频率有时也称为“实频率”,不过,如果这么称呼的话,后面将发现,必须说“实频率为复频率的虚部!”这很容易引起混淆。在需要将它们区别开来的时候,称  $s$  为复频率, $\sigma$  为奈培频率, $\omega$  为角频率, $f = \omega/2\pi$  为周期频率,当不会产生混淆时,可以将这四个量统称为“频率”。奈培频率的单位为奈培/秒,角频率的单位为弧度/秒,复频率的单位分为两部分,分别为复奈培/秒和复弧度/秒。

### 练习

14.1 求出下列实的时域函数的复频率:

(a)  $(2e^{-100t} + e^{-200t})\sin 2000t$ ; (b)  $(2 - e^{-10t})\cos(4t + \phi)$ ; (c)  $e^{-10t}\cos 10t\sin 40t$ 。

14.2 用实常数  $A, B, C$  和  $\phi$  等构造一个表示电流的实的时域函数,使之含有以下频率成分:(a)  $0, 10, -10 \text{ s}^{-1}$ ; (b)  $-5, j8, -5 - j8 \text{ s}^{-1}$ ; (c)  $-20, 20, -20 + j20, 20 - j20 \text{ s}^{-1}$ 。

答案:14.1:  $-100 + j2000, -100 - j2000, -200 + j2000, -200 - j2000 \text{ s}^{-1}; j4, -j4, -10 + j4, -10 - j4 \text{ s}^{-1}; -10 + j30, -10 - j30, -10 + j50, -10 - j50 \text{ s}^{-1}$ ;

14.2:  $A + Be^{10t} + Ce^{-10t}; Ae^{-5t} + B\cos(8t + \phi_1) + Ce^{-5t}\cos(8t + \phi_2); Ae^{-20t} + Be^{20t} + Ce^{-20t}\cos(20t + \phi_1) + De^{20t}\cos(20t + \phi_2)$

### 14.3 衰减的正弦激励函数

前面已经花了足够的时间定义并介绍了复频率的物理意义,现在应该开始使用它了,下面看看它有什么用处以及如何使用它,以便逐渐熟悉它。

指数变化的正弦曲线的一般形式可以用下面的电压函数来表示:

$$v(t) = V_m e^{\alpha} \cos(\omega t + \theta) \quad (14.8)$$

和以前一样,可以用欧拉公式将其写成用复频率表示的形式:

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\alpha} e^{j(\omega t + \theta)}\} \quad (14.9)$$

或

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\alpha} e^{j(-\omega t - \theta)}\} \quad (14.10)$$

这两个表达式都是正确的,从中可以看到,一对共轭复频率表示了一个正弦曲线或者一个指数衰减的正弦曲线。式(14.9)更直接地表示了式(14.8)给出的衰减正弦曲线,因此主要考虑这

种形式。提取公因子,并用  $s$  替换下式中的  $\sigma + j\omega$ :

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{\beta} e^{(\sigma + j\omega)t}\}$$

得:

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{\beta} e^{st}\} \quad (14.11)$$

在将这种形式的激励函数作用于电路之前,应该注意到最后这种衰减正弦曲线的表达式与第10章中所学的不衰减的正弦曲线的表达式:

$$\operatorname{Re}\{V_m e^{j\omega t}\}$$

有相似性,惟一的差别在于现在用的是  $s$  而以前用的是  $j\omega$ 。现在不局限于正弦激励函数和它们的角频率,而是扩展到在某个复频率下衰减的正弦激励函数。本节的后面,将导出指数衰减正弦曲线的频域表达式,使用的方法与推导正弦曲线频域的表达式相同。简单地忽略掉符号  $\operatorname{Re}\{\}$ ,并简记为  $e^{st}$ 。

现在将式(14.8),式(14.9)、式(14.10)或式(14.11)中给出的指数衰减正弦函数表达式作用于一个网络中,要求其受迫响应(这可能是网络的某个支路电流)。因为受迫响应与激励函数的形式相同,也与其积分和导数的形式相同,因此可以假定响应为:

$$i(t) = I_m e^{\alpha} \cos(\omega t + \phi)$$

或

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{\beta} e^{st}\}$$

其中,激励源和响应的复频率必须相同。

现在,如果想起复激励函数实部产生的响应实部,而复激励函数的虚部产生的响应虚部,则网络的激励函数仍然是复数,这样,可以得到一个复响应,其实部即为所求的实响应。事实上,可以不使用符号  $\operatorname{Re}\{\}$ ,但应该知道,可以在任何需要的时候都将它加进去。因此,给定实激励函数:

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{\beta} e^{st}\}$$

用其对应的复激励函数  $V_m e^{\beta} e^{st}$  表示,相应的受迫响应  $I_m e^{\beta} e^{st}$  也是复数,其实部必然是所求时域的受迫响应:

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{\beta} e^{st}\}$$

这里需要求出未知幅度  $I_m$  和未知相位  $\phi$ 。

在进行详细计算之前,有必要将这种基本方法概括一下,下面可以看到这个过程与在正弦分析中使用的步骤有许多相似之处:

- 首先,用回路或节点的积分微分方程组来描述电路。
- 将给定的激励函数和假设的受迫响应(均为复数形式)代入方程中,然后求解积分微分方程。
- 这样,所有的方程中将包含因子  $e^{st}$ ,然后用  $e^{st}$  去除整个方程,或者说“消去  $e^{st}$ ”。需要注意的是,如果要求出响应函数的时域形式,必须重新将它加入表达式中。

没有了符号  $\operatorname{Re}\{\}$  和因子  $e^{st}$ ,也就是说已经将所有的电压和电流从时域变换到了频率,积分微分方程也就变成了代数方程,因此求解它们也就变得和正弦稳态的情形一样容易。下面用一个数值例子来说明这种基本方法。

例题 14.1 将激励函数作用于图 14.1 所示的串联 RLC 网络, 求出受迫响应的时域表达式  $i(t) = I_m e^{-2t} \cos(4t + \phi)$  中  $I_m$  和  $\phi$  的值

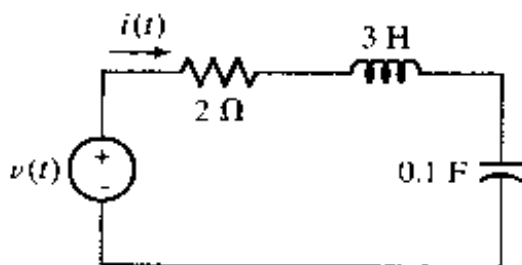


图 14.1 串联 RLC 电路, 接入衰减的激励函数, 求  $i(t)$  的频域解

首先将激励函数用符号  $\text{Re}\{\}$  表示为:

$$\begin{aligned} v(t) &= 60e^{-2t} \cos(4t + 10^\circ) = \text{Re}\{60e^{-2t} e^{j(4t+10^\circ)}\} \\ &= \text{Re}\{60e^{j10^\circ} e^{(-2+j4)t}\} \end{aligned}$$

或

$$v(t) = \text{Re}\{V e^{st}\}$$

其中:

$$V = 60 \angle 10^\circ \quad \text{和} \quad s = -2 + j4$$

除去符号  $\text{Re}\{\}$ , 得到复激励函数:

$$60 \angle 10^\circ e^{st}$$

采用类似的方法, 将未知响应表示为复数量  $I e^{st}$ , 其中  $I = I_m \angle \phi$ 。

下一步, 列出该电路的积分微分方程。根据基尔霍夫电压定律, 有:

$$v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = 2i + 3 \frac{di}{dt} + 10 \int idt$$

将给定的复激励函数和假设的未知受迫响应代入这个方程, 得:

$$60 \angle 10^\circ e^{st} = 2I e^{st} + 3sI e^{st} + \frac{10}{s} I e^{st}$$

两边除以公因子, 得:

$$60 \angle 10^\circ = 2I + 3sI + \frac{10}{s} I$$

因此:

$$I = \frac{60 \angle 10^\circ}{2 + 3s + 10/s}$$

现在令  $s = -2 + j4$ , 然后从这个复电流中求出  $I$ , 得:

$$I = \frac{60 \angle 10^\circ}{2 + 3 \times (-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

整理得:

$$I = 5.37 \angle -106.6^\circ$$

因此,  $I_m = 5.37 \text{ A}$ ,  $\phi = -106.6^\circ$ , 受迫响应为:

$$i(t) = 5.37 e^{-2t} \cos(4t - 106.6^\circ) \text{ A}$$

这样, 通过将基于微积分的表达式转化为代数表达式求出问题的解, 可以看到这种方法的有效性, 这种方法将在后面进一步学习。

## 练习

- 14.3 求出与下列时域电流等效的相量表示法:(a)  $24 \sin(90t + 60^\circ) \text{ A}$ ; (b)  $24e^{-10t} \cos(90t + 60^\circ) \text{ A}$ ; (c)  $24e^{-10t} \cos 60^\circ \times \cos 90t \text{ A}$ 。如果  $\mathbf{V} = 12 \angle 35^\circ \text{ V}$ , 求当  $\mathbf{s}$  等于下列值时  $v(t)$  的表达式:(d) 0; (e)  $-20 \text{ s}^{-1}$ ; (f)  $-20 + j5 \text{ s}^{-1}$ 。

答案:  $24 \angle -30^\circ \text{ A}$ ;  $24 \angle 60^\circ \text{ A}$ ;  $12 \angle 0^\circ \text{ A}$ ;  $9.83 \text{ V}$ ;  $9.83e^{-20t} \text{ V}$ ;  $12e^{-20t} \cos(5t + 35^\circ) \text{ V}$

## 14.4 拉普拉斯变换的定义

通常情况下, 电路分析的目的之一是, 在线性电路的某点给定某个激励函数, 求另外一个点的受迫响应。在开始的几章, 主要讨论了直流激励函数, 其响应形式为  $V_0 e^0$ 。不过, 在介绍了电感和电容之后, 已经知道, 对于简单  $RL$  和  $RC$  电路, 突然加载直流激励将产生随时间按指数关系变化的响应:  $V_0 e^{\sigma t}$ ; 对于  $RLC$  电路, 响应的形式则为指数衰减的正弦曲线:  $V_0 e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$ 。所有的这些计算都是在时域中进行的, 而且只考虑了直流激励函数的情形。

开始用到正弦激励函数以后, 由于求解微积分方程繁琐而且复杂, 因此需要找一个较简单的解决问题的方法。相量变换正是这样一种方法, 可以通过考虑形式为  $V_0 e^{j\omega t}$  的复激励函数来得到它。一旦意识到并不需要含有  $t$  的因子, 则只剩下相量  $V_0 e^{j\omega t}$ , 这时, 就转入了频域。

然后考虑形式为  $V_0 e^{j\omega t} e^{\sigma t}$  激励函数, 可以引入复频率  $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ , 以前所学的各种激励函数的形式均成了它的特殊情况: 直流 ( $\mathbf{s} = 0$ ), 指数 ( $\mathbf{s} = \sigma$ ), 正弦 ( $\mathbf{s} = j\omega$ ), 指数衰减的正弦 ( $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ )。通过将它与前面讨论的相量对比, 可以看到这时可以忽略包含  $t$  的因子, 这样又在频率中进行分析来得到问题的解。

## 14.4.1 双边拉普拉斯变换

已经知道, 正弦激励函数导致正弦响应, 而指数激励函数则导致指数响应。然而, 作为一个工程师, 在工作中将碰到许多既不是正弦也不是指数的波形, 比如方波、锯齿波以及任意时刻的脉冲。当这些激励函数作用于一个线性电路时, 得到的响应波形既不像激励函数的形式, 也不是指数形式。此时不能除去含有  $t$  的项, 也就没法得到频域响应。这非常令人遗憾, 因为事实证明在频域中进行分析比在时域中要容易得多。

不过, 有一种解决方法, 可以用它来将任意函数波形展开成为指数波形相加的形式, 其中每一项均有其各自的复频率。对于线性电路, 已知总的响应可以通过将各指数波形的响应叠加起来得到。而且, 在处理每个指数波形时, 同样可以忽略含有  $t$  的项, 这样就可以在频域中进行分析。遗憾的是, 为了精确地表示一般形式的时域函数, 需要无穷多个指数项的叠加, 因此, 如果硬要采用这种方法进行分解, 然后将这些指数项叠加则显得有点愚蠢。实际上, 可以采用积分的办法将这些项叠加起来, 这样将得到一个频域函数。

下面使用一种称为拉普拉斯变换的方法来描述这种方法。对于一般函数  $f(t)$ , 其拉普拉斯变换定义为:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t) dt \quad (14.12)$$

推导这个积分需要掌握傅里叶级数和傅里叶变换的知识,在后面的章节中将介绍它们。不过,经过对复频率概念的讨论,对处理相量以及进行时域和频率互相变换也有了经验。有了这些基础,就可以理解拉普拉斯变换所蕴含的基本概念。事实上,那正是拉普拉斯变换所做的工作:它将一般形式的时域函数  $f(t)$  变换为相应的频域函数  $F(s)$ 。

### 14.4.2 双边拉普拉斯逆变换

式(14.12)定义了  $f(t)$  的双边拉普拉斯变换。“双边”这个词用来强调这么一个事实,即正的  $t$  值和负的  $t$  值均包含在积分范围中。相反的变化,通常称为拉普拉斯逆变换,也用积分形式来定义<sup>①</sup>:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (14.13)$$

$s$  将实常数  $\sigma_0$  包含在积分限中是为了保证积分收敛。式(14.13)和式(14.14)这两个等式构成了双边拉普拉斯变换对。幸运的是,在学习电路分析时,从来不会用到复杂的式(14.13),下面将会学到一种快速而且容易的方法来取代它。

### 14.4.3 单边拉普拉斯变换

在许多电路分析问题中,激励函数和响应函数并不是一直存在的,而是从某个特定的瞬间开始的,通常将这个起始时刻取为  $t=0$ 。因此,对于那些在  $t < 0$  时不存在的函数,或者不关心其  $t < 0$  时的取值的函数,可以将其看做是  $v(t)u(t)$ 。其拉普拉斯变换的下限取为  $t=0^-$ ,这样可以将  $t=0$  时由于函数不连续性带来的影响包括进来,比如冲激或者高阶奇点等等。相应的拉普拉斯变换形式为:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) u(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

这是  $f(t)$  的单边拉普拉斯变换的定义,或者省略“单边”,简称为  $f(t)$  的拉普拉斯变换。逆变换的表达式保持不变,只是在计算的时候要知道,只有在  $t > 0$  时才有意义。下面是拉普拉斯变换对的定义,从现在开始就要使用它们:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14.14)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(s) ds$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(s) \quad (14.15)$$

也可以用符号  $\mathcal{L}$  来表示拉普拉斯变换及其逆变换:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{和} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

<sup>①</sup> 如果忽略因子  $1/2\pi j$  并将该积分看做是相对于所有的频率求和,则  $f(t) \propto \int F(s) ds e^{st}$ ,这强调了  $f(t)$  实际上是幅度与  $F(s)$  成比例的复频率项的和。



**例题 14.2** 求函数  $f(t) = 2u(t-3)$  的拉普拉斯变换

为了求出  $f(t) = 2u(t-3)$  的单边拉普拉斯变换, 必须计算积分:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 2u(t-3) dt \\ &= 2 \int_3^{\infty} e^{-st} dt \end{aligned}$$

化简得:

$$\mathbf{F}(s) = \left. \frac{-2}{s} e^{-st} \right|_3^{\infty} = \frac{-2}{s} (0 - e^{-3s}) = \frac{2}{s} e^{-3s}$$

### 练习

14.4 设  $f(t) = -6e^{-2t} [u(t+3) - u(t-2)]$ 。求 (a) 双边拉普拉斯变换  $\mathbf{F}(s)$ ; (b) 单边拉普拉斯变换  $\mathbf{F}(s)$ 。

$$\text{答案: } \frac{6}{2+s} [e^{-4-2s} - e^{6+3s}]; \frac{6}{2+s} [e^{-4-2s} - 1]$$

## 14.5 简单时域函数的拉普拉斯变换

这一节将开始建立电路分析中常用时域函数的拉普拉斯变换表。假定感兴趣的函数为电压, 这样的假定虽然有点武断, 但不失一般性。将采用下面的定义来建立拉普拉斯变换表, 至少在开始建立时必须使用它:

$$\mathbf{V}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} v(t) dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

相应的逆变换为:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} \mathbf{V}(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(s)\}$$

它们构成了  $v(t)$  和  $\mathbf{V}(s)$  之间的一一对应。也就是说, 对每一个  $v(t)$ , 有且仅有一个  $\mathbf{V}(s)$  与之对应。看到逆变换奇怪的形式, 可能使人感到害怕。不过, 很快就会看到, 拉普拉斯变换理论的初步学习并不需要实际计算这个积分。通过从时域出发变换到频域, 并且利用刚才所说的惟一性, 可以得出拉普拉斯变换表, 它几乎包含了所有希望进行变换的时域函数。

### 14.5.1 收敛的条件

在继续往下讨论的时候, 先暂停一下, 考虑一下是否存有这样一种可能, 即对于某些函数  $v(t)$ , 是否根本就不存在拉普拉斯变换。保证拉普拉斯积分在  $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$  时绝对收敛的充分条件是:

1. 函数  $v(t)$  在每一个有限区间  $t_1 < t < t_2$  内可积, 其中  $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ 。
2. 对某些  $\sigma_0$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_0 t} |v(t)|$  存在。

在电路分析中,只有非常少的时域函数不满足这两个条件<sup>①</sup>。

### 14.5.2 单位阶跃函数 $u(t)$

现在来看某些特殊函数的变换。首先来考察单位阶跃函数  $u(t)$  的拉普拉斯变换,根据定义,有:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

因为  $\operatorname{Re}\{s\} > 0$ , 满足条件 2。因此:

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (14.16)$$

非常容易就得到了第一个拉普拉斯变换对。

通常用双箭头符号表示拉普拉斯变换对。

### 14.5.3 单位冲激函数 $\delta(t - t_0)$

另一个奇异函数是单位冲激函数  $\delta(t - t_0)$ , 它的变换非常有意思。图 14.2 中画出了该函数, 它的样子看起来很奇特, 不过在实践中却非常有用。单位冲激函数定义为包含单位面积, 即:

$$\begin{aligned}\delta(t - t_0) &= 0, \quad t \neq t_0 \\ \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt &= 1\end{aligned}$$

其中  $\epsilon$  为一个非常小的常数。因此, 这个“函数”(许多纯数学家不敢这么称呼)只在点  $t_0$  处有非零值。对于  $t_0 > 0^-$ , 其拉普拉斯变换为:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0} \\ \delta(t - t_0) &\Leftrightarrow e^{-st_0}\end{aligned} \quad (14.17)$$

特别是, 注意到对于  $t_0 = 0$ , 有:

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad (14.18)$$

单位冲激函数的另一个有趣的特性是其筛选性。考虑冲激函数与任意函数  $f(t)$  的乘积的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

因为除了在  $t = t_0$  处, 函数  $\delta(t - t_0)$  的值均为 0, 因此该积分的值为  $f(t_0)$ 。这一特性对于化简含有单位冲激函数的积分表达式非常有用。

<sup>①</sup> 这种函数的例子有  $e^t$  与  $e^{-t}$ , 但  $t^n$  和  $n^t$  却不是。对于拉普拉斯变换及其应用的更详细讨论, 请参考 Clare D. McGillem and George R. Cooper, *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 3d ed., Oxford University Press, North Carolina, 1991, Chap. 5.

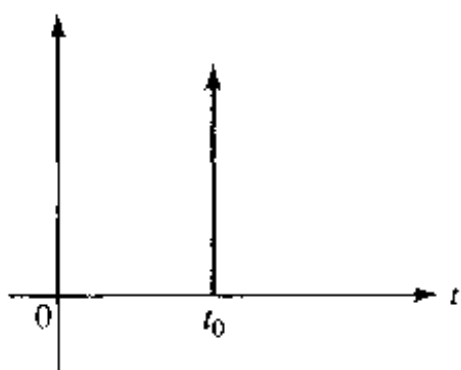


图 14.2 单位冲激函数  $\delta(t - t_0)$ 。通常用它来近似表示持续时间非常短的信号脉冲,这里的“非常短”是与电路的时间常数相比而言的

#### 14.5.4 指数函数 $e^{-\alpha t}$

以前对指数函数很感兴趣,下面来求其变换:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-\alpha}u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s + \alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha}\end{aligned}$$

因此:

$$e^{-\alpha}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha} \quad (14.19)$$

容易看出  $\text{Re}\{s\} > -\alpha$ 。

#### 14.5.5 斜坡函数 $t u(t)$

作为最后一个例子,考虑斜坡函数  $t u(t)$ 。其变换为:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \\ t u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s^2}\end{aligned} \quad (14.20)$$

通过分部积分或者查积分表,可以得到上面的结果。

函数  $t e^{-\alpha}u(t)$  的变换是什么? 把它留给读者求解,其答案为:

$$t e^{-\alpha}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s + \alpha)^2} \quad (14.21)$$

#### 练习

- 14.5 分别求出  $v(t)$  等于下列情况时  $V(s)$  的表达式: (a)  $4\delta(t) - 3u(t)$ ; (b)  $4\delta(t - 2) - 3t u(t)$ ; (c)  $[u(t)][u(t - 2)]$ 。
- 14.6 分别求出  $V(s)$  等于下列表达式时相应的  $v(t)$ : (a)  $10$ ; (b)  $10/s$ ; (c)  $10/s^2$ ; (d)  $10/[s(s + 10)]$ ; (e)  $10s/(s + 10)$ 。

答案: 14.5:  $(4s - 3)/s$ ;  $4e^{-2s} - (3/s^2)$ ;  $e^{-2s}/s$ 。 14.6:  $10\delta(t)$ ;  $10u(t)$ ;  $10t u(t)$ ;  $u(t) - e^{-10t}u(t)$ ;  $10\delta(t) - 100e^{-10t}u(t)$

## 14.6 逆变换方法

### 14.6.1 线性原理

应用一些基本原理,可以更方便地计算拉普拉斯变换。最简单的是线性原理:两个或者多个时域函数的和的拉普拉斯变换等于各时域函数的拉普拉斯变换的和。对于两个时域函数的情况,有:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} [f_1(t) + f_2(t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\ &= \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})\end{aligned}$$

这就是所谓的拉普拉斯变换的“叠加性原理”。

下面举一个例子来说明这个原理的应用,假定已知某函数的拉普拉斯变换为 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ ,要求出相应的时域函数 $v(t)$ 。通常可以将 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 分解成两个或多个函数相加的形式,比如分解为 $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ 加 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ ,它们的逆变换 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 均可通过查表得到。那么,根据线性原理可得:

$$\begin{aligned}v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

考察拉普拉斯变换的定义,容易得到线性原理的另一个重要的结论。因为只是求积分,因此,一个函数乘以一个常数后的拉普拉斯变换等于该函数的拉普拉斯变换乘以这个常数,即:

$$\mathcal{L}\{kv(t)\} = k\mathcal{L}\{v(t)\}$$

或

$$kv(t) \Leftrightarrow k\mathbf{V}(\mathbf{s}) \quad (14.22)$$

其中 $k$ 为比例常数。后面将看到,在许多电路分析的场所,这个结论非常有用。

这就是所谓的拉普拉斯变换的“齐次性原理”。

### 14.6.2 求有理函数的拉普拉斯逆变换的方法

在分析含有多个储能元件的电路时,通常会碰到 $s$ 域表达式为关于 $s$ 的两个多项式之比的形式:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

其中, $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ 为关于 $s$ 的多项式。使 $\mathbf{N}(\mathbf{s})=0$ 的 $s$ 值称为 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的零点,使 $\mathbf{D}(\mathbf{s})=0$ 的 $s$ 值称为 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的极点。

在求拉普拉斯逆变换时,用式(14.15)来计算非常麻烦,通常可以采用求留数的办法将这些表达式分解成若干简单项,其中每一项的逆变换均已知。这么做的前提是 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 必须为有理函数,且分子 $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ 的阶数必须小于分母 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ 的阶数。实际上,在电路分析中碰到的函数,很少会碰到需要用式(14.15)来求逆变换的情况,前提条件是能够熟练地使用本章中介绍的各种方法。

使用留数的方法实际上是对 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 进行部分分式分解,因此我们将注意力集中到分母的根上。也就是说,首先必须将关于 $s$ 的多项式 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ 分解成二项式因子相乘的形式。 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ 的根可

能是由单根和重根组成的,既可以是实数,也可以是复数。但是,值得注意的是,当  $D(s)$  的系数为实数时,复根总是成对出现的。

### 14.6.3 相异极点

作为一个例子,求下式的拉普拉斯逆变换:

$$V(s) = \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

分母已经表示为两个不同因子的积的形式,这两个因子的根分别是  $-\alpha$  和  $-\beta$ <sup>①</sup>。虽然可以将上式代入定义式中来求其逆变换,但是使用线性原理来求解会简单得多。对上式进行部分分式分解,可以将它分解为两个简单的部分分式的和:

$$V(s) = \frac{A}{(s + \alpha)} + \frac{B}{(s + \beta)}$$

其中  $A$  和  $B$  可以用多种办法来求得,不过最快的方法也许是下面这种:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ (s + \alpha)V(s) - \frac{(s + \alpha)}{(s + \beta)} B \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{1}{(s + \beta)} - 0 \right] = \frac{1}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

该式使用了  $V(s)$  的简分式形式(即没有分解)。

类似地,可得:

$$B = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

因此:

$$V(s) = \frac{1/(\beta - \alpha)}{(s + \alpha)} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{(s + \beta)}$$

前面已经计算过这种形式的逆变换,因此:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} u(t) + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} u(t) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \end{aligned}$$

如果需要,可以将下式加入到拉普拉斯变换表中:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

容易将这种方法推广到分母为关于  $s$  的高阶多项式的情形,虽然这有点繁琐。需要注意的是,这里并没有限定常数  $A$  和  $B$  必须是实数。不过,当  $\alpha$  和  $\beta$  为复数的情况下,将发现  $\alpha$  和  $\beta$  互为共轭(这在数学上不是必须的,但对于物理电路而言是必须的),这时,可以得到  $A = B^*$ ,换句话说,这两个系数也是复共轭的。

### 14.6.4 多重极点

接着,来看多重极点的情况。考虑函数:

<sup>①</sup> 原文为  $\alpha$  和  $\beta$ ,疑有误——译者注。

$$V(s) = \frac{N(s)}{(s-p)^n}$$

将其展开为:

$$V(s) = \frac{a_n}{(s-p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(s-p)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(s-p)}$$

为了求出每个常数, 首先将未展开的  $V(s)$  乘以  $(s-p)^n$ , 令  $s=p$  可以得到常数  $a_n$ 。剩下的常数可以通过对式  $(s-p)^n V(s)$  求若干次微分后, 再令  $s=p$ , 然后除以一个阶乘项得到。微分的目的是为了除去已经求得的常数, 而令  $s=p$  则是为了除去其他常数。比如,  $a_{n-2}$  可以通过计算下式得到:

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s-p)^n V(s)]_{s=p}$$

而  $a_{n-k}$  可以通过计算下式得到:

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s-p)^n V(s)]_{s=p}$$

为了说明这一过程, 来求一个包含这两种极点的传递函数:  $s=0$  为单重极点,  $s=-6$  为二重极点。

**例题 14.3** 求下面的函数的逆变换

$$V(s) = \frac{2}{s^3 + 12s^2 + 36s}$$

可以看到, 很容易对分母分解因式, 得到:

$$V(s) = \frac{2}{s(s+6)(s+6)} = \frac{2}{s(s+6)^2}$$

正如前面所说, 它有三个极点, 在  $s=0$  处有一个, 在  $s=-6$  处有两个。下一步, 将该函数分解为:

$$V(s) = \frac{a_1}{(s+6)^2} + \frac{a_2}{(s+6)} + \frac{a_3}{s}$$

采用刚才介绍的方法可以求出未知常数  $a_1$  和  $a_2$ , 使用以前介绍的方法可以求出  $a_3$ 。因此:

$$a_1 = \left[ (s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2} \right]_{s=-6} = \left. \frac{2}{s} \right|_{s=-6} = -\frac{1}{3}$$

以及:

$$a_2 = \left. \frac{d}{ds} \left[ (s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2} \right] \right|_{s=-6} = \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{2}{s} \right) \right|_{s=-6} = \left. \frac{-2}{s^2} \right|_{s=-6} = -\frac{1}{18}$$

可以使用单重极点的方法求出剩下的常数  $a_3$ :

$$a_3 = \left. s \frac{2}{s(s+6)^2} \right|_{s=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

因此, 可以将  $V(s)$  展开为:

$$V(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{(s+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(s+6)} + \frac{1}{18s}$$

根据线性原理, 求出等式右边这三项的逆变换, 就可以得到  $V(s)$  的逆变换。可以看到, 右边第一项的形式为:

$$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

根据式(14.21),得到右边第一项的逆变换为 $-\frac{1}{3}te^{-6t}u(t)$ 。用类似的方法得到第二项的

逆变换为 $-\frac{1}{18}e^{-6t}u(t)$ ,第三项的逆变换为 $\frac{1}{18}u(t)$ 。因此:

$$v(t) = -\frac{1}{3}te^{-6t}u(t) - \frac{1}{18}e^{-6t}u(t) + \frac{1}{18}u(t)$$

或者,简洁地:

$$v(t) = \frac{1}{18}[1 - (1 + 6t)e^{-6t}]u(t)$$

## 练习

14.7 如果  $V(s) = 2s/(s^2 + 4)^2$ , 求  $v(t)$ 。

答案:  $\frac{1}{2}t \sin 2t u(t)$

## 计算机辅助分析

MATLAB 作为一个非常有用的数值分析软件包,可以用来求解在不同时变激励下,对电路列出的方程组。最直接的办法是使用求解常微分方程(ODE)的函数 `ode23()` 和 `ode45()`。这两个函数采用了基于微分方程数值解的方法,`ode45()`的精度相对来说要高一些。不过这种方法求得的只是一些离散时刻上的解,并没有求出所有时刻上的解,当取的点足够密时,在许多情况下就已经足够了。

拉普拉斯变换提供了求微分方程精确表达式的一种方法,这比用 ODE 函数求得的数值解要好得多。在后面的章节学习  $s$  域表达式时,将看到拉普拉斯变换的另一个突出的优点,特别是在把分母多项式分解因式之后。

已经看到,做拉普拉斯变换时,采用查表的方法非常方便,虽然对于那些分母多项式阶数较高的函数来说在求留数时有些繁琐。这时,也可以使用 MATLAB 来帮助求解,它有一些有用的函数用来处理多项式。

在 MATLAB 中,多项式:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

存储为矢量  $[a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0]$ 。

因此,对于多项式  $N(s) = 2$  与  $D(s) = s^3 + 12s^2 + 36s$ , 输入:

```
EDU >> N = [2];
```

```
EDU >> D = [1 12 36 0];
```

每个多项式的根可以用函数 `roots(p)` 求得,其中  $\mathbf{p}$  为一个矢量,它包含了多项式的系数。比如

```
EDU >> q = [1 8 16];
```

```
EDU >> roots(q)
```

将得到:

```
ans =
    -4
    -4
```

MATLAB也可以用来求有理函数  $N(s)/D(s)$  的留数,使用的函数是 `residue()`。例如:

```
EDU >> [r p y] = residue(N,D);
```

它返回三个矢量  $r, p$  和  $y$ , 因此:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{x-p_1} + \frac{r_2}{x-p_2} + \cdots + \frac{r_n}{x-p_n} + y(s)$$

上式是没有多重极点的情况。对于  $n$  重极点的情况, 则:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{(x-p)^1} + \frac{r_2}{(x-p)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(x-p)^n} + y(s)$$

需要注意的是, 只要分子多项式的阶数比分母多项式的阶数低, 则矢量  $y(s)$  总是空的。

将上面的 MATLAB 命令中的分号去掉并执行, 得到的输出为:

```
r =
    -0.0556
    -0.3333
     0.0556

p =
    -6
    -6
     0

y =
    []
```

这与例 14.3 求得的解一致。

## 14.7 拉普拉斯变换的基本定理

现在来看两个定理——微分定理和积分定理, 它们可以认为是在电路分析中需要使用拉普拉斯变换的原因。利用这两个定理, 可以对电路的时域方程中的导数和积分进行变换。

### 14.7.1 时域微分定理

首先来看时域的微分。考虑时域函数  $v(t)$ , 已知其拉普拉斯变换存在, 设为  $V(s)$ 。希望求出  $v(t)$  的一阶导数的变换:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dv}{dt} dt$$

使用分部积分的方法, 有:

$$U = e^{-st} dV = \frac{dv}{dt} dt$$



于是:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = v(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}v(t)dt$$

当  $t$  趋于无穷大时,右边第一项必然趋于 0,否则  $\mathbf{V}(s)$  不存在。因此:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = 0 - v(0^-) + s\mathbf{V}(s)$$

于是:

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow s\mathbf{V}(s) - v(0^-) \quad (14.23)$$

对于高阶导数,可以得到类似的关系:

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow s^2\mathbf{V}(s) - sv(0^-) - v'(0^-) \quad (14.24)$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow s^3\mathbf{V}(s) - s^2v(0^-) - sv'(0^-) - v''(0^-) \quad (14.25)$$

其中  $v'(0^-)$  表示  $v(t)$  的一阶导数在初始时刻  $t=0^-$  时的值,  $v''(0^-)$  表示  $v(t)$  的二阶导数在初始时刻的值,以此类推。当所有初始条件为 0 时,可以看到,在时域中对  $t$  求一次微分相当于在频域中乘以  $s$ ;在时域中求两次微分相当于在频域中乘以  $s^2$ ,以此类推。因此,时域微分相当于频域相乘,这是一个实质上的简化!还将看到,即使初始条件不为 0,上面的说法也是成立的,下面将通过一个简单的例子来说明这一点。

**例题 14.4** 对于图 14.3 所示的串联  $RL$  电路,求流过  $4\Omega$  电阻的电流

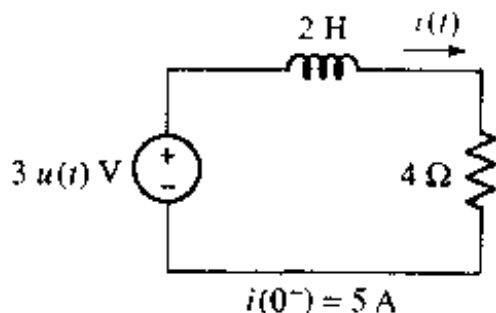


图 14.3 将微分方程  $2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$  变换为  $2[s\mathbf{I}(s) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(s) = 3/s$  来分析该电路

● 弄清问题的目标:

需要求出电流  $i(t)$  的表达式。

● 收集已知信息:

网络由一个阶跃电压驱动,已知电流的初始值( $t=0^-$  时刻的值)为 5 A。

● 选择最适合问题的已有方法:

如果对该电路应用 KVL,将得到一个以  $i(t)$  为未知量的微分方程。不过,这一次不像以前那样去求解微分方程,而是先对各项做拉普拉斯变换,将该方程变换到频域。

● 建立适当的方程组:

使用 KVL,列出时域单回路方程,得到:

$$2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

对各项进行拉普拉斯变换,得:

$$2[s\mathbf{I}(s) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(s) = \frac{3}{s}$$

● 确定是否需要其他信息:

这时已经得到一个方程,从中可以求出与  $i(t)$  对应的频域量  $\mathbf{I}(s)$ 。

● 试解:

然后求解  $\mathbf{I}(s)$ , 将  $i(0^-) = 5$  代入:

$$(2s + 4)\mathbf{I}(s) = \frac{3}{s} + 10$$

于是:

$$\mathbf{I}(s) = \frac{1.5}{s(s+2)} + \frac{5}{s+2}$$

而

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{I}(s)] = 0.75$$

以及

$$\lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)\mathbf{I}(s)] = -0.75 + 5$$

因此:

$$\mathbf{I}(s) = \frac{0.75}{s} + \frac{4.25}{s+2}$$

然后用已知的变换对进行逆变换,得:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.75u(t) + 4.25e^{-2t}u(t) \\ &= (0.75 + 4.25e^{-2t})u(t) \text{ A} \end{aligned}$$

● 证实所得解是否合理和满足要求:

根据以前求解这种类型电路的经验,知道这里的响应形式为一个直流受迫响应加上一个指数衰减的自由响应。当  $t=0$  时,得到  $i(0) = 5 \text{ A}$ ,与初始条件一致,当  $t \rightarrow \infty$  时,  $i(t) \rightarrow \frac{3}{4} \text{ A}$ ,这和所预想的一致。

至此,完成了求解  $i(t)$  的过程。 $i(t)$  既包含受迫响应  $0.75u(t)$ ,也包含自由响应  $4.25e^{-2t}u(t)$ ,而且自动满足初始条件。可以看到,在含有许多微分方程时,用这种方法求解完全响应并不太复杂。

## 练习

14.8 使用拉普拉斯变换的方法,求出图 14.4 所示电路中  $i(t)$  的表达式。

答案:  $(0.25 + 4.75e^{-20t})u(t) \text{ A}$

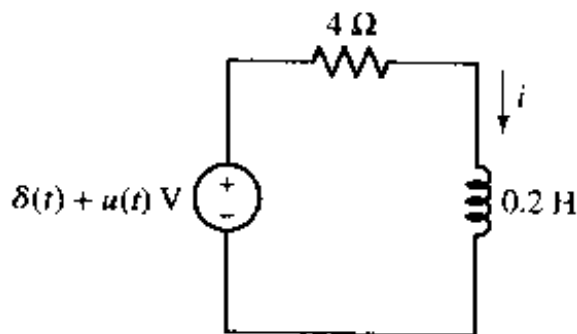


图 14.4

### 14.7.2 时域积分定理

当电路方程中含有时域积分方程时,也可以使用和上面的相类似的方法进行简化求解。

首先来求时域函数  $\int_{0^-}^t v(x) dx$  的拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t v(x) dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_{0^-}^t v(x) dx\right] dt$$

采用分部积分,令:

$$u = \int_{0^-}^t v(x) dx, \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = v(t) dt, \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

则:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t v(x) dx\right\} &= \left\{\left[\int_{0^-}^t v(x) dx\right] \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} v(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0^-}^t v(x) dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s} \mathbf{V}(s) \end{aligned}$$

因为  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{-st} \rightarrow 0$ , 因此, 右边第一项取积分上限的时候等于 0, 而当  $t \rightarrow 0^-$  时, 即该项取下限时也为 0, 于是只剩下  $\mathbf{V}(s)/s$  一项, 因此:

$$\int_{0^-}^t v(x) dx \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}(s)}{s} \quad (14.26)$$

即在时域中积分相当于在频域中除以  $s$ 。同样, 时域中相对复杂的微积分运算简化为频域中的代数运算。

**例题 14.5** 求图 14.5 所示的串联 RC 电路中当  $t > 0$  时  $i(t)$  的表达式

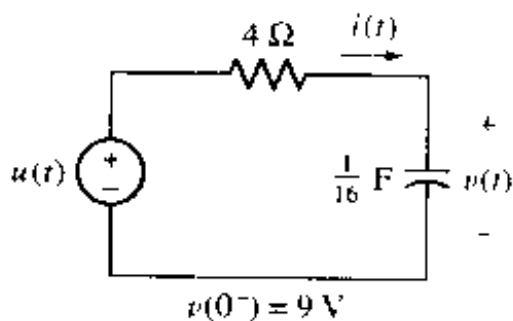


图 14.5 用拉普拉斯变换对  $\int_{0^-}^t i(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{s} \mathbf{I}(s)$  来分析电路的例子

首先列出单回路方程:

$$u(t) = 4i(t) + 16 \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

为了应用时域积分定理, 对其进行整理, 使得积分的下限为  $0^-$ 。因此, 进行下面的变换:

$$\begin{aligned} 16 \int_{-\infty}^t i(t) dt &= 16 \int_{-\infty}^{0^-} i(t) dt + 16 \int_{0^-}^t i(t) dt \\ &= v(0^-) + 16 \int_{0^-}^t i(t) dt \end{aligned}$$

于是:

$$u(t) = 4i(t) + v(0^-) + 16 \int_{0^-}^t i(t) dt$$

然后对方程的两边做拉普拉斯变换。因为使用的是单边的拉普拉斯变换,因此 $\mathcal{L}\{v(0^-)u(t)\}$ 可以简化为 $\mathcal{L}\{v(0^-)\}$ ,于是:

$$\frac{1}{s} = 4\mathbf{I}(s) + \frac{9}{s} + \frac{16}{s}\mathbf{I}(s)$$

解出  $\mathbf{I}(s)$  为:

$$\mathbf{I}(s) = \frac{-2}{s+4}$$

然后立刻可以得到要求的结果:

$$i(t) = -2e^{-4t}u(t) \quad \text{A}$$

**例题 14.6** 求例题 14.5 电路中的  $v(t)$ , 为了方便起见, 重新在图 14.6 中画出该电路。这时, 只列出单节点方程:

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = 0$$

两边做拉普拉斯变换, 得:

$$\frac{\mathbf{V}(s)}{4} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{16}s\mathbf{V}(s) - \frac{v(0^-)}{16} = 0$$

或

$$\mathbf{V}(s) \left(1 + \frac{s}{4}\right) = \frac{1}{s} + \frac{9}{4}$$

因此:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{4}{s(s+4)} + \frac{9}{s+4} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} + \frac{9}{s+4} = \frac{1}{s} + \frac{8}{s+4}$$

做逆变换, 得:

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t})u(t)$$

这里, 不需要使用常规的解微分方程的方法, 就很快求得了电容上的电压。

然后来检验解的正确性, 注意到  $\left(\frac{1}{16}\right) dv/dt$  应该等于前面求得的  $i(t)$  在  $t > 0$  时的表达式:

$$\frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{16} (-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

这与例题 14.5 所得的结果一致。

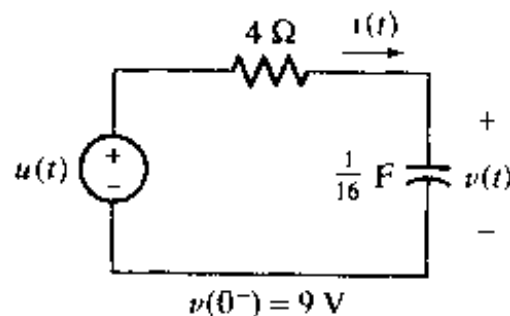


图 14.6 重画例题 14.6 中的图 14.5 所示的电路, 求  $v(t)$