

储能量。

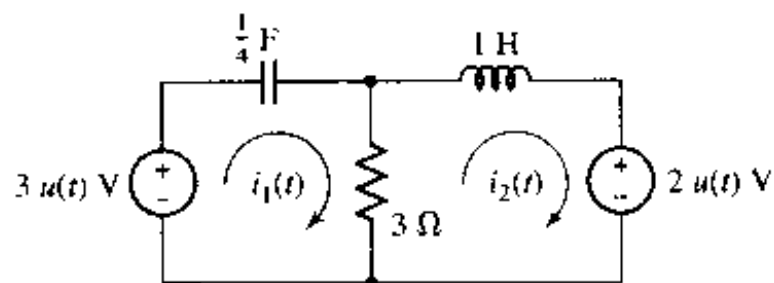


图 15.8

答案: $i_1 = e^{-2t/3} \cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (\sqrt{2}/8)e^{-2t/3} \sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$;

$$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3} \cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (13\sqrt{2}/24)e^{-2t/3} \sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$$

例题 15.4 如图 15.9(a)所示电路,用节点分析法求出电压 v_1 , v_2 和 v_3 , 已知在 $t=0^-$ 时电路没有存储能量

电路中包含三个独立的能量存储元件,但在 $t=0^-$ 时刻均没有存储能量,因此,可以将它们分别转换为相应的阻抗,如图 15.9(b)所示。注意到,图中存在一个受节点电压 $v_2(t)$ 控制的电流源。

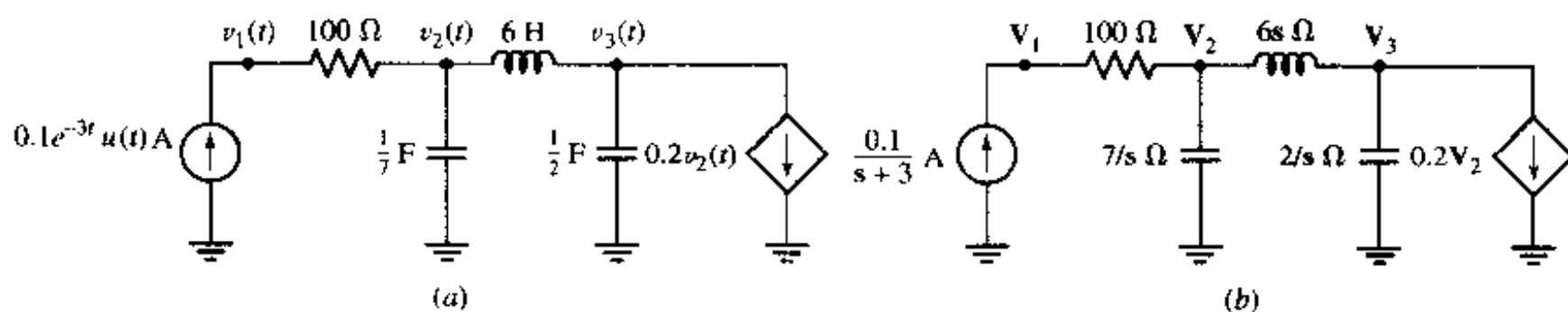


图 15.9 (a)四个节点的电路,其中包含两个电容和一个电感,它们在 $t=0^-$ 时均没有存储能量;(b)频域等效电路

从节点 1 开始,列出下面的节点方程:

$$\frac{0.1}{s+3} = \frac{V_1 - V_2}{100}$$

即

$$\frac{10}{s+3} = V_1 - V_2 \quad (\text{节点 1})$$

对节点 2,有:

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{100} + \frac{V_2}{7/s} + \frac{V_2 - V_3}{6s}$$

即

$$-42sV_1 + (600s^2 + 42s + 700)V_2 - 700V_3 = 0 \quad (\text{节点 2})$$

最后,对节点 3,有:

$$-0.2V_2 = \frac{V_3 - V_2}{6s} + \frac{V_3}{2/s}$$

即

$$(1.2s - 1)V_2 + (3s^2 + 1)V_3 = 0$$

求解以上关于节点电压的方程组,可以得到:

$$V_1 = 3 \times \frac{100s^3 + 7s^2 + 150s + 49}{(s+3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$V_2 = 7 \times \frac{3s^2 + 1}{(s+3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$V_3 = -1.4 \times \frac{6s - 5}{(s+3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

剩下的最后一步是对各电压分别进行拉普拉斯逆变换,可以得到 $t > 0$ 时的解:

$$v_1(t) = 9.789e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t} \cos(1.251t) \\ + 0.05172e^{0.1471t} \sin(1.251t) \text{ V}$$

$$v_2(t) = -0.2105e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t} \cos(1.251t) \\ + 0.05172e^{0.1471t} \sin(1.251t) \text{ V}$$

$$v_3(t) = -0.03459e^{-3t} + 0.06631e^{-0.2941t} - 0.03172e^{0.1471t} \cos(1.251t) \\ - 0.06362e^{0.1471t} \sin(1.251t) \text{ V}$$

可以看出,响应以指数方式增长,这是由于受控电流源影响的结果。事实上,电路将变得失控,这意味着在某个时刻,某个元件将会溶化、爆炸或者产生其他类似的不良后果。虽然使用 s 域方法分析这种电路工作量比较大,但是与采用时域分析方法相比,其优势还是很明显的。

练习

15.4 如图 15.10 所示电路,采用节点分析方法,求解电压 v_1 , v_2 和 v_3 。假定 $t = 0^-$ 时电感中没有存储能量。

答案: $v_1(t) = -30\delta(t) - 14u(t) \text{ V}$; $v_2(t) = -14u(t) \text{ V}$; $v_3(t) = 24\delta(t) - 14u(t) \text{ V}$

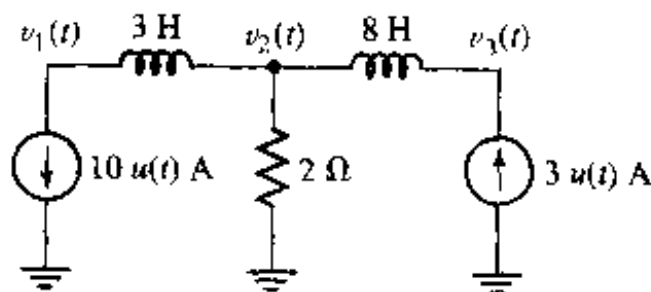


图 15.10

15.4 其他电路分析方法

对某个特定的电路而言,根据求解的目标不同,通过仔细选择分析方法,往往可以减少工作量。举个例子来说,对于一个含有 215 个独立电源的电路,采用线性叠加原理来计算一般是不可取的,因为这时一共需要分析 215 个独立电路!而如果把无源元件(比如电容和电感)看做阻抗,就可以使用第 3 章、第 4 章和第 5 章中学过的任何电路分析方法来分析它们的 s 域等效电路,这样可能会简单得多。

在 s 域中,线性叠加原理、电源变换、戴维南定理和诺顿定理均适用。

例题 15.5 使用电源变换化简图 15.11(a)所示的电路,并求出电压 $v(t)$ 的表达式

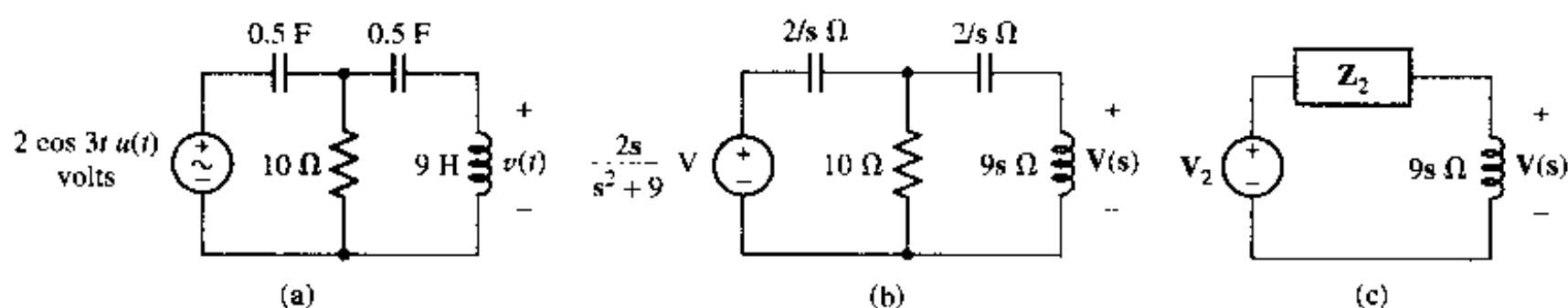


图 15.11 (a)需要化简的电路(使用电源变换);(b)频域表示;(c)化简后的电路

和以前一样,首先将该电路转化为相应的频域等效电路。由于图中没有给出初始电流和初始电压,而电压源包含因子 $u(t)$,因此可以断定在初始时刻,电路中没有存储能量。这样,可以画出其频域等效电路,如图 15.11(b)所示。

接下来,为了把两个 $2/s \Omega$ 的阻抗和 10Ω 的电阻合并在一起,连续进行几次电源变换。因为 $9s \Omega$ 的阻抗上的电压为所求电压 $V(s)$,因此不合并该阻抗。现在,将电压源和最左边的 $2/s \Omega$ 的阻抗转化为下面的电流源与 $2/s \Omega$ 的阻抗并联的形式:

$$I(s) = \left(\frac{2s}{s^2+9} \right) \left(\frac{s}{2} \right) = \frac{s^2}{s^2+9} \text{ A}$$

转换后,得到 $Z_1 = (2/s) \parallel 10 = 20/(10s+2) \Omega$,它与电流源并联。再进行下一次电源变换,可以得到电压源 $V_2(s)$ 为:

$$V_2(s) = \left(\frac{s}{s^2+9} \right) \left(\frac{20}{10s+2} \right)$$

该电压源与 Z_1 和剩下的 $2/s$ 阻抗串联,将 Z_1 和这个 $2/s$ 阻抗合并,得到新的阻抗 Z_2 为:

$$Z_2 = \frac{20}{10s+2} + \frac{2}{s} = \frac{40s+4}{s(10s+2)} \Omega$$

图 15.11(c)画出了最后得到的电路。这时,根据分压关系,可以得到电压 $V(s)$ 的表达式为:

$$V(s) = \left(\frac{s^2}{s^2+9} \right) \left(\frac{20}{10s+2} \right) \frac{9s}{9s + \left[\frac{40s+4}{s(10s+2)} \right]}$$

$$= \frac{180s^4}{(s^2 + 9)(90s^3 + 18s^2 + 40s + 4)}$$

分母中的两个因子均含有复根 使用 MATLAB 进行部分分式分解并求出留数:

```
EDU >> d1 = 's^2 + 9';
EDU >> d2 = '90 * s^3 + 18 * s^2 + 40 * s + 4';
EDU >> d = symmul(d1, d2);
EDU >> denominator = expand(d);
EDU >> den = sym2poly(denominator);
EDU >> num = [180 0 0 0 0];
EDU >> [r p y] = residue(num, den);
```

于是得到:

$$V(s) = \frac{1.047 + j0.0716}{s - j3} + \frac{1.047 - j0.0716}{s + j3} - \frac{0.0471 - j0.0191}{s + 0.04885 - j0.6573} - \frac{0.0471 + j0.0191}{s + 0.04885 + j0.6573} + \frac{5.590 \times 10^{-5}}{s + 0.1023}$$

注意到,含有复极点的项均与其共轭项一起出现,对任何物理系统,复极点总是以共轭对的形式出现。

对各项做逆变换,将 $1.047 + j0.0716$ 表示为 $1.049e^{j3.912^\circ}$, 将 $0.047 + j0.0191$ 表示为 $0.05083e^{j157.9^\circ}$, 得到:

$$\begin{aligned} v(t) = & 1.049e^{j3.912^\circ} e^{j3t} u(t) + 1.049e^{-j3.912^\circ} e^{-j3t} u(t) \\ & + 0.05083e^{-j157.9^\circ} e^{-0.04885t} e^{-j0.6573t} u(t) \\ & + 0.05083e^{j157.9^\circ} e^{-0.04885t} e^{j0.6573t} u(t) + 5.590 \times 10^{-5} e^{-0.1023t} u(t) \end{aligned}$$

将复指数形式转换为正弦形式,这样可以将电压写成简单一些的表达形式:

$$\begin{aligned} v(t) = & [5.590 \times 10^{-5} e^{-0.1023t} + 2.098 \cos(3t + 3.912^\circ) \\ & + 0.1017 e^{-0.04885t} \cos(0.6573t + 157.9^\circ)] u(t) \text{ V} \end{aligned}$$

练习

15.5 使用电源变换的方法,将图 15.12 所示的电路化简为 s 域中一个电流源和一个阻抗并联的形式。

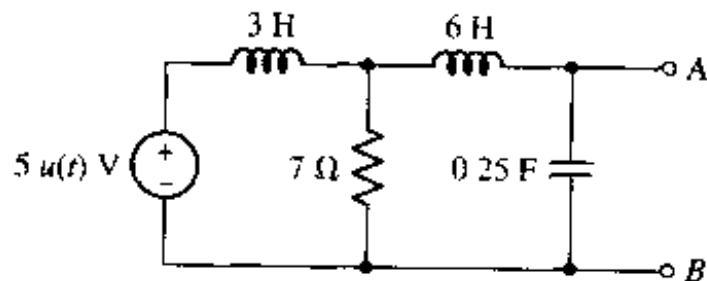


图 15.12

答案: $I_s = \frac{35}{s_2(18s + 163)} \text{ A}$, $Z_s = \frac{72s^2 + 252s}{18s^3 + 21s^2 + 54s + 28} \Omega$

例题 15.6 求图 15.13(a) 中虚线框中的网络的戴维南等效电路

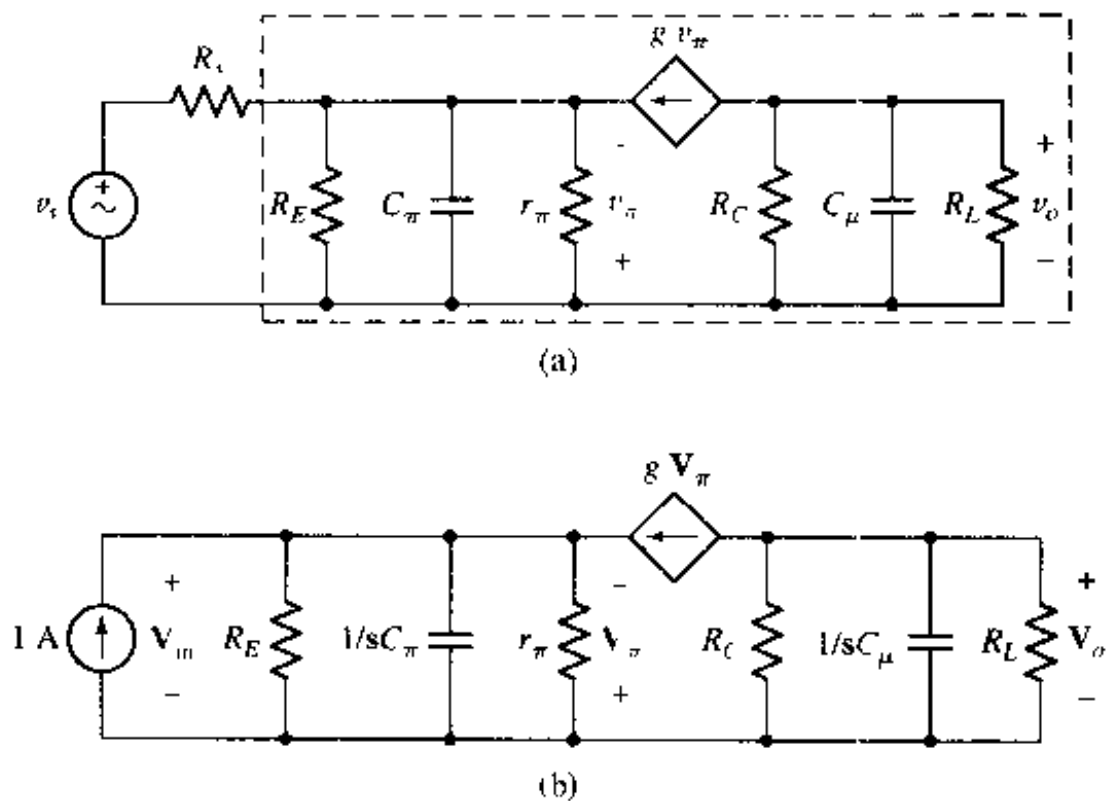


图 15.13 (a) 晶体三极管“共基极”放大器等效电路; (b) 频域等效电路, 用 1 A 的测试电源代替了由 v_i 和 R_i 表示的输入电源

该电路称为晶体三极管共基极放大器的“混合 π ”模型。其中, 两个电容 C_π 和 C_μ 表示晶体管的内部电容, 它们的数量级一般为 pF; 电阻 R_L 表示输出设备的戴维南等效阻抗, 输出设备可以是扬声器或者半导体激光器等; 电压源 v_i 和电阻 R_i 合在一起代表输入设备的戴维南等效电路, 输入设备可以是麦克风、光敏电阻或者是无线电天线等。然后, 来确定与输入设备连接的电路的戴维南等效阻抗, 通常称之为放大器的输入阻抗。将电路转化为其频域等效电路之后, 为求出输入阻抗, 将输入设备 (v_i 和电阻 R_i) 替换为 1 A 的“测试”电流源, 如图 15.13(b) 所示, 这时, 输入阻抗 Z_m 为:

$$Z_m = \frac{V_m}{1}$$

或者简单地表示为 V_m , 必须求出在这个 1 A 电流源驱动下, 以电阻、电容以及受控源参数 g 表示的 V_m 的表达式。

对于输入点, 列出节点方程:

$$1 + gV_\pi = \frac{V_m}{Z_{eq}}$$

其中:

$$Z_{eq} \equiv R_i \parallel \frac{1}{sC_\pi} \parallel r_\pi = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi}$$

因为 $V_\pi = -V_m$, 所以:

$$Z_m = V_m = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi + gR_E r_\pi} \Omega$$

练习

15.6 求出图 15.14 中,与 $1\ \Omega$ 电阻相连的电路的戴维南等效电路,要求在频域中进行分析。

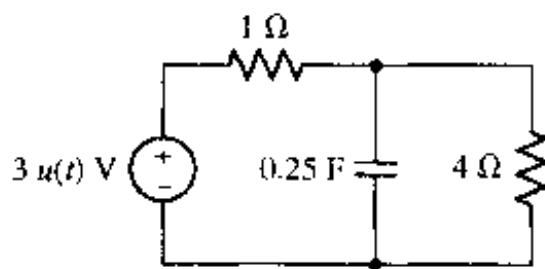


图 15.14

答案: $I_{sc} = 3(s+1)/4s\text{ A}$; $Z_{th} = 4/(s+1)\ \Omega$

15.5 极点、零点和传递函数

考虑图 15.15(a)所示的简单电路,其 s 域等效电路如图 15.15(b)所示,使用节点分析可得:

$$0 = \frac{V_{out}}{1/sC} + \frac{V_{out} - V_{in}}{R}$$

整理并解出 V_{out} , 得:

$$V_{out} = \frac{V_{in}}{1 + sRC}$$

或者:

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (15.7)$$

$H(s)$ 称为该电路的传递函数(transfer function),定义为输出和输入的比值。可以随意指定一个电流是输入量还是输出量,这样,对于同一个电路将有不同的传递函数。在读电路图的时候,一般是从左往右的,因此,设计者们总是尽可能地以左边作为电路的输入端,而右边作为电路的输出端。

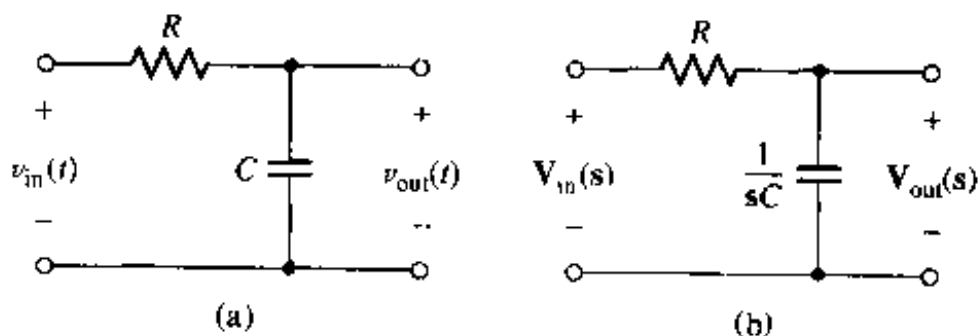


图 15.15 (a)简单的电阻-电容电路,输入电压和输出电压均已给定;(b) s 域的等效电路

不管是在电路分析还是在别的工程领域中,传递函数的概念都是非常重要的。这有两个原因,首先,一旦知道了某个电路的传递函数,对任何给定的输入,都可以很容易得到电路的输出,只要将输入的 s 域表达式乘以 $H(s)$,然后对其进行逆变换即可。其次,传递函数的形式包含了电路(或者系统)特性的许多信息,而这些特性正是想要了解的。

下面将看到,为了判断系统的稳定性,需要确定传递函数的极点和零点。式(15.7)可以改写为:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \quad (15.8)$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时, 其幅度趋于 0, 因此, $\mathbf{H}(s)$ 在 $s = \infty$ 时有一个零点; 当 $s = -1/RC$ 时, 该函数趋于无穷大, 因此 $\mathbf{H}(s)$ 在 $s = -1/RC$ 时有一个极点。这些频率称为临界频率, 如果可以尽早将它们找出, 则能够减小绘制响应曲线的工作量。将在 15.7 节中讨论响应曲线。

15.6 卷积

这一节要介绍一种方法, 使用它可以简化线性电路分析中的如下问题: 即给定一个或几个激励函数(forcing function), 确定电路输出响应的表达式。将使用一种称为系统函数(system function)的传递函数来进行求解, 后面将看到, 系统函数即为电路的单位冲激响应的拉普拉斯变换。

15.6.1 冲激响应

考虑一个没有初始能量储存的线性电路网络 N , 以激励函数 $x(t)$ 作为输入, 则在这个电路中的某个点, 将产生一个响应函数 $y(t)$ 。图 15.16(a) 中画出了电路的框图以及时间函数的草图。因为只有在时间区间 $a < t < b$ 内才有输入, 因此只有在 $t > a$ 时, $y(t)$ 才有输出。

下面需要回答的问题是: “如果知道了 $x(t)$ 的形式, 那么 $y(t)$ 将有什么样的形式呢?” 为了回答这个问题, 需要对 N 的情况有一些了解。假定知道 N 在单位冲激 $\delta(t)$ 输入下的响应 $h(t)$, 如图 15.16(b) 所示。通常称函数 $h(t)$ 为单位冲激响应函数, 或者简称为冲激响应, 在描述电路特性时这个概念非常重要。

有了拉普拉斯变换的基础, 就可以从一个稍微有点不同的角度来看这个问题。设 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\mathbf{X}(s)$, $y(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\mathbf{Y}(s)$, 将传递函数 $\mathbf{H}(s)$ 定义为:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{X}(s)}$$

如果 $x(t) = \delta(t)$, 那么根据表 14.1 可知 $\mathbf{X}(s) = 1$, 于是 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)$, 因此, 这时 $h(t) = y(t)$ 。

如果假定单位冲激不是作用在 $t = 0$, 而是 $t = \lambda$, 那么可以看到输出发生的惟一变化是有一个时延。也就是说, 当输入为 $\delta(t - \lambda)$ 时, 输出为 $h(t - \lambda)$, 如图 15.16(c) 所示。然后, 假定输入的不是单位脉冲, 而是有一定强度的脉冲, 特别是, 假设其强度在数值上等于 $t = \lambda$ 时 $x(t)$ 的值, 即等于 $x(\lambda)$, 这是一个常数。已知对于线性电路而言, 输入乘以一个常数将导致输出按相应的比例发生变化, 因此, 如果输入变为 $x(\lambda)\delta(t - \lambda)$, 那么输出响应将变为 $x(\lambda)h(t - \lambda)$, 如图 15.16(d) 所示。

将最后这个输入[即 $x(\lambda)\delta(t - \lambda)$]对所有可能的 λ 进行累加, 并将累加的结果作为 N 的激励函数(forcing function), 根据线性原理可知, 输出必为 $x(\lambda)h(t - \lambda)$ 对所有可能的 λ 进行累加的结果。不那么严格地说, 输入积分导致了输出积分, 如图 15.16(e) 所示。但是, 现在输入是什么呢? 根据单位冲激的时移特性^①, 可以看到输入正是原来的 $x(t)$ 。

^① 在 14.5 节中介绍了冲激响应的时移特性, 可以将其表示为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$ 。

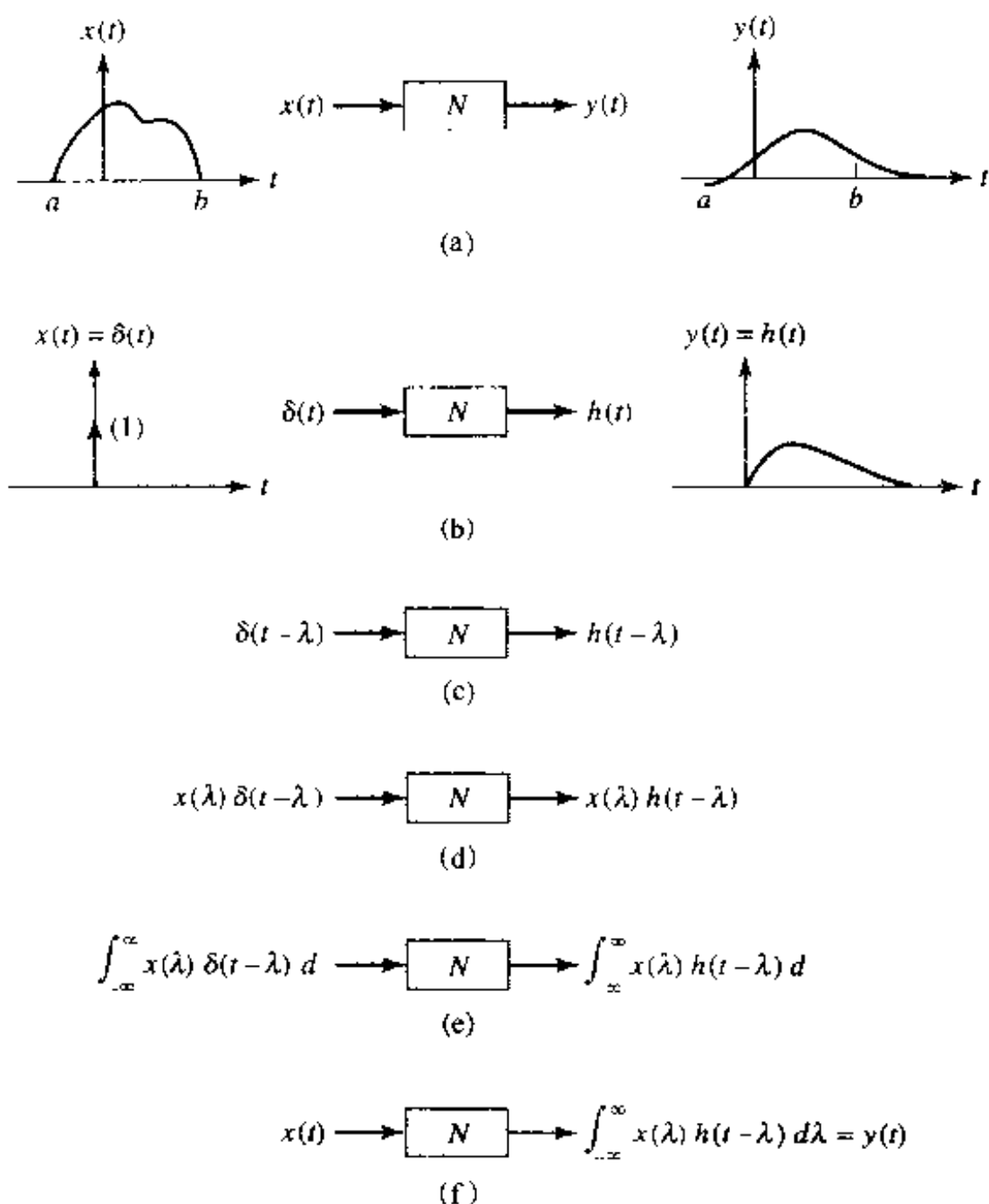


图 15.16 卷积积分的推演过程

15.6.2 卷积积分

现在终于得到了问题的答案。当给定 N 的输入 $x(t)$, 并且知道 N 的冲激响应 $h(t)$ 时, 其输出或者说响应函数可以表示为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \quad (15.9)$$

如图 15.16(f) 所示。这个重要的关系称为卷积积分。换句话说, 这个方程说明: 输出等于输入与冲激响应的卷积, 通常将其简写为:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

注意不要把这个新运算符与乘法相混淆。其中星号读做“与……卷积”。

可以将 (15.9) 表示为稍有不同但等价的形式。令 $z = t - \lambda$, 则 $d\lambda = -dz$, 那么 $y(t)$ 的表达式变成:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -x(t - z) h(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - z) h(z) dz$$

因为积分的结果和积分变量名的选取无关, 可以将 (15.9) 写成:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z) h(t-z) dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z) h(z) dz
 \end{aligned} \quad (15.10)$$

要记住式(15.10)中两种卷积积分的表达形式。

15.6.3 卷积与物理可实现系统

式(15.10)中的结果对任何线性系统都是适用的,然而,通常感兴趣的是物理可实现系统,即那些已经存在或者能够存在的系统,这种系统的特性使得它的卷积积分的形式与一般形式略有不同,系统不能在激励函数作用之前产生响应。特别是,设 $h(t)$ 为系统在 $t=0$ 时单位冲激作用下产生的响应,那么,在 $t<0$ 时, $h(t)$ 并不存在。这样,当 $z<0$ 时,式(15.10)的第二个积分的被积函数等于零;当 $t-z<0$ 或者说 $z>t$ 时,第一个积分的被积函数也等于零。因此,对物理可实现系统,其卷积积分的积分限将有所不同:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(z) h(t-z) dz \\
 &= \int_0^{\infty} x(t-z) h(z) dz
 \end{aligned} \quad (15.11)$$

式(15.10)和式(15.11)都是正确的,但是,当谈到线性可实现系统时,后者更为明确。

在进一步讨论冲激函数的重要性之前,先来看一个数值的例子,这样有助于了解卷积积分的计算过程。虽然积分表达式本身很简单,但有时候计算起来却很麻烦,特别是在选取积分范围的时候。

假定输入是一个 $t=0$ 时的矩形电压脉冲,宽度为 1 秒,幅度为 1 V:

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

同时,假定输入电路的冲激响应为指数衰减函数:

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

需要求的是输出电压 $v_o(t)$ 。可以立即写出积分形式的解答:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} v_i(t-z) h(z) dz \\
 &= \int_0^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)] dz
 \end{aligned}$$

得到 $v_o(t)$ 的这种表达式是很简单的,但是积分里面的许多单位阶跃函数却使得化简十分麻烦,因为必须注意被积函数等于零的那些积分区间。

15.6.4 用图解法求卷积

使用图形可以帮助理解卷积积分的含义。首先画出若干条 z 轴,每条 z 轴画在另一条的上方,如图 15.17 所示。知道了 $v_i(t)$ 的形状,即知道了 $v_i(z)$ 的形状,如图 15.17(a)所示。而 $v_i(-z)$ 只是 $v_i(z)$ 相对于变量 z 的翻转,或者说是相对于纵轴的反折,如图 15.17(b)所示。然

后画出 $v_i(t-z)$, 这可以将 $v_i(-z)$ 往右移动 $z=t$ 来得到, 如图 15.17(c) 所示。在下一条 z 轴上 [图 15.17(d)], 画出了冲激响应 $h(z) = 2e^{-z}u(z)$ 。

最后, 将 $v_i(t-z)$ 和 $h(z)$ 相乘, 如图 15.17(e) 所示。因为 $h(z)$ 在 $z=0$ ^① 之前没有定义, 而 $v_i(t-z)$ 在 $z>t$ 时没有定义, 因此可以看到, 在 $t<1$ 时, 这两个函数的乘积只有在 $0<z<t$ 时才有非零值; 而当 $t>1$ 时, 乘积的非零区间为 $(t-1)<z<t$ 。乘积曲线下面的区域 (图中阴影部分) 面积在数值上等于 v_o 在指定时刻 t 的输出, 如图 15.17(c) 所示。当 t 从零到无穷大变化时, 乘积曲线下面的区域面积也随着增大, 即 $v_o(t)$ 逐渐增大。但是, 当 t 增加到 $t=1$ 时, 乘积曲线下面的区域面积开始变小, 逐渐趋于零。当 $t<0$ 时, $v_i(t-z)$ 和 $h(z)$ 没有重叠区间, 因此乘积曲线下面的区域面积为零。下面利用上面这些图形来得到 $v_o(t)$ 的完整表达式。

当 t 大于 0 小于 1 时, 积分区间为 $z=0$ 到 $z=t$; 当 t 大于 1 时, 积分区间为 $(t-1)<z<t$ 。因此, 可以得到:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t 2e^{-z} dz = 2(1 - e^{-t}), & 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{t-1}^t 2e^{-z} dz = 2(e - 1)e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

图 15.17(f) 中画出了该函数相对于时间变量 t 的曲线, 这样就完成了整个求解过程。

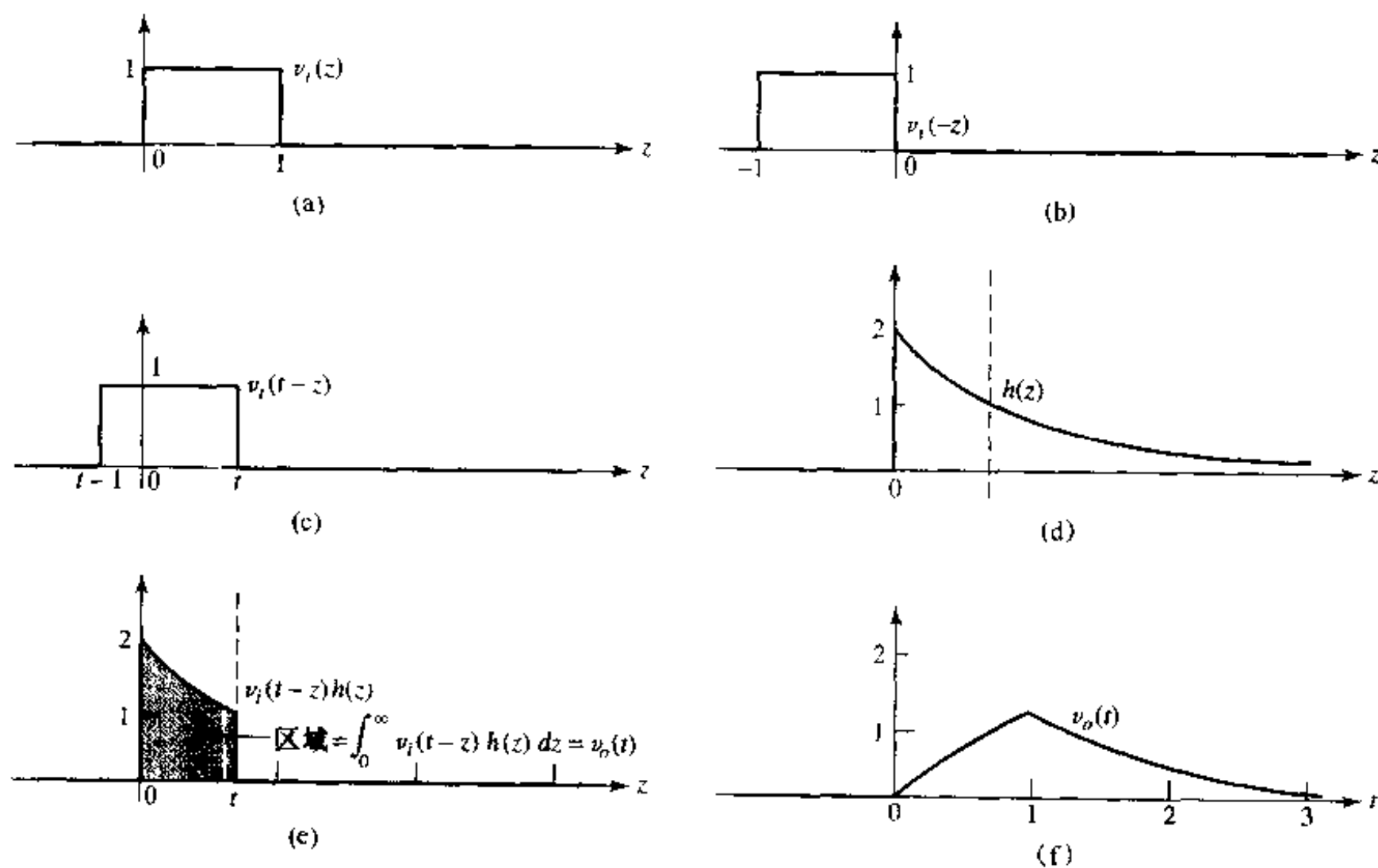


图 15.17 求卷积积分的图解法

① 原文为 $t=0$, 有误——译者注。

例题 15.7 将单位阶跃函数 $x(t) = u(t)$ 输入到冲激响应为 $h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$ 的系统中, 求相应的输出 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

首先, 画出 $x(t)$ 和 $h(t)$, 如图 15.18 所示, 选择式 (15.11) 中的第一种积分形式来进行计算:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z)dz$$

然后, 画出一系列的草图来帮助选取合适的积分区间。图 15.19 依次画出了下面这些函数: 输入 $x(z)$; 冲激响应 $h(z)$; $h(z)$ 关于纵轴的反折 $h(-z)$ 以及 $h(t-z)$, 它可以通过将 $h(-z)$ 往右移动 t 个单位得到 (对于这个图, 选择 t 的区间为 $0 < t < 1$)。

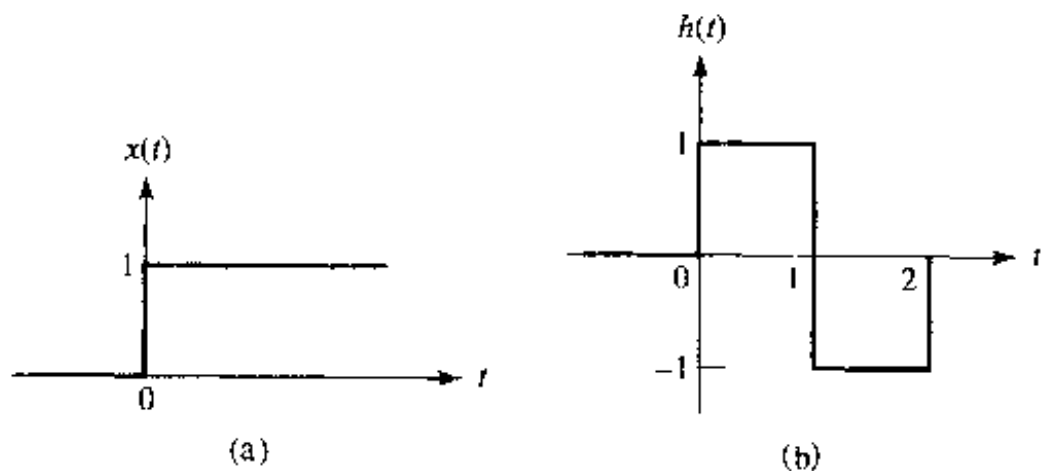


图 15.18 (a) 输入信号 $x(t) = u(t)$; (b) 线性系统的单位脉冲响应 $h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$

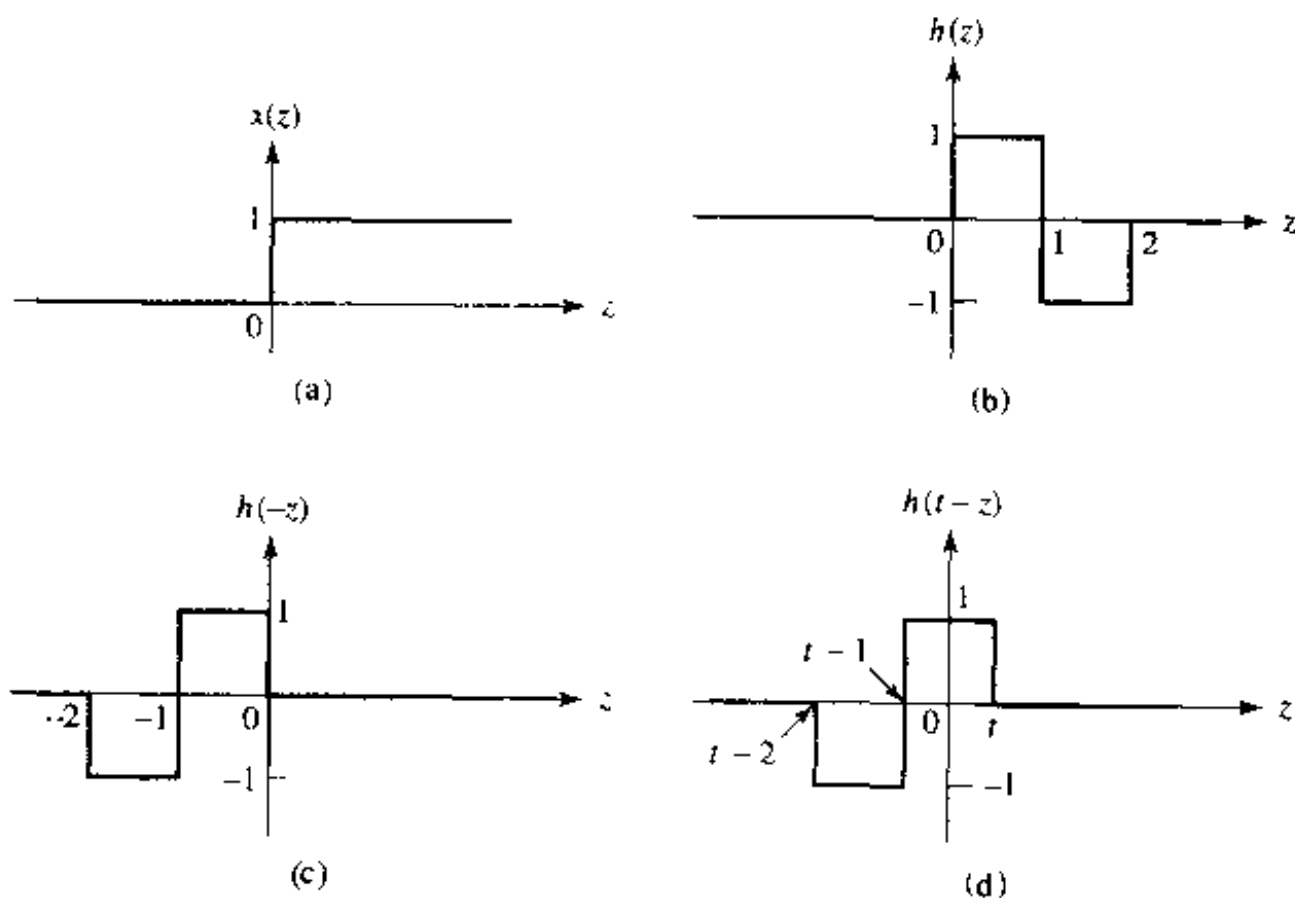


图 15.19 (a) 输入信号; (b) 以 z 为变量表示的单位冲激响应; (c) 由 $h(z)$ 轴反折的 $h(-z)$ 函数; (d) 当 $h(-z)$ 右移 t 单位时的 $h(t-z)$ 函数

现在, 容易想像出在 t 的各区间下第一个图 $x(z)$ 和最后一个图 $h(t-z)$ 的乘积。当 t 小于 0 时, 它们没有重叠区间, 因此:

$$y(t) = 0, \quad t < 0$$

对于图 15.19(d) 中的曲线, 它与 $x(z)$ 的重叠区间为 $z=0$ 到 $z=t$, 在每一点上, 乘积均为 1, 因此:

$$y(t) = \int_0^t (1 \times 1) dz = t, \quad 0 < t < 1$$

当 t 大于 1 小于 2 时, $h(t-z)$ 向右移动了足够远, 使得部分负的方波进入阶梯函数的非零区间, 这部分负的方波的区间为 $z=0$ 到 $z=t-1$ 。因此, 有:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t-1} [1 \times (-1)] dz + \int_{t-1}^t (1 \times 1) dz \\ &= -z \Big|_{z=0}^{z=t-1} + z \Big|_{z=t-1}^{z=t} \end{aligned}$$

因此:

$$y(t) = -(t-1) + t - (t-1) = 2-t, \quad 1 < t < 2$$

当 t 大于 2 时, $h(t-z)$ 向右移动了足够远, 这时它完全落在 $z=0$ 的右边, 于是:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-2}^{t-1} [1 \times (-1)] dz + \int_{t-1}^t (1 \times 1) dz \\ &= -z \Big|_{z=t-2}^{z=t-1} + z \Big|_{z=t-1}^{z=t} \end{aligned}$$

即

$$y(t) = -(t-1) + (t-2) + t - (t-1) = 0, \quad t > 2$$

将这四段合并起来, 得到 $y(t)$ 的连续的曲线如图 15.20 所示。

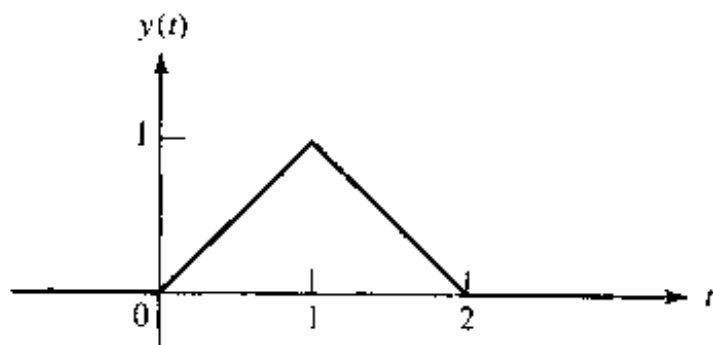


图 15.20 图 15.18 中 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积结果

练习

15.7 使用式(15.11)中第二种积分形式重做例题 15.7。

15.8 设网络的冲激响应为 $h(t) = 5u(t-1)$, 如果输入信号为 $x(t) = 2[u(t) - u(t-3)]$, 分别求当 t 等于(a) -0.5; (b) 0.5; (c) 2.5; (d) 3.5 时的输出 $y(t)$ 。

答案: 15.8: 0; 0; 15; 25

15.6.5 卷积和拉普拉斯变换的关系

设 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 分别为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换, 考虑 $f_1(t) * f_2(t)$ 的拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda\right\}$$

通常, 这两个时域函数的其中之一为作用于线性电路输入端的激励函数, 而另一个为电路的单

位冲激响应函数。

因为现在只考虑那些在 $t=0$ 之前等于零的函数(拉普拉斯变换的定义要求做这样的假定),因此,可以将积分的下限取为 0^- ,根据拉普拉斯变换的定义,有:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda \right] dt$$

因为 e^{-st} 和 λ 无关,可以将这个因子移到里面那个积分中,然后改变积分的顺序,得到:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda \right] dt$$

因为 $f_1(\lambda)$ 与 t 无关,使用相同的技巧,可以将它移到里面那个积分的外面:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(\lambda) \left[\int_0^\infty e^{-st} f_2(t-\lambda) d\lambda \right] dt$$

然后再对括号中的积分(可以将其中的 λ 视为常数)做变量替换 $x = t - \lambda$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_0^\infty f_1(\lambda) \left[\int_0^\infty e^{-s(\lambda+x)} f_2(x) dx \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} \left[\int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} [\mathbf{F}_2(s)] d\lambda \\ &= \mathbf{F}_2(s) \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

剩下的积分恰好等于 $\mathbf{F}_1(s)$,于是得到:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(s) \cdot \mathbf{F}_2(s) \quad (15.12)$$

这个表达式可以描述为:两个拉普拉斯变换的乘积的逆变换,等于它们各自逆变换的卷积。有时,这个结果在求逆变换时很有用。

例题 15.8 设 $\mathbf{V}(s) = 1/(s+\alpha)(s+\beta)$, 应用卷积定理求出 $v(t)$

前面已经在 14.6 节中用部分分式分解的方法求出了它的逆变换。现在将 $\mathbf{V}(s)$ 看做是两个变换的乘积:

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{1}{(s+\alpha)}$$

和

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{1}{(s+\beta)}$$

其中:

$$v_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

以及:

$$v_2(t) = e^{-\beta t} u(t)$$

立刻可以写出 $v(t)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(s)\mathbf{V}_2(s)\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda)v_2(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta t}e^{\beta\lambda}d\lambda \\ &= e^{-\beta t}\int_0^t e^{(\beta-\alpha)\lambda}d\lambda = e^{-\beta t}\frac{e^{(\beta-\alpha)t}-1}{\beta-\alpha}u(t) \end{aligned}$$

或者,可以写成更简洁的形式:

$$v(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$$

这和前面用部分分式分解的方法得到的结果一致。需要注意的是,表达式中必须包含单位阶跃函数 $u(t)$, 因为所有的(单边)拉普拉斯变换只对非负的时间范围才有意义。

用这种方法来求解是不是更容易一些? 只有那些喜欢做卷积积分的人才不这么认为! 当分式分解比较容易时,通常用部分分式分解方法比较简单。但是,一般情况下,在 s 域进行卷积更容易,因为只需要做乘法运算。

练习

15.9 重做例题 15.7, 要求在 s 域中进行卷积。

15.6.6 对传递函数进一步的讨论

已经知道,可以通过把输入 $v_i(t)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 进行卷积得到输出 $v_o(t)$ 。但是必须记住,冲激响应是在所有初始条件为零时,并在 $t=0$ 时输入的单位冲激作用下得到的。在这些前提下, $v_o(t)$ 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathbf{V}_o(s) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = \mathbf{V}_i(s)[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

因此,比值 $\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$ 等于冲激响应的拉普拉斯变换,用 $\mathbf{H}(s)$ 表示:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} \quad (15.13)$$

从式(15.13)可以看到,冲激响应和传递函数构成拉普拉斯变换对:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(s)$$

这个结论很重要,后面将利用它来分析一些电路的特性,而在此之前,分析这些电路很困难。

15.7 S 平面

现在来看一种更加一般的图形表示方法,它表示函数值随变量 s 变化的曲线,也就是说,将响应作为 σ 和 ω 的函数同时绘制出来。把激励函数关于复频率 s 的函数用图形表示出来,在电路分析中,以及在电路设计或者电路综合中,都是很有用,而且很有启发意义。有了复平面(或者说 s 平面)的概念之后,将会发现,根据 s 平面中的临界频率来对电路的行为特性

进行近似是一件很容易的事情。

相反的过程也同样很有意义:如果给定一个期望的响应曲线(比如一个滤波器的频率响应曲线),则可以根据其 s 平面中零点和极点的位置来进行滤波器综合。在分析反馈放大器和自动控制系统不希望出现的振荡时, s 平面也是一个基本的工具。

15.7.1 以 σ 为变量的响应函数

在得到以 s 为变量的响应函数之前,首先来考虑以 σ 或 ω 的为变量的函数来表示它。比如,假设网络的输入阻抗(或者说是激励点阻抗)由一个 $3\ \Omega$ 的电阻和一个 4 H 的电感串接而成。它是 s 的函数,可得:

$$Z(s) = 3 + 4s\ \Omega$$

如果想得到以 σ 为变量的该阻抗的函数曲线,可以令 $s = \sigma + j0$:

$$Z(\sigma) = 3 + 4\sigma\ \Omega$$

可以看到,它在 $\sigma = -\frac{3}{4}$ 处和无穷远处各有一个零点。在 σ 轴中将这两个临界频率标出,然后确定在某个非临界频率处 $Z(\sigma)$ 的值[比如取 $Z(0) = 3$],就很容易绘制出 $|Z(\sigma)|$ 随 σ 变化的曲线,如图 15.21 所示,这个图提供了输入为指数激励函数时系统阻抗的信息。特别是,在直流 ($\sigma = \omega = 0$) 情况下,可以看出其阻抗为 $3\ \Omega$,这和预想的一致。

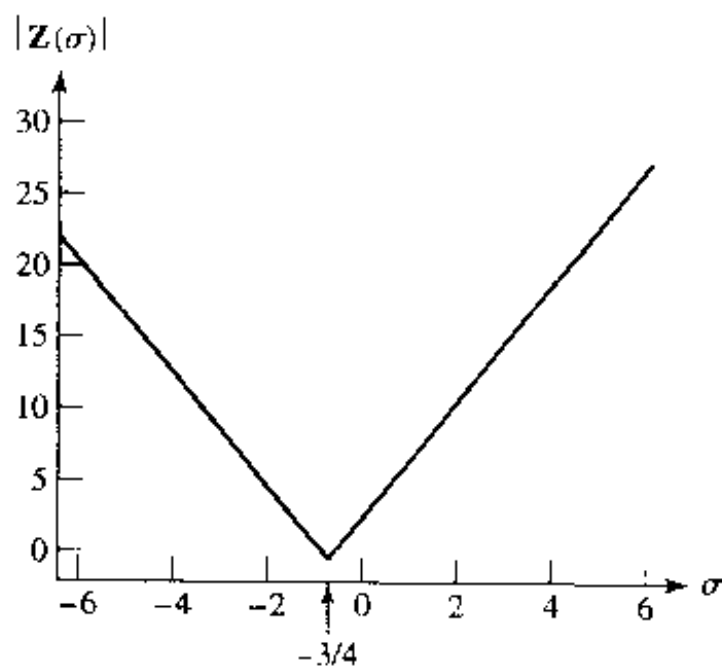


图 15.21 $|Z(\sigma)|$ 随频率 σ 变化的曲线

15.7.2 以 ω 为变量的响应函数

为了画出响应函数随着角频率 ω 变化的曲线,令 $s = 0 + j\omega$:

$$Z(j\omega) = 3 + j4\omega$$

然后可以得到 $Z(j\omega)$ 以 ω 为变量的幅度函数和相位函数:

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \quad (15.14)$$

$$\text{ang } Z(j\omega) = \tan^{-1} \frac{4\omega}{3} \quad (15.15)$$

从幅度函数 $|Z(j\omega)|$ 的表达式可以看出,它在无穷远处有惟一的一个极点,在 $\omega = 0$ 处有一个最小值,很容易画出它随 ω 变化的曲线。当频率增大时,阻抗的幅度也随着增大,这也和预想的电感特性完全一致。相位函数为反正切函数,当 $\omega = 0$ 时,它等于0;当 $\omega = \pm 90^\circ$ 时,它等于 $\pm \infty$,也很容易画出它随 ω 变化的曲线。图15.22中画出了式(15.14)和式(15.15)的曲线。

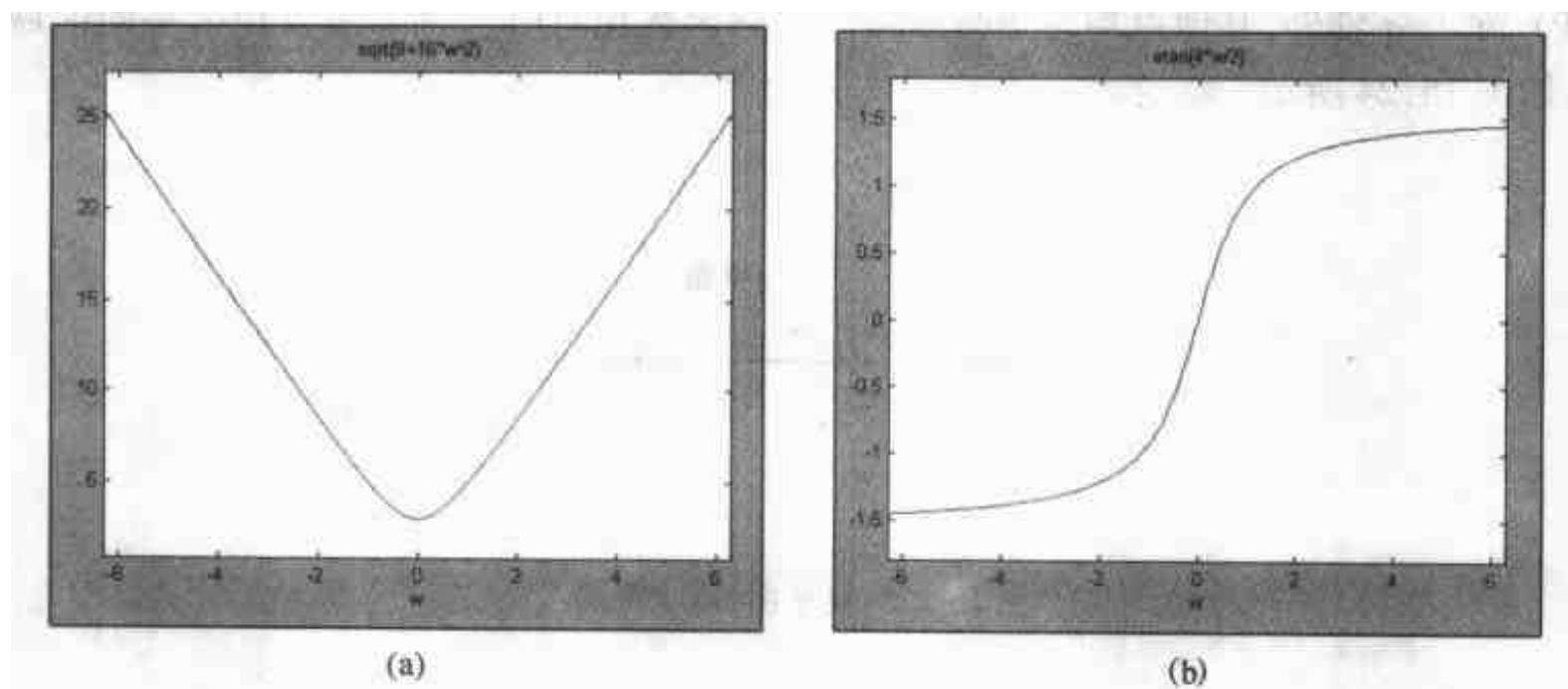


图 15.22 (a) $|Z(j\omega)|$ 随频率变化的曲线,该曲线是使用 MATLAB 命令 `EDU >> ezplot('sqrt(9 + 16 * w2)')` 画出的;(b) $Z(j\omega)$ 的相位随频率变化的曲线

描绘 $Z(j\omega)$ 随 ω 变化的曲线需要两个二维的曲线:幅度函数曲线和相位函数曲线。假定激励为指数函数,如果允许 σ 既可以取正值,也可以取负值,那么可以用一个二维的图形将阻抗函数所有的信息表示出来。然而,为了将 $Z(\sigma)$ 的幅度和 $Z(j\omega)$ 的幅度进行更加仔细的比较,忽略了 $Z(\sigma)$ 的相位角(它只取 0° 和 $\pm 180^\circ$ 这三个值)。值得注意的是,在指数函数的情况只有一个独立变量 σ ,而在正弦函数的情况下只有一个独立变量 ω 。现在来考虑,还有什么办法可以绘制出响应函数关于 s 变化的曲线。

15.7.3 在复平面上绘图

完整描述复频率 s 需要两个参数, σ 和 ω 。因为响应也是复函数,所以必须考虑如何绘制幅度和相位随 s 变化的曲线,它们中的任何一个(比如幅度)都是关于两个参数 σ 和 ω 的函数,在二维的情况下中,只能用一族曲线来描绘它,比如说以 σ 为参数,绘制幅度随着 ω 变化的函数;同样地,可以以 ω 为参数,绘制相位随着 σ 变化的函数。但是,绘制这样的一族曲线意味着进行大量的工作,这正是需要避免的,即使获得了这样一族曲线,能否从中得出任何有用的结论也是值得怀疑的。

一种较好的表示复数幅度响应曲线的方法是使用三维模型。在一张二维的纸上绘制这样的模型虽然很困难,但想像出这个模型却是容易的,因为无需给大脑提供什么工具就可以很快完成构图、修改和擦除,因此许多“绘制”的工作可以在大脑中完成。考虑放置在水平面(比如地面)上相互垂直的两个坐标轴, σ 轴和 $j\omega$ 轴,现在这个平面表示复平面,或者称为 s 平面,如图 15.23 所示。复平面上的每个点恰与 s 中的某个值相对应,而 s 中的每个值也对应于复平面上惟一的一个点。

已经熟悉了复频域 s 中的值与时域函数类型之间的对应关系,现在可以将 s 平面中的区

域与激励函数或者受激励响应的函数形式对应起来。比如,原点与直流量相对应; σ 轴上的点与指数函数相对应,当 $\sigma < 0$ 时,对应衰减的指数函数,当 $\sigma > 0$ 时,则对应增长的指数函数;正负 $j\omega$ 轴上的点与正弦函数相对应。 s 平面的右半 s 平面(通常简称为RHP)上的点,实部为正数,因此除了 σ 轴上的点以外,其他点均与指数增长的正弦函数相对应;而 s 平面的左半 s 平面(LHP),除了 σ 轴外,其他点均与指数衰减的正弦函数相对应。时域函数和 s 平面区域的对应关系如图15.24所示。

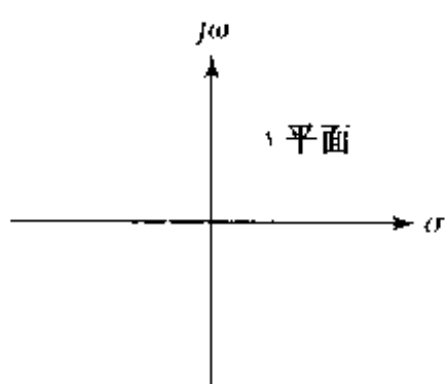


图 15.23 复平面,或 s 平面

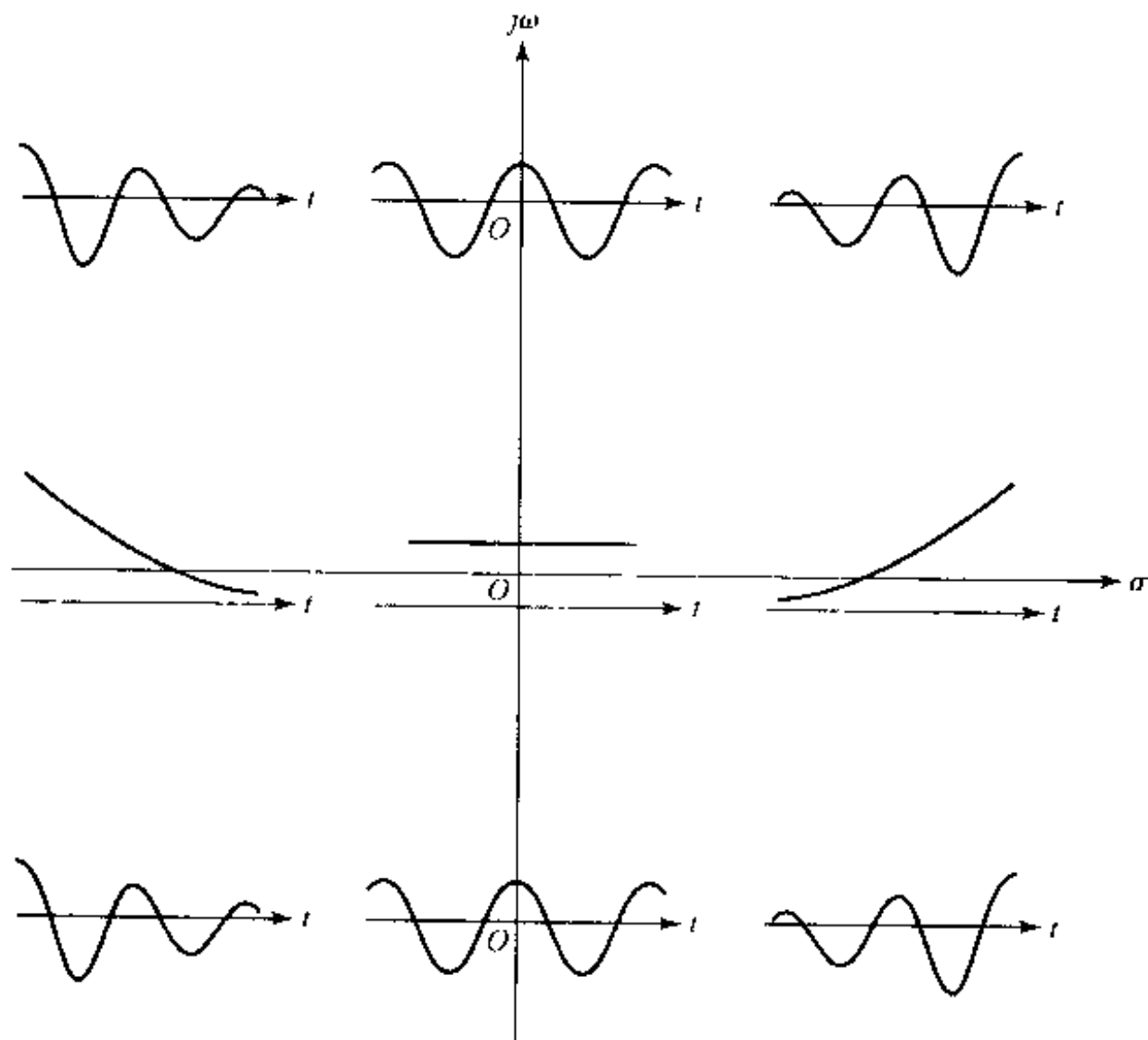


图 15.24 复平面上画出了各区域对应的时域函数特性

现在回到如何用图形表示响应函数随复频率 s 变化的问题上。响应的幅度可以用一个粘土构造的模型来表示,模型表面的每个点距离地面的高度对应于响应幅度在点 s 的值。换句话说,增加了一条新的轴,它通过原点并且垂直于 σ 轴和 $j\omega$ 轴,这条轴可以标注为 $|Z|$, $|Y|$, $|V_2/V_1|$ 或者别的合适的符号。对每一个 s ,响应的幅度都是确定的,把这些幅度点绘制在一起,就组成了 s 平面上方(或者与 s 平面相接触)的一个曲面。

例题 15.9 绘制出由一个 1 H 的电感和一个 $3\ \Omega$ 的电阻串联组成的导纳随 $j\omega$ 和 σ 变化的草图

这两个串联的元件组成的导纳可以用下式表示：

$$Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

做 $s = \sigma + j\omega$ 替换, 可以得到其幅度函数为:

$$|Y(s)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2 + \omega^2}}$$

当 $s = -3 + j0$ 时, 响应的幅度趋于无穷大; 而当 s 趋于无穷大时, $Y(s)$ 的幅度为零。因此在点 $(-3 + j0)$ 上, 模型的高度必然为无穷大, 而在离原点无穷远的任何地方, 模型的高度则必然为零。图 15.25(a) 中画出了该模型的剖面图。

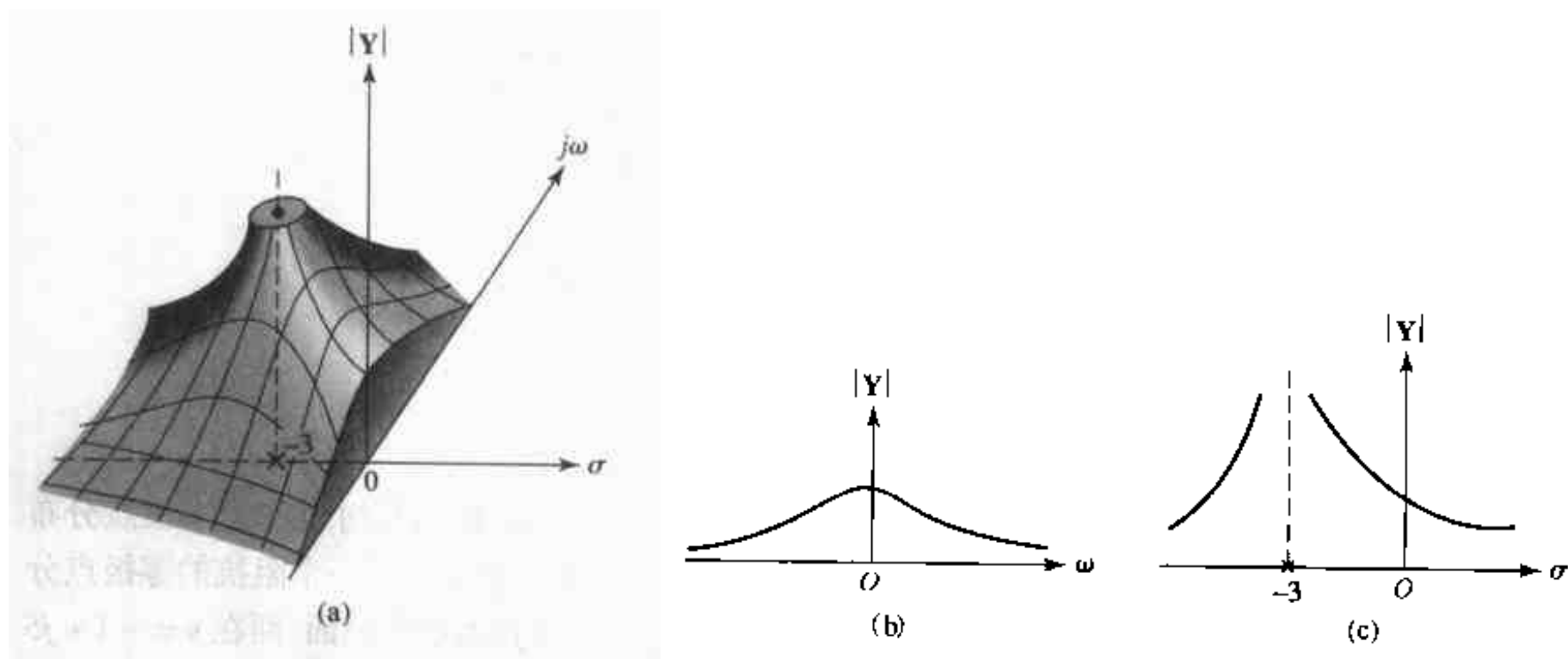


图 15.25 (a) 粘土模型的剖面图, 其上表面表示 1 H 电感和 $3\ \Omega$ 电阻串联组成的导纳 $|Y(s)|$; (b) $|Y(s)|$ 随 ω 变化的曲线; (c) $|Y(s)|$ 随 σ 变化的曲线

模型构造出来以后, 不难想像, 如果用一个包含 $j\omega$ 轴且与 s 平面垂直的 s 平面来切割该模型, 那么就可以得到(当 $\sigma = 0$ 时) $|Y|$ 随着 ω 变化的曲线。图 15.25(a) 中显示的模型恰好是沿着这个 s 平面进行切割的, 因此可以看到 $|Y|$ 随着 ω 变化的曲线, 在图 15.25(b) 中重新把它绘出。同样地, 用包含 σ 轴的垂直 s 平面来切割则可以得到(当 $\omega = 0$ 时) $|Y|$ 随着 σ 变化的曲线, 如图 15.25(c) 所示。

练习

15.10 画出阻抗 $Z(s) = 2 + 5s$ 的幅度关于 σ 和 $j\omega$ 变化的曲线。

答案: 参看图 15.26

15.7.4 零极点分布图

对于相对简单的函数来说, 上面这种方法很有效, 但通常情况下, 需要一种更加实用的方法。重新将 s 平面想像为地面, 然后在它上面覆盖一张很大的弹性薄层。现在将注意力集中到响应函数的所有零点和极点上, 对于每个零点, 响应为零, 薄层的高度必然为零, 因此, 用“钉子”将它

固定在地面上；而在每个极点对应的 s 处，用一个很细的垂直棒把它支撑起来；对于无穷远处的零点和极点，则分别用半径很大的圆形夹环或者半径很大且很高的圆形篱笆来处理。如果所用的薄层尺寸为无穷大，没有重量并且有足够的弹性，而固定薄层的“钉子”非常细，支撑薄层的棒的半径为零，且高度为无穷大，那么薄层的高度将完全与响应的幅度成比例。

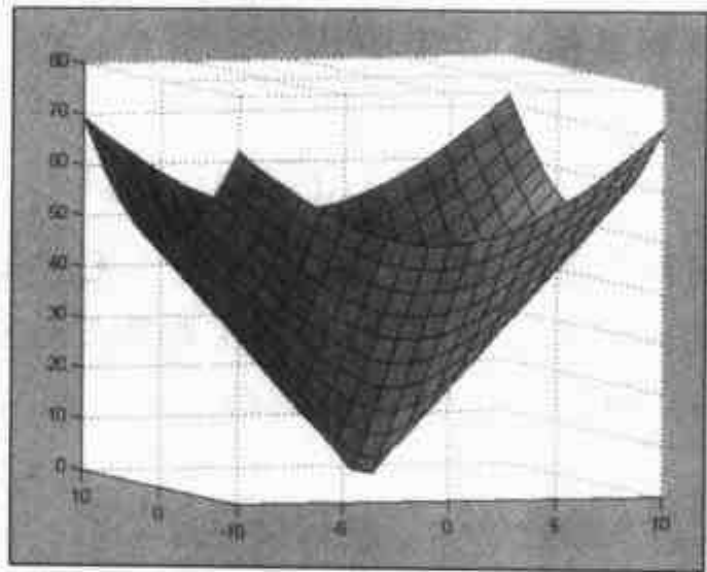


图 15.26 练习 15.10 的答案，它由以下的代码得到：

```
EDU>> sigma = linspace(-10,10,21);
EDU>> omega = linspace(-10,10,21);
EDU>> [X,Y] = meshgrid(sigma,omega);
EDU>> Z = abs(2 + 5 * X + j * 5 * Y);
EDU>> colormap(gray);
EDU>> s = [-5 3 8];
EDU>> surf(X,Y,Z,s);
EDU>> view(-20,5)
```

可以通过零极点的结构图来说明上面所描述的情形，零极点结构图有时也称为零极点分布图，它标出了频域量[比如阻抗 $Z(s)$]的所有临界频率，图 15.27(a)中给出了一个阻抗的零极点分布图的例子。如果使用弹性薄层模型，在 $s = -2 + j0$ 点用钉子将其固定在地面，而在 $s = -1 + j5$ 和 $s = -1 - j5$ 点用细棒将其支撑起来，将看到这样一个“地势”图，其特点是存在两个山峰和一个圆锥形的凹陷(或者说洼地)。图 15.27(b)中画出了其左半 s 平面(LHP)的上半部分。

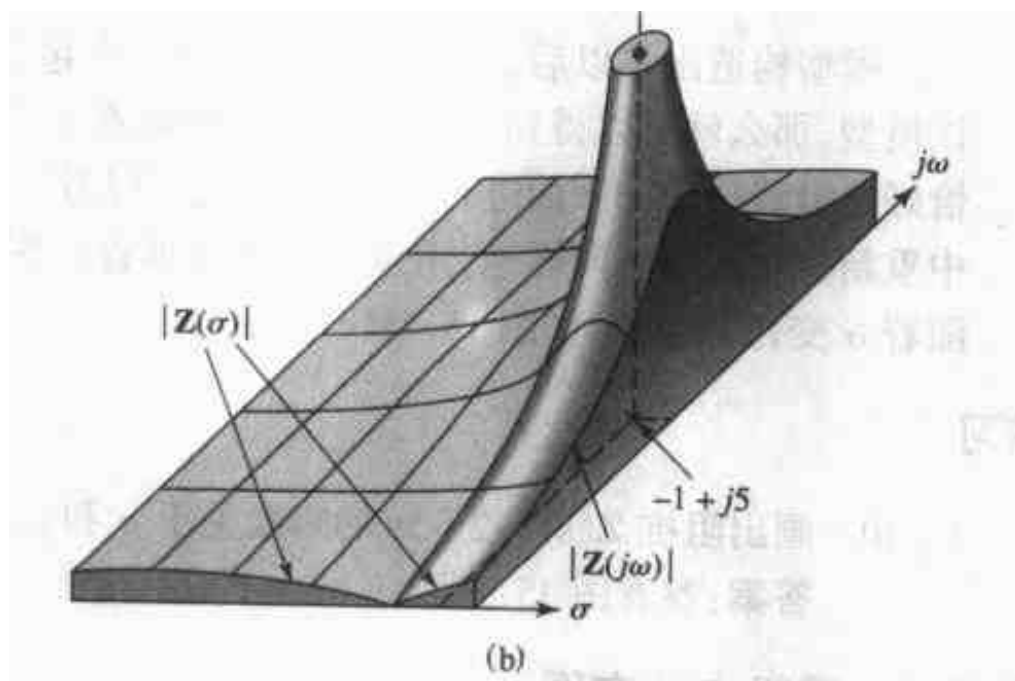
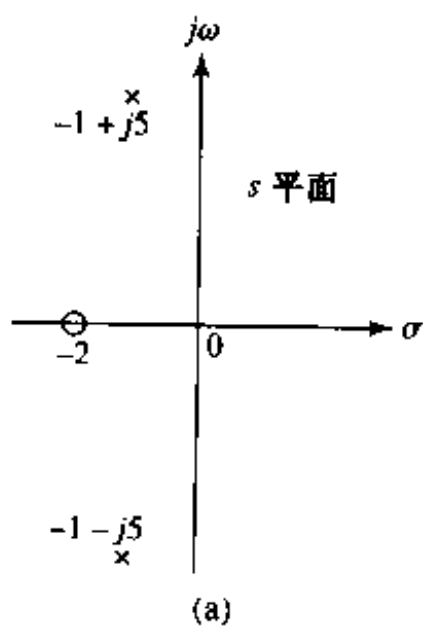


图 15.27 (a)某阻抗 $Z(s)$ 的零极点分布图；(b) $Z(s)$ 的弹性薄层模型的一部分

现在来求这个零极点分布图所对应的 $Z(s)$ 的表达式。这个零点说明分子中包含因子 $(s+2)$, 而两个极点说明分母中包含因子 $(s+1-j5)$ 和 $(s+1+j5)$ 。除了系数 k 外, 得到 $Z(s)$ 的形式为:

$$Z(s) = k \frac{s+2}{(s+1-j5)(s+1+j5)}$$

或

$$Z(s) = k \frac{s+2}{s^2+2s+26} \quad (15.16)$$

为了得到 k , 假定 $Z(s)$ 的一个附加条件为 $Z(0) = 1$ 。将其代入式(15.16)中, 可以求出 k 为 13, 因此:

$$Z(s) = 13 \frac{s+2}{s^2+2s+26} \quad (15.17)$$

从式(15.17)可以精确地得到 $|Z(\sigma)|$ 随着 σ 变化的曲线和 $|Z(j\omega)|$ 随着 ω 变化的曲线, 不过, 从该函数的零极点分布图和弹性薄层模型就可以清楚地知道它大致的样子, 图 15.27(b)中模型的边界上画出了这两条曲线的一部分。

练习

- 15.11 将并联连接的 0.25 mH 的电感和 5Ω 的电阻与并联连接的 $40 \mu\text{F}$ 的电容和 5Ω 串联起来。(a)求串联后的输入阻抗 $Z_m(s)$; (b)求 $Z_m(s)$ 的所有零点; (c)求 $Z_m(s)$ 的所有极点; (d)画出零极点分布图。

答案: $5(s^2 + 10\,000s + 10^8)/(s^2 + 25\,000s + 10^8) \Omega$; $-5 \pm j8.66 \text{ krad/s}$; -5 ; -20 krad/s

15.7.5 幅度和相位与频率的关系

迄今为止, 已经使用 s 平面和弹性薄层模型来得到了 s 域函数的幅度随频率变化的定性关系。事实上, 得到幅度和相位随频率变化的定量关系也是可能的, 而且这可以说是一种新的有用的工具。

现在来考虑极坐标下的复频率表示, 它可以用一个从 s 平面的原点出发, 指向这个频率的箭头来表示, 其中箭头的长度等于复频率的幅度, 箭头与 σ 的正方向的夹角则等于这个复频率的相位。图 15.28(a)画出了频率为 $s_1 = -3 + j4 = 5 \angle 126.9^\circ$ 时的图形。

用箭头或者矢量来表示复平面上两个 s 值的差也是必要的。选取一个 s 值 $s = j7$, 它与正弦曲线相对应, 在复平面上也用一个矢量来表示它, 如图 15.28 所示。 s 与 s_1 的差 $s - s_1$ 可以用一个从 s_1 指向 s 的矢量来表示, 如图 15.28(c)所示。注意到 $s_1 + (s - s_1) = s$, 在数值上, $s - s_1 = j7 - (-3 + j4) = 3 + j3 = 4.24 \angle 45^\circ$, 这个结果和图上画出的差是一致的。

现在来看怎样从差 $(s - s_1)$ 的图形表示求得频域响应, 考虑下面的导纳:

$$Y(s) = s + 2$$

可以将这个表达式理解为感兴趣的某个频率点与零点的差, 其中零点在 $s_2 = -2 + j0$ 处, 而因