

答案: 16.6: 8 H, 640 k $\Omega$ ; 16.7: 5 H, 250  $\Omega$

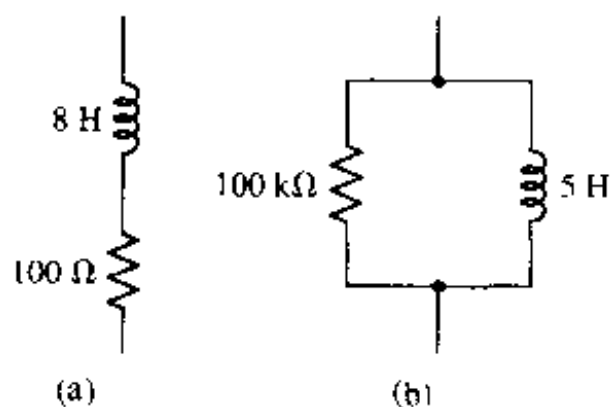


图 16.11 (a)求该串联网络(在  $\omega = 1\,000\text{ rad/s}$  处)的并联等效网络;  
(b)求该并联网络(在  $\omega = 1\,000\text{ rad/s}$  处)的串联等效网络

下面来看另一个例子,这个例子需要将一个更复杂的谐振电路转化为串联或并联  $RLC$  等效电路,在使用电子仪器时会碰到这样的问题。如图 16.12(a)所示的简单  $RLC$  网络,激励源为正弦电压源,其中电压源的频率为网络的谐振频率,电压的有效值(rms)为 0.5 V,希望用内阻为 100 000  $\Omega$  的伏特表(VM)来测量电容两端的电压的有效值。也就是说,这个伏特表等效为一个理想伏特表与一个 100 k $\Omega$  电阻的并联。

“理想”电表是这样一种设备,在它测量感兴趣的某个量时,不会对被测电路产生影响。尽管这是不可能的,但是现代仪器设备可以做到与理想情况非常接近。

在接上伏特表之前,可以计算出网络的谐振频率为  $10^5\text{ rad/s}$ ,  $Q_0 = 50$ , 电流为 25 mA, 电容电压的有效值为 25 V。正如在 16.4 节结尾处指出的那样,电容电压为激励电压的  $Q_0$  倍。因此,如果电压表是理想的,那么将它接到电容两端,测得的结果将为 25 V。

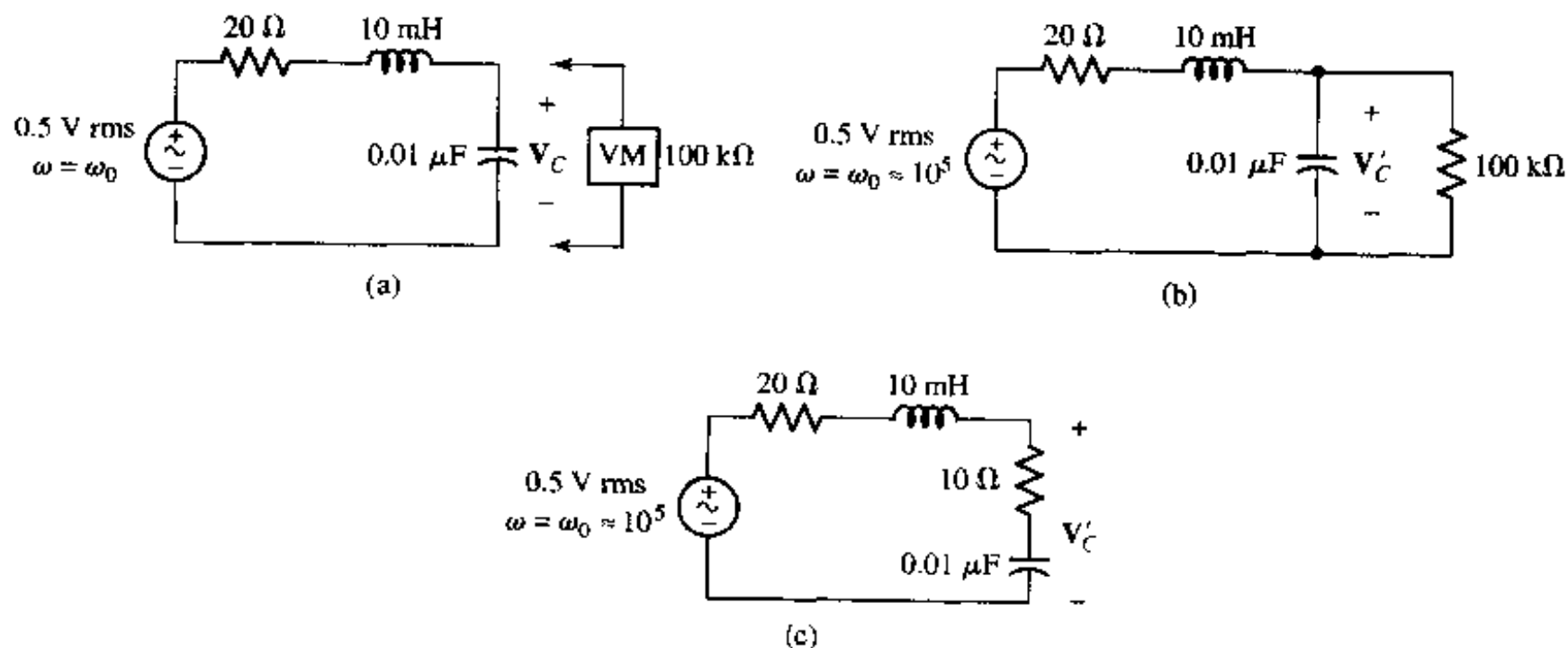


图 16.12 (a)一个串联谐振电路,用非理想的伏特表测量电容两端的电压;(b)考虑了伏特表对电路的影响,其读数为  $V_C'$ ; (c)将(b)中的并联  $RC$  网络用在频率为  $10^5\text{ rad/s}$  下与之等效的串联  $RC$  网络替换后得到的串联谐振电路

但是,当接上实际的电压表后,将得到图 16.12(b)所示的电路。为了得到串联  $RLC$  电路,需要将并联  $RC$  网络转换为串联  $RC$  网络。假定这个  $RC$  网络的  $Q$  值足够高,使得等效  $RC$  网络中电容的取值和原来一样,做这么一个假定的目的是为了对最后得到的  $RLC$  电路在谐振时

的参数进行近似。因此,如果串联  $RLC$  电路也含有  $0.01 \mu\text{F}$  的电容,那么谐振频率同样也是  $10^5 \text{ rad/s}$ 。估计谐振频率是为了计算并联  $RC$  网络的  $Q$  值,它等于:

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5 \times (10^5) \times (10^{-8}) = 100$$

它大于 5,因此,这就验证了前面的循环假定,然后可以得到等效串联  $RC$  网络的电容值为  $C_s = 0.01 \mu\text{F}$ ,电阻值为:

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10 \Omega$$

这样就得到了图 16.12(c)所示的等效电路,其  $Q$  值只有 33.3,因此图中电容两端的电压值为  $16 \frac{2}{3} \text{ V}$ 。但要求的是串联  $RC$  电路两端的电压  $|V_c|$ :

$$|V_c| = \frac{0.5}{30} \times |10 - j1000| = 16.67 \text{ V}$$

电容两端的电压和  $|V_c|$  几乎相等,因为  $10 \Omega$  电阻两端的电压非常小。

最后,得到这样的结论,即看起来非常好的伏特表也会严重地影响高  $Q$  谐振电路的响应;同理,将非理想的安培表接入电路中也会产生类似影响。

最后以一个故事来结束本节。以前,有一个叫 Pat 的学生,有一个叫 Dr. Abel 的教授。某天下午,在实验室里,Dr. Abel 给了 Pat 三个电路元件:一个电阻、一个电感和一个电容,它们的标称值分别为  $20 \Omega$ ,  $20 \text{ mH}$  和  $1 \mu\text{F}$ 。Pat 要做的事情是将一个频率可调的电压源接到这三个元件的串联电路中,以测量谐振频率、谐振时的  $Q$  值以及半功率带宽。还要求他在测量之前,首先估算一下实验结果。

Pat 过于急切地分析问题,打乱了通常情况下清晰的思维过程,他画出图 16.13(a)所示的等效电路,然后计算:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$B = \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz}$$

接着,Pat 按照 Dr. Abel 的要求进行测量。在将测量结果与估算值进行比较后,他发现,测量结果与估算值相差很远。测量的结果如下:

$$f_0 = 1000 \text{ Hz} \quad Q_0 = 0.625 \quad B = 1600 \text{ Hz}$$

Pat 知道,这么大的差异不能认为是“在工程误差范围之内”或者“由于电表的误差”,他沮丧地将这些结果交给教授。

Dr. Abel 知道以前学生们做判断时所犯的许多错误中,有些甚至可能是人为的,于是 Dr. Abel 和蔼地微笑着叫 Pat 用  $Q$  表(或者称为阻抗桥,许多装备良好的实验室都有  $Q$  表)去测量一下这些实际元件在谐振频率附近(比如  $1000 \text{ Hz}$ )的值。

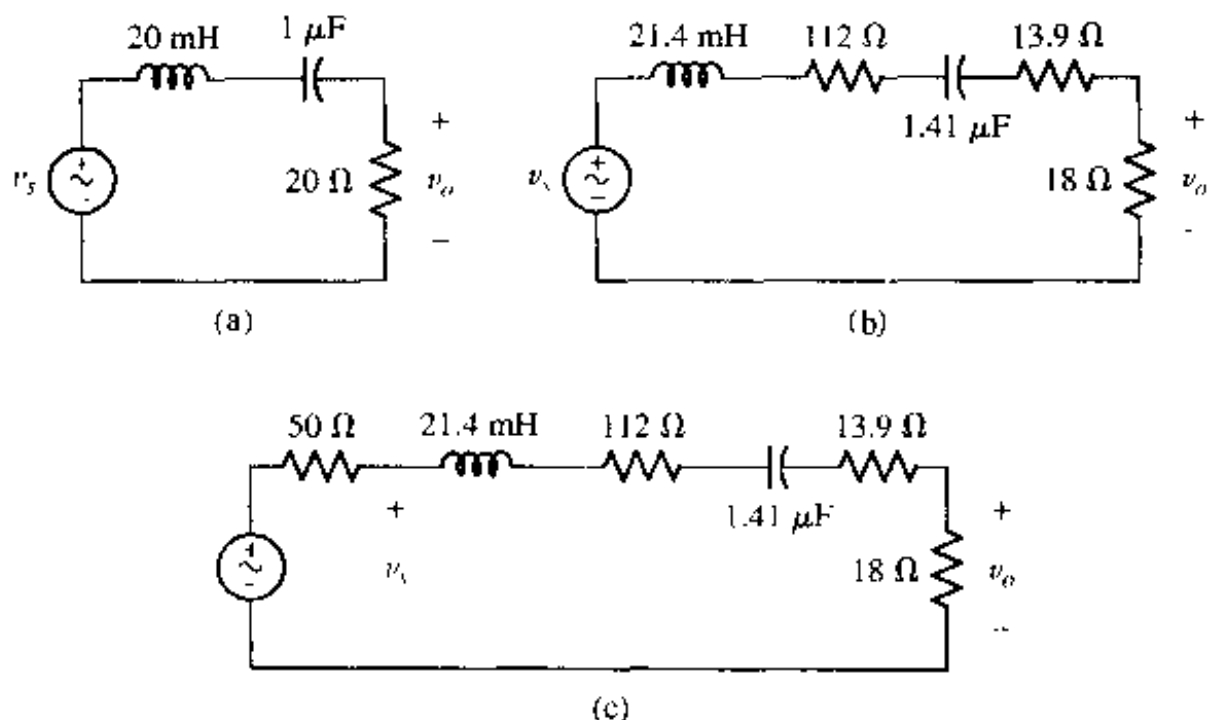


图 16.13 (a) 一个 20 mH 电感, 一个 1  $\mu$ F 电容和一个 20  $\Omega$  电阻与电压源串联的第一个模型; (b) 改进的模型, 其中使用了更精确的元件值, 并且考虑了电感和电容的损耗; (c) 最终的模型, 考虑了电压源的输出阻抗

Pat 这么去做了, 他发现电阻的测量值为 18  $\Omega$ , 电感的测量值为 21.4 mH,  $Q$  值为 1.2, 电容的测量值为 1.41  $\mu$ F, 损耗系数 ( $Q$  的倒数) 为 0.123。

因此, Pat 觉得实际电感的较好模型应该是 21.4 mH 的电感与  $\omega L/Q = 112 \Omega$  的电阻串联, 而实际电容的较好的模型应该是 1.41  $\mu$ F 的电容和  $1/\omega CQ = 13.9 \Omega$  的电阻串联。利用这些数据, 他得到改善后的电路模型如图 16.13(b) 所示, 然后他计算出下列新的估计值:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$B = 916 / 0.856 = 1070 \text{ Hz}$$

这些值与测量值非常接近, 所以 Pat 感到非常高兴。但是, Dr. Abel 是一个非常细心的人, 他考虑了一下  $Q_0$  和带宽的估计值与测量值的误差, 然后问 Pat: “你考虑电压源的输出阻抗了吗?” “没有。” Pat 说着, 又跑回实验桌旁。

结果, Pat 测出电压源的输出阻抗为 50  $\Omega$ , 然后他将这个值加到电路图中, 如图 16.13(c) 所示。用这个新的等效电阻值 193.9  $\Omega$ , 求出改善的  $Q_0$  和  $B$  值为:

$$Q_0 = 0.635 \quad B = 1442 \text{ Hz}$$

这时, 所有理论值与测量值的误差均小于 10%, Pat 又恢复了以往的热情和自信。Dr. Abel 点了点头表示赞许, 并总结说:

使用实际设备时, 观测你所用的模型, 在计算之前仔细思考, 注意  $Z$  和  $Q$ !

## 练习

- 16.8 10  $\Omega$  电阻与 10 nF 电容的串联连接与 20  $\Omega$  电阻与 10 mH 的串联连接相并联。(a) 求并联网络谐振频率的近似值; (b) 求 RC 分支的  $Q$  值; (c) 求 RL 分支的  $Q$  值; (d)

求该网络的三元件等效网络。

答案:  $10^5 \text{ rad/s}$ ; 100; 50;  $10 \text{ nF} \parallel 10 \text{ mH}$  33.3 k $\Omega$

## 16.6 缩放

在前面所举的例子和所求解的问题中,无源电路元件的参数值范围大约是几欧姆、几亨利和几法拉,适用的频率约为几弧度/秒。使用这些特殊的参数值并不是因为在实际电路中常使用这些值,而是因为计算过程中不会涉及到10的各次幂的运算,计算起来比较方便。本节将讨论缩放,对于由实际参数值的元件组成的网络,通过对元件的参数值进行缩放,可以给计算带来很大的方便。这里将讨论幅度缩放(magnitude scaling)和频率缩放(frequency scaling)。

下面以图16.14(a)所示的并联谐振电路为例来进行说明。用这些非实际的元件参数得到的响应曲线如图16.14(b)所示,但在实际中不太可能出现这种情况。图中,最大阻抗为2.5  $\Omega$ ,谐振频率为1 rad/s,  $Q_0$  为5,带宽为0.2 rad/s。这些值更像是某些机械系统的电模拟特性参数,而不像是任何基本电气设备的参数。这样的电路虽然会给计算带来方便,但却不代表实际电路。

假定对网络进行缩放,使得它的输入阻抗最大值为5 000  $\Omega$ ,谐振频率为  $5 \times 10^6 \text{ rad/s}$  或 796 kHz。如果将图16.14(b)中的纵坐标上的每个数乘以2 000,将横坐标上的每个数乘以  $5 \times 10^6$ ,这样就得到缩放后电路的响应曲线,而它的形状保持不变。下面分两个问题对此进行论述:(1)幅度缩放,缩放因子为2 000;(2)频率缩放,缩放因子为  $5 \times 10^6$ 。

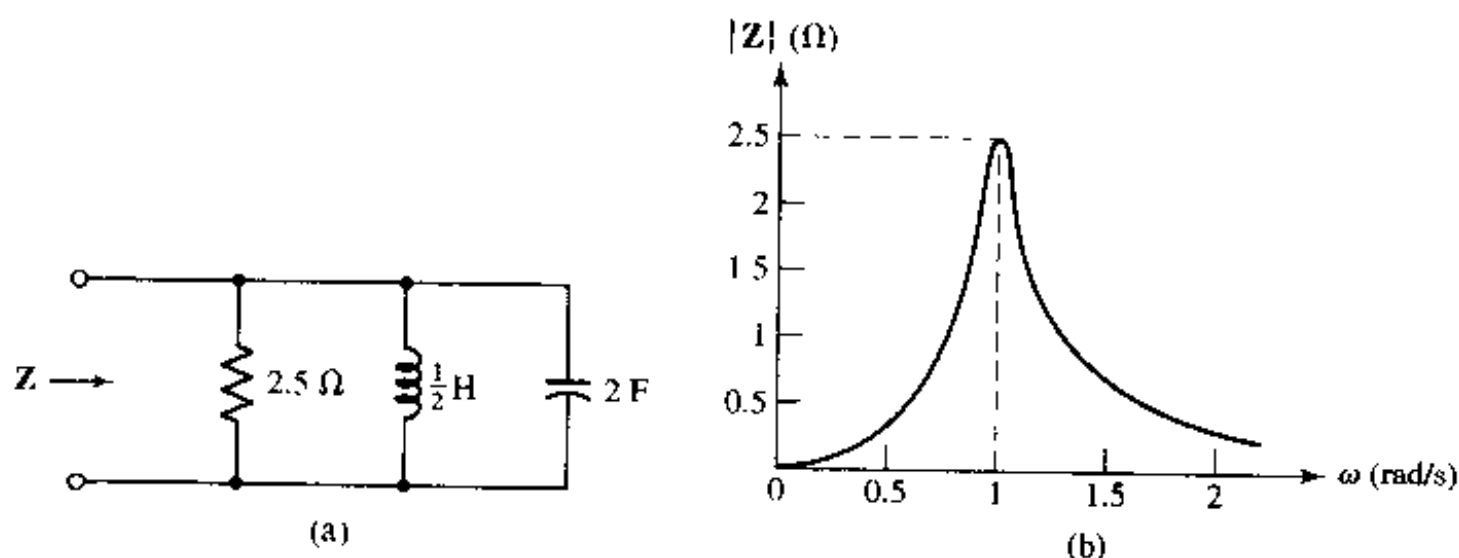


图 16.14 (a)用来解释幅度和频率缩放的并联谐振电路;(b)输入阻抗的幅度随频率变化的函数曲线

幅度缩放定义为这样一个过程:保持频率不变,将双端网络的阻抗乘以因子  $K_m$ 。其中因子  $K_m$  为正实数,它可以大于1,也可以小于1。“在幅度上,网络的缩放因子为2”指的是在任何频率上,新的网络阻抗为原来的网络阻抗的两倍。下面来看应该怎样对各种无源元件进行缩放。为了使网络的输入阻抗增大为原来的  $K_m$  倍,只要将网络中的每个无源元件的阻抗乘以  $K_m$  即可。因此,将电阻  $R$  替换为  $K_m R$ 。将电感替换为某个值,使得在任何频率上,其阻抗为原来的  $K_m$  倍;为了使阻抗  $sL$  的值增大为原来的  $K_m$  倍,而  $s$  保持不变,则必须将电感  $L$  替换为  $K_m L$ 。类似地,必须将电容  $C$  替换为  $C/K_m$ 。综上所述,做这样的替换后将得到一个阻抗幅度为原来  $K_m$  倍的网络:

$$\left. \begin{aligned} R &\rightarrow K_m R \\ L &\rightarrow K_m L \\ C &\rightarrow \frac{C}{K_m} \end{aligned} \right\} \text{幅度缩放}$$

将图 16.14(a) 所示网络中的每个元件在幅度上均以因子 2 000 进行缩放以后, 可得到图 16.15(a) 所示的网络。图 16.15(b) 为其响应曲线, 与原来画的响应曲线相比, 除了在纵坐标标度上有所改变外, 没有任何其他改变。

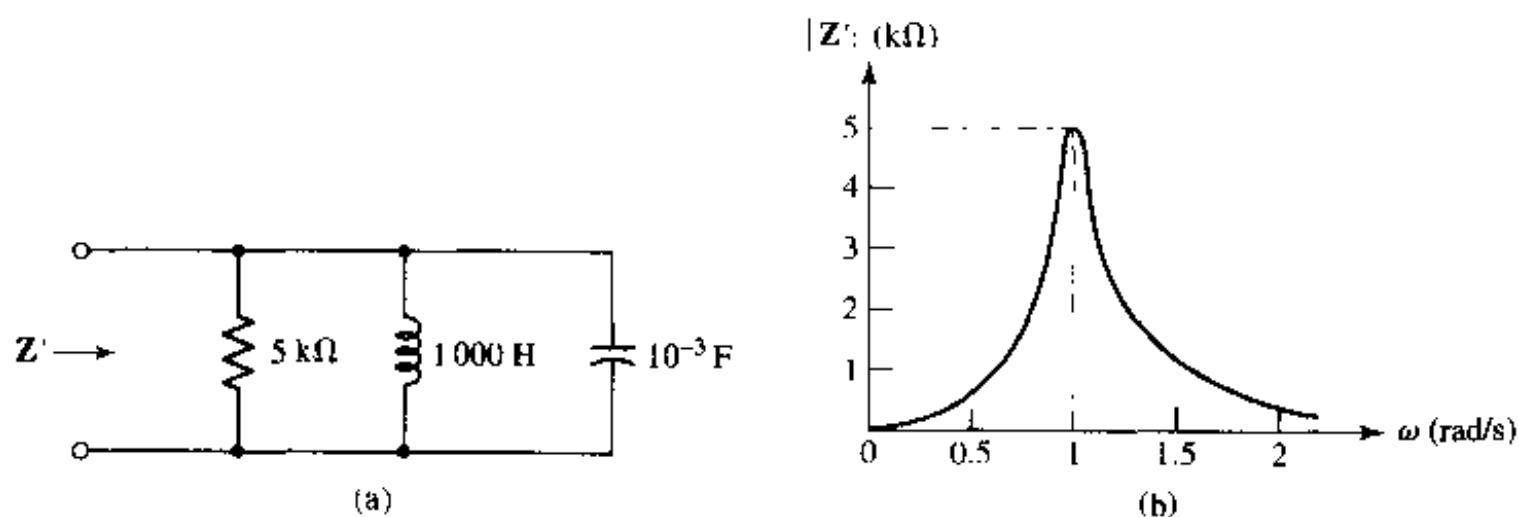


图 16.15 (a) 对图 16.4(a) 所示网络进行幅度缩放后的所得的网络, 缩放因子  $K_m = 2\,000$ ; (b) 相应的响应曲线

下面对这个新的网络进行频率缩放。将频率缩放定义为这样一个过程: 保持阻抗不变, 将阻抗对应的频率乘以因子  $K_f$ 。同样, “在频率上, 网络的缩放因子为 2” 指的是频率为原来频率的两倍时, 获得与原来相同的阻抗。对每个无源元件在频率上缩放后, 就得到了频率缩放。显然, 频率缩放对电阻没有影响。电感的阻抗为  $sL$ , 如果要在频率为原来的  $K_f$  倍时得到相同的阻抗, 则必须将电感  $L$  替换为  $L/K_f$ 。类似地, 必须将电容替换为  $C/K_f$ 。因此, 如果说将一个网络进行频率缩放, 缩放因子为  $K_f$ , 那么必须对每个无源元件进行如下变换:

$$\left. \begin{aligned} R &\rightarrow R \\ L &\rightarrow \frac{L}{K_f} \\ C &\rightarrow \frac{C}{K_f} \end{aligned} \right\} \text{频率缩放}$$

对于图 16.15(a) 所示的幅度缩放以后的网络, 将每个元件均以因子  $5 \times 10^6$  进行频率缩放后, 得到图 16.16(a) 所示的网络, 图 16.16(b) 为相应的响应曲线。

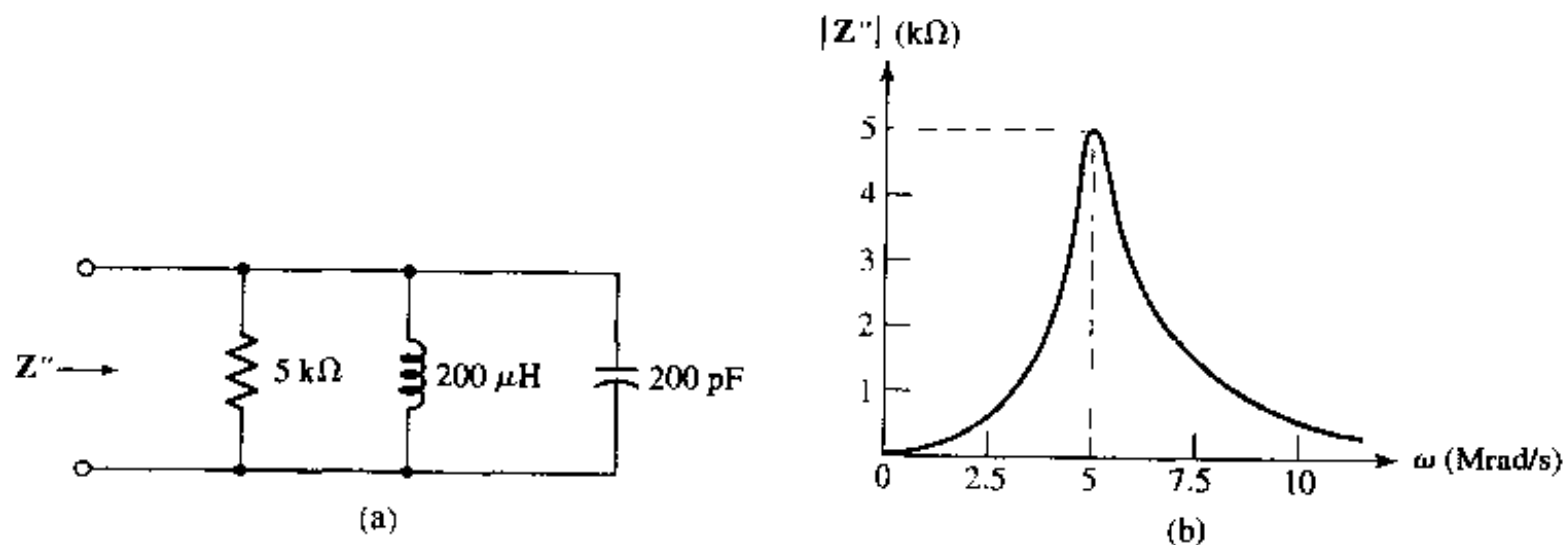


图 16.16 (a) 对图 16.5(a) 所示网络进行频率缩放后的所得的网络, 缩放因子  $K_f = 5 \times 10^6$ ; (b) 相应的响应曲线

最后这个网络中的元件的参数很容易用实际物理元件来实现,因此可以搭建出这样一个网络并对它进行测试。因此,如果说图 16.14(a)所示的原始网络是某个机械谐振系统的类比,那么可以用幅度缩放和频率缩放的方法,得到一个可以在实验室中搭建起来的网络。当直接在机械系统测试某些参数需要花费很大的代价或者不方便进行时,就可以在缩放后的电气系统中进行,然后将得到的结果“反缩放”为机械系统的单位。

以  $s$  为变量的阻抗函数也可以进行幅度缩放和频率缩放,而且这时不必知道双端网络由哪些元件组成。根据定义,对  $Z(s)$  进行幅度缩放时,只需将它乘以  $K_m$  即可。图 16.14(a)所示的并联谐振电路的阻抗为:

$$Z(s) = \frac{s}{2s^2 + 0.4s + 2}$$

或

$$Z(s) = \frac{0.5s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

对该网络进行幅度缩放后,阻抗为:

$$Z'(s) = K_m Z(s)$$

如果仍然令  $K_m = 2000$ ,则有:

$$Z'(s) = 1000 \times \frac{s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

如果对  $Z'(s)$  进行频率缩放,缩放因子为  $5 \times 10^6$ ,则  $Z'(s)$  在任何频率  $f$  处的阻抗与  $Z''(s)$  在频率  $K_f$  处的阻抗相等,这一关系可以用下式表示:

$$Z''(s) = Z' \left( \frac{s}{K_f} \right)$$

从上式知道,可以将  $Z'(s)$  中的每个  $s$  替换为  $s/K_f$  而得到  $Z''(s)$ 。因此,图 16.16(a)所示网络的阻抗可以表示为:

$$Z''(s) = 1000 \times \frac{s/(5 \times 10^6)}{[s/(5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][s/(5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

或

$$Z''(s) = 1000 \times \frac{(5 \times 10^6)s}{[s + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6][s + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6]}$$

虽然在通常情况下,缩放主要用于无源元件,但是也可以对受控源进行幅度缩放和频率缩放。假定电源的输出为  $k_v v_x$  或  $k_i i_x$ ,对于受控电流源,  $k_i$  具有导纳的量纲,而对于受控电压源,  $k_v$  没有量纲;对于受控电压源,  $k_v$  具有电阻的量纲,而对于受控电流源,  $k_i$  没有量纲。如果对含有受控电源的网络进行缩放,缩放因子为  $K_m$ ,则只需要将  $k_v$  或  $k_i$  看做是与其量纲相对应的元件。也就是说,如果  $k_v$  (或  $k_i$ ) 没有量纲,则它保持不变;如果它有导纳的量纲,则将它除以  $K_m$ ;如果它有阻抗的量纲,则将它乘以  $K_m$ 。频率缩放对受控源没有影响。

**例题 16.6** 对图 16.17 所示的网络进行缩放,缩放因子为  $K_m = 20$ ,  $K_f = 50$ ,然后求出缩放后网络的  $Z_m(s)$



对于电容,将  $0.05 \text{ F}$  除以幅度缩放因子  $K_m = 20$ ,就得到其幅度缩放;除以频率缩放因子  $K_f = 50$ ,就得到频率缩放。同时进行两种操作,可得:

$$C_{\text{scaled}} = \frac{0.05}{(20) \times (50)} = 50 \mu\text{F}$$

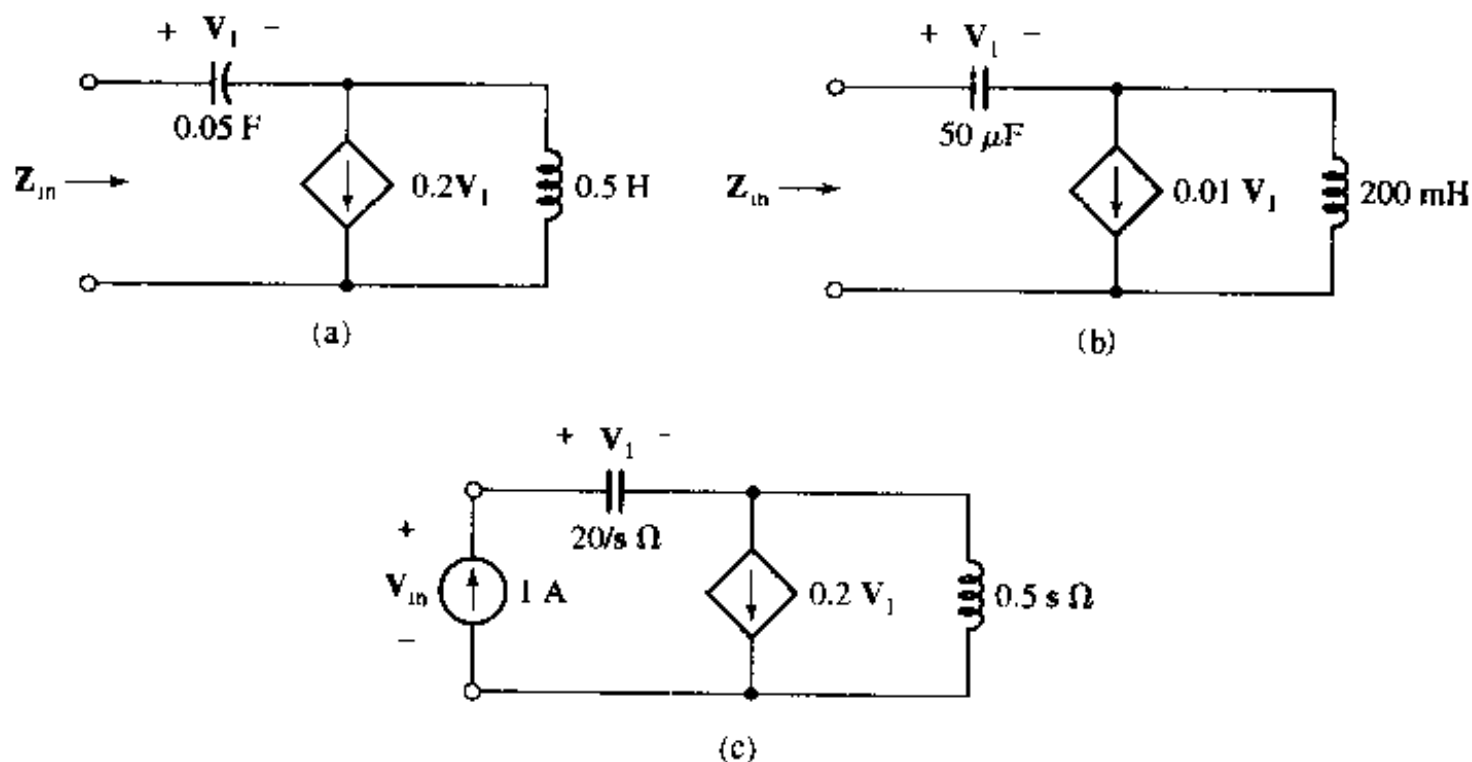


图 16.17 (a)对该网络进行幅度缩放和频率缩放,其中幅度缩放因子为 20,频率缩放因子为 50;  
(b)缩放后的网络;(c)为了求出缩放前电路(a)的输入阻抗,在输入端放置  $1 \text{ A}$  的测试电流源

对于电感,则有:

$$L_{\text{scaled}} = \frac{(20) \times 0.5}{50} = 200 \text{ mH}$$

对于受控源的缩放,只需要考虑幅度缩放,因为频率缩放对其没有影响。因为这是一个压控电流源,因此系数  $0.2$  的单位为  $\text{A/V}$ ,或  $\text{S}$ ,这是导纳的单位,将它除以  $K_m$ ,得到新的受控源的值为  $0.01 V_1$ 。最后得到缩放后的网络如图 16.17(b)所示。

为了求出新网络的阻抗,需要在输入端接上一个  $1 \text{ A}$  的测试电流源。可以用这两个电路中的任何一个来计算新网络的阻抗。这里,我们首先来求图 16.17(a)所示的缩放前网络的阻抗,然后再对求得的结果进行缩放。

如图 16.17(c),有:

$$V_{in} = V_1 + 0.5s(1 - 0.2V_1)$$

又

$$V_1 = \frac{20}{s} \times (1)$$

进行变量替换,然后整理得:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1} = \frac{s^2 - 4s + 40}{2s}$$

为了将它缩放为相应于图 16.17(b)所示电路的值,将它乘以  $K_m = 20$ ,然后将  $s$  替换为  $s/K_f = s/50$ ,得:

$$Z_{in\text{scdnet}} = \frac{0.2s^2 - 40s + 200\,000}{s} \Omega$$

## 练习

- 16.9 某并联谐振电路的参数为  $C = 0.01 \text{ F}$ ,  $B = 2.5 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$ 。求下列各种情况下,  $R$  和  $L$  的值: (a) 对网络进行幅度缩放, 缩放因子为 800; (b) 对网络进行频率缩放, 缩放因子为  $10^4$ ; (c) 对网络进行幅度缩放和频率缩放, 其中幅度缩放因子为 800, 频率缩放因子为  $10^4$ 。

答案:  $32 \text{ k}\Omega, 200 \text{ H}$ ;  $40 \Omega, 25 \mu\text{H}$ ;  $32 \text{ k}\Omega, 20 \text{ mH}$

## 16.7 波特(Bode)图

本节学习一种能快速得到传输函数幅度和相角随  $\omega$  变化的近似曲线的方法。当然, 可以用可编程计算器或者计算机来计算曲线值, 然后将这些值画出来以得到精确的曲线; 也可以直接在计算机上画出。不过, 在这里, 目的是得到一个响应曲线, 根据它来分析响应特性要比根据零极点图来分析要好, 但又不需要借助于任何专用的计算工具。

### 16.7.1 分贝(dB)坐标

这里要构造的响应曲线称为渐近线图(asymptotic plot), 或者称为波特图(Bode diagram), 这是由贝尔实验室的一位电气工程师和数学家 Hendrik W. Bode 发明的。幅度曲线和相位曲线的横坐标均使用对数频率坐标, 而且幅度本身也用对数单位表示, 对数单位为分贝(dB)。将  $|H(j\omega)|$  以 dB 为单位表示为:

$$H_{\text{dB}} = 20 \log |H(j\omega)|$$

采用分贝这个名字是为了纪念 Alexander Graham Bell。上式中的对数为常用对数, 底数为 10 (对于功率传输函数, 上式中的因子将是 10 而不是 20, 不过这里不会用到它)。其逆运算为:

$$|H(j\omega)| = 10^{(H_{\text{dB}}/20)}$$

在详细讨论画波特图的方法之前, 先了解一下分贝这个单位是有益的。下面来看一些重要的值, 同时回忆一下对数运算的特点。因为  $\log 1 = 0$ ,  $\log 2 = 0.30103$ ,  $\log 10 = 1$ , 因此可以得到下列关系:

$$|H(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} = 0$$

$$|H(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} \approx 6 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} \approx 20 \text{ dB}$$

$|H(j\omega)|$  增大 10 倍相应于  $H_{\text{dB}}$  增加 20 dB。此外,  $\log 10^n = n$ , 因此  $10^n \Leftrightarrow 20n$ , 所以 1 000 对应于 60 dB, 而 0.01 对应于 -40 dB。根据上面给出的值, 有  $20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20 \log 10 - 20 \log 2$



$= 20 - 6 = 14 \text{ dB}$ , 因此  $5 \Leftrightarrow 14 \text{ dB}$ 。而  $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ , 因此  $\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \text{ dB}$  且  $1/\sqrt{2} \Leftrightarrow -3 \text{ dB}$ <sup>①</sup>。

通常将传递函数表示为  $s$  的函数, 在求幅度和相角时, 需要做替换  $s = j\omega$ 。如果需要, 可以将幅度以  $\text{dB}$  为单位来表示。

### 练习

- 16.10 当  $\mathbf{H}(s)$  等于下列情况下, 计算  $H_{\text{dB}}$  在  $\omega = 146 \text{ rad/s}$  时的值: (a)  $20/(s+100)$ ; (b)  $20(s+100)$ ; (c)  $20s$ 。如果  $H_{\text{dB}}$  等于下列值, 计算  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  的值: (d)  $29.2 \text{ dB}$ ; (e)  $-15.6 \text{ dB}$ ; (f)  $-0.318 \text{ dB}$ 。

答案:  $-18.94 \text{ dB}$ ;  $71.0 \text{ dB}$ ;  $69.3 \text{ dB}$ ;  $28.8$ ;  $0.1660$ ;  $0.964$

### 16.7.2 求渐近线

下一步, 对  $\mathbf{H}(s)$  进行因式分解, 以得到其极点和零点。首先来看在  $s = -a$  处的极点, 将其写成标准形式:

$$\mathbf{H}(s) = 1 + \frac{s}{a} \quad (16.26)$$

该函数的波特图由两条渐近线组成, 它们分别是当  $\omega$  很大和很小时趋于  $H_{\text{dB}}$  的直线。首先求得:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

因此:

$$H_{\text{dB}} = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

当  $\omega \ll a$  时:

$$H_{\text{dB}} \approx 20 \log 1 = 0, \quad (\omega \ll a)$$

这条简单的渐近线如图 16.18 所示。当  $\omega < a$  时为实线, 当  $\omega > a$  时为虚线。

当  $\omega \gg a$  时:

$$H_{\text{dB}} \approx 20 \log \frac{\omega}{a}, \quad (\omega \gg a)$$

$\omega = a$  时,  $H_{\text{dB}} = 0$ ;  $\omega = 10a$  时,  $H_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$ ;  $\omega = 100a$  时,  $H_{\text{dB}} = 40 \text{ dB}$ 。因此频率每增大为原来的 10 倍,  $H_{\text{dB}}$  增加  $20 \text{ dB}$ , 渐近线的斜率为  $20 \text{ dB/十倍频程}$ 。因为当  $\omega$  增大为原来的两倍时,  $H_{\text{dB}}$  增加  $6 \text{ dB}$ , 因此也可以将斜率表示为  $6 \text{ dB/倍频程}$ 。图 16.18 中也画出了高频时的渐近线, 当  $\omega > a$  时为实线, 而  $\omega < a$  时为虚线。可以看到, 这两条渐近线相交于  $\omega = a$  处, 这是零点所在的频率。这个频率也称为转角频率 (corner)、转折频率 (break)、 $3 \text{ dB}$  频率或者半功率频率。

<sup>①</sup> 注意, 这里进行了近似, 即取  $20 \log 2 = 6 \text{ dB}$  而不是  $6.02 \text{ dB}$ 。习惯上, 将  $\sqrt{2}$  表示为  $3 \text{ dB}$ ; 因为以  $\text{dB}$  为单位必然使用对数坐标, 因此这么小的误差通常是无关紧要的。

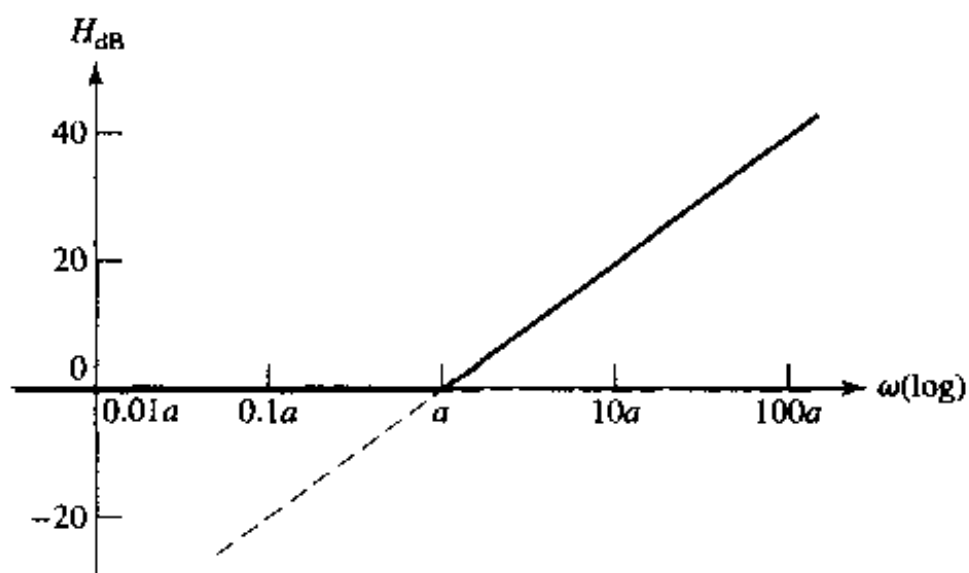


图 16.18  $H(s) = 1 + s/a$  的波特图由低频和高频渐近线组成,如图中实线所示,它们相交于横轴的转角频率点处。这个响应的波特图用两条渐近线表示,它们都是直线,很容易画出

十倍频程表示用因子 10 来定义的频率范围,比如从 3 Hz 到 30 Hz 或从 12.5 MHz 到 125 MHz 的频率范围。倍频程表示用因子 2 来定义的频率范围,比如从 7 GHz 到 14 GHz 的频率范围。

### 16.7.3 波特图的平滑

下面来看渐近响应曲线的误差有多大。在转角频率( $\omega = a$ )处:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3 \text{ dB}$$

注意,这里仍然将 $\sqrt{2}$ 对应于 3 dB。

而渐近线上相应的值为 0 dB。在  $\omega = 0.5a$  处,有:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \approx 1 \text{ dB}$$

因此,实际的响应曲线为渐近线上方的一条平滑曲线,在  $\omega = a$  处,它们相差 3 dB,而在  $\omega = 0.5a$  (以及  $\omega = 2a$ ) 处,它们相差 1 dB。当需要较为精确的结果时,可以根据这一点对转角进行平滑。

例 16.7 画出图 16.19 所示网络的输入阻抗的波特图

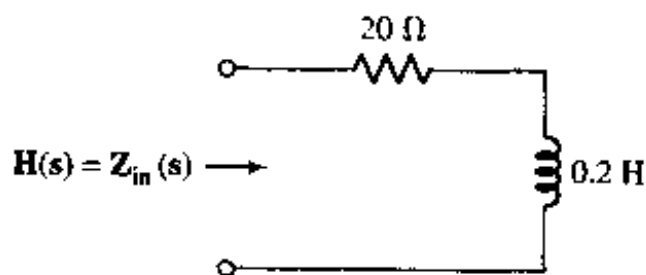


图 16.19 对于这个网络,如果将  $H(s)$  看做是  $Z_{in}(s)$ ,则  $H_{dB}$  的波特图如图 16.20(b) 所示

其输入阻抗为:

$$Z_{in}(s) = H(s) = 20 + 0.2s$$

写成标准形式,得:

$$H(s) = 20 \left( 1 + \frac{s}{100} \right)$$

$H(s)$ 由两个因式组成,其中一个因式在 $s = -100$ 处有一个零点,它使得在 $\omega = 100$  rad/s处有一个转折频率;另一个因式为常数,为 $20 \log 20 = 26$  dB。在图 16.20(a)中,它们都用虚线画出。因为要求的是 $|H(j\omega)|$ 的对数,因此将这两个因式叠加起来,可以得到如图 16.20(b)所示的曲线。图中没有对 $\omega = 100$  rad/s 处的转角进行 $+3$  dB 的修正,这作为一个小练习留给读者。

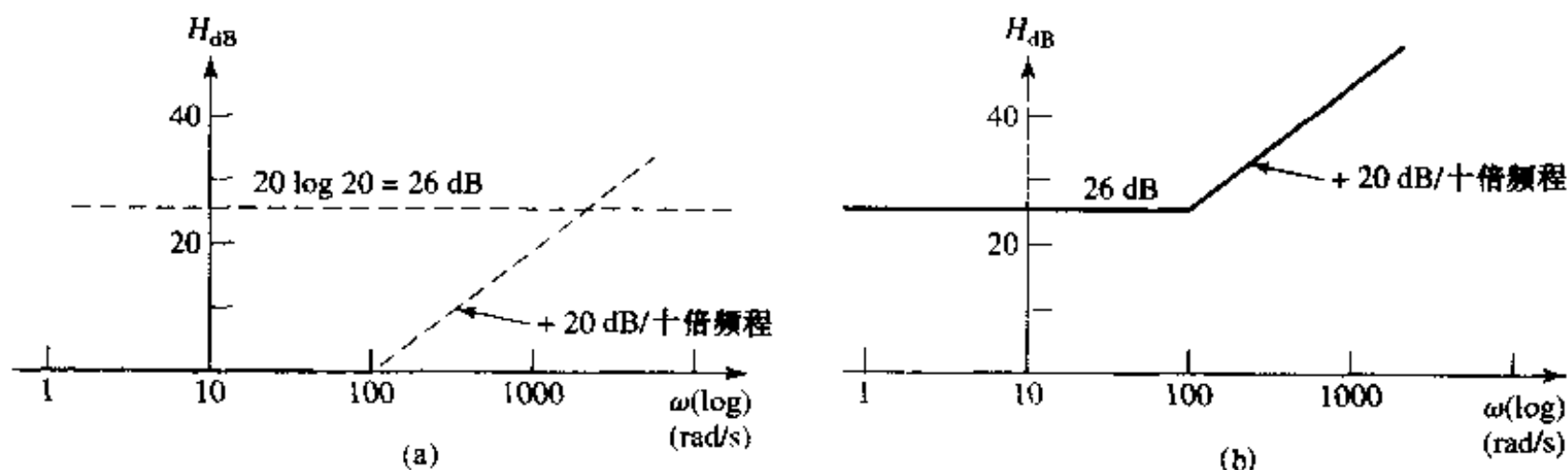


图 16.20 (a)分别画出了  $H(s) = 20(1 + s/100)$  的两个因式的波特图;  
(b)将图 16.20(a)中的两个波特图叠加后所得到的波特图

## 练习

16.11 画出  $H(s) = 50 + s$  的波特图。

答案:当  $\omega < 50$  rad/s 时为 34 dB;当  $\omega > 50$  rad/s 时,斜率为  $+20$  dB/十倍频程

## 16.7.4 相位响应

回到式(16.26)表示的单零点传输函数,下面来求它的相位响应:

$$\text{ang } H(j\omega) = \text{ang} \left( 1 + \frac{j\omega}{a} \right) = \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

这个表达式也可以用渐近线表示,不过这时需要三条线段。当  $\omega \ll a$  时,  $\text{ang } H(j\omega) \approx 0^\circ$ , 将其作为  $\omega < 0.1a$  时的渐近线为:

$$\text{ang } H(j\omega) = 0^\circ, \quad (\omega < 0.1a)$$

频率很高时,  $\omega \gg a$ ,  $\text{ang } H(j\omega) \approx 90^\circ$ , 将其作为  $\omega = 10a$  时的渐近线:

$$\text{ang } H(j\omega) = 90^\circ, \quad (\omega > 10a)$$

因为  $\omega = a$  时,相角为  $45^\circ$ ,现在我们画出这条直线渐近线,它在  $\omega = 0.1a$  处的值为  $0^\circ$ ,在  $\omega = a$  处穿过  $45^\circ$ ,在  $\omega = 10a$  处的值为  $90^\circ$ 。这条渐近线的斜率为  $45^\circ/\text{十倍频程}$ ,在图 16.21 中以实线表示,而实际的相位响应则用虚线表示。渐近线与实际响应曲线的最大误差为  $\pm 5.71^\circ$ ,对应的频率为  $\omega = 0.1a$  及  $\omega = 10a$ 。在  $\omega = 0.394a$  和  $2.54a$  处,误差为  $\mp 5.29^\circ$ ;在  $\omega = 0.159a$ ,  $a$  和  $6.31a$  处误差为  $0$ 。虽然可以画出平滑的相位响应图(与图 16.21 中的虚线类似),但通常用直线渐近线来近似表示。

这里有必要暂停一下,考虑相位曲线告诉了我们什么信息。在只有一个简单的零点  $s = a$  的情况下,可以看到,当频率远小于转角频率时,响应函数的相位为  $0^\circ$ ;然而,当频率很高 ( $\omega \gg a$ ) 时,响应函数的相位为  $90^\circ$ 。在转角频率附近,传输函数的相位变化稍微快一些。通过合理地设计电路(它确定了  $a$ ),可以得到实际需要的响应相角。

### 练习

16.12 画出例 16.7 中的传输函数相位的波特图。

答案:  $0^\circ, \omega \leq 10$ ;  $90^\circ, \omega \geq 1000$ ;  $45^\circ$ , 斜率为  $45^\circ/\text{十倍频程}$ ,  $10 < \omega < 1000$  ( $\omega$  单位为  $\text{rad/s}$ )

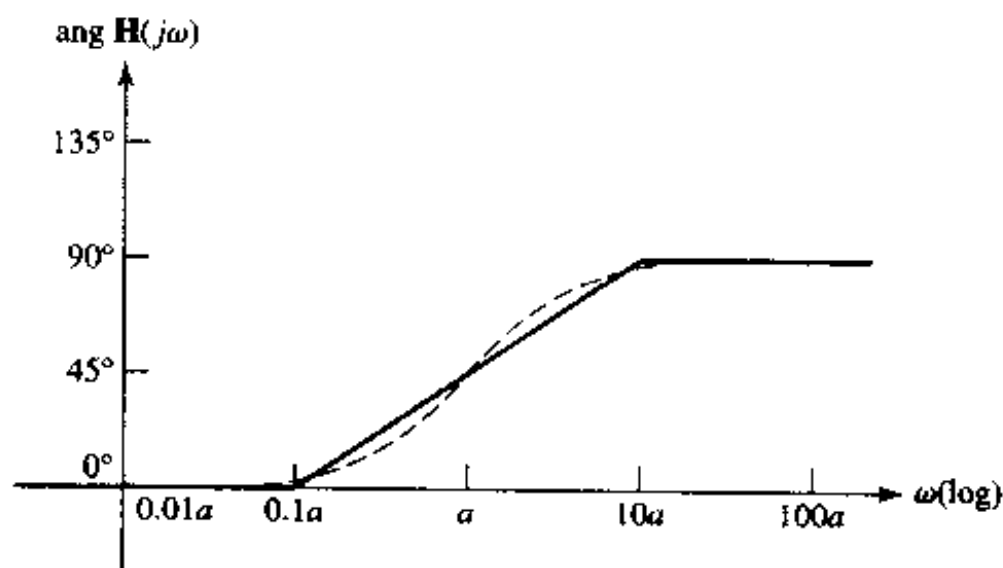


图 16.21  $H(s) = 1 + s/a$  的相角响应渐近线,它由三条实直线段组成。斜线的两个端点分别为:  $0.1a$  处为  $0^\circ$ ,  $10a$  处为  $90^\circ$

### 16.7.5 绘制波特图的其他考虑

考虑只有一个极点的简单传输函数:

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/a} \quad (16.27)$$

因为这是只含有一个零点的传输函数的倒数,因此对其进行对数运算以后,得到的波特图为前面得到的波特图的相反数。因此,对于该函数的幅度响应,  $\omega = a$  时幅度为  $0 \text{ dB}$ ,  $\omega > a$  时斜率为  $-20 \text{ dB/十倍频程}$ 。对于该函数的相位响应,  $\omega < 0.1a$  时相位为  $0^\circ$ ,  $\omega > 10a$  时为  $-90^\circ$ ,  $\omega = a$  时为  $-45^\circ$ ,  $0.1a < \omega < 10a$  时斜率为  $-45^\circ/\text{十倍频程}$ 。希望读者能直接根据式(16.27)画出该函数的波特图。

在  $H(s)$  中可能出现的另一个因式为  $s$ , 它可以出现在分子或分母中。如果  $H(s) = s$ , 那么:

$$H_{dB} = 20 \log |\omega|$$

这时得到一条斜率为  $20 \text{ dB/十倍频程}$  的无穷长直线,它在  $\omega = 1$  时穿过  $0 \text{ dB}$ ,如图 16.22(a)所示。

如果因式  $s$  出现在分母中,则得到一条斜率为  $-20 \text{ dB/十倍频程}$  的无穷长直线,它在  $\omega = 1$  时穿过  $0 \text{ dB}$ ,如图 16.22(b)所示。

在  $H(s)$  中还可能出现另一个因式为常数  $K$ , 这将得到一条位于横轴上方,且距离横轴  $20 \log |K| \text{ dB}$  的水平直线,当  $|K| < 1$  时,它实际上位于横轴的下方。

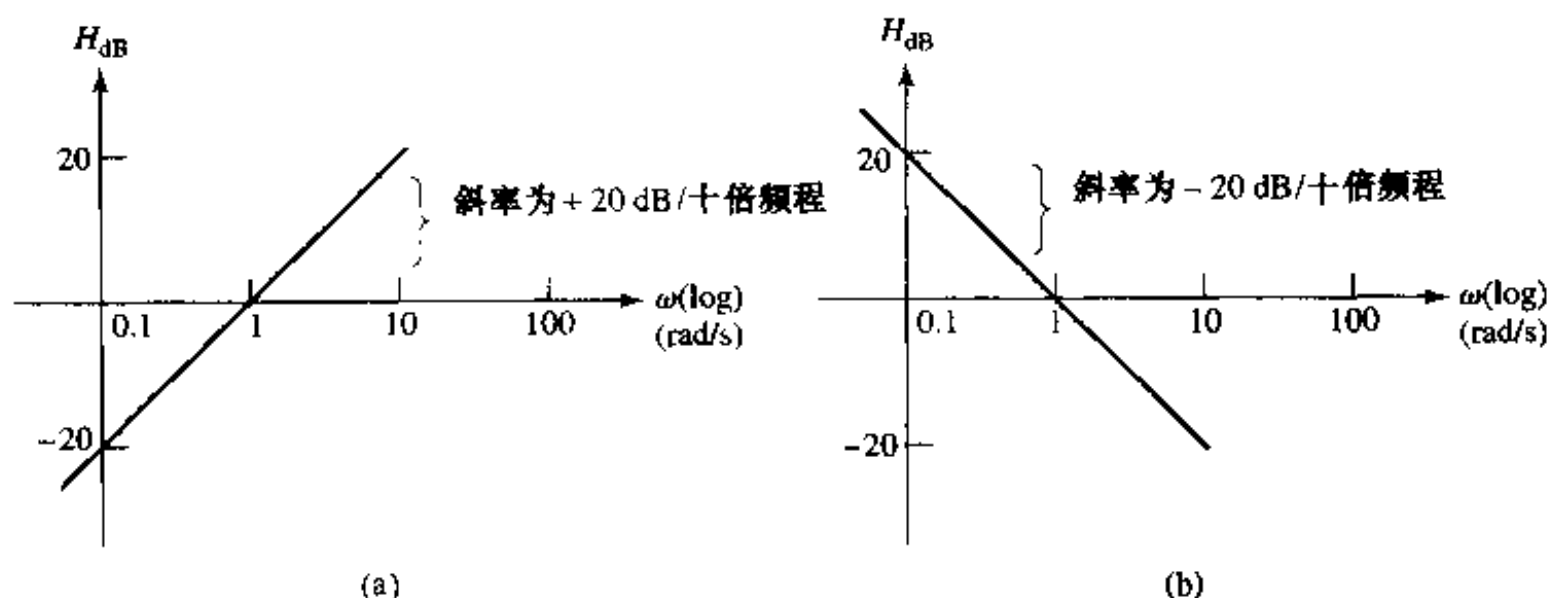


图 16.22 (a)  $H(s) = s$  和 (b)  $H(s) = 1/s$  的渐近线图。它们均为无穷长直线, 并且在  $\omega = 1$  时穿过 0 dB, 斜率分别为  $\pm 20$  dB/十倍频程

例 16.8 求图 16.23 所示电路的增益的波特图

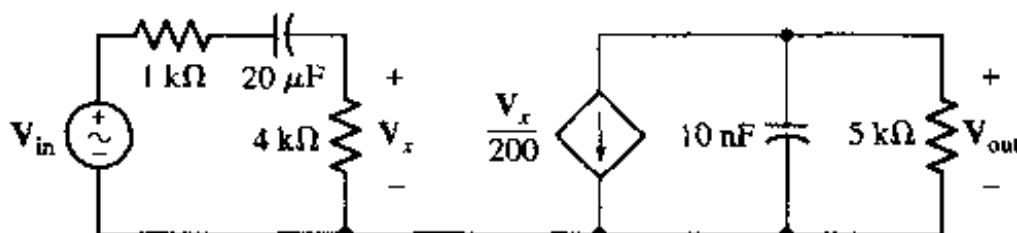


图 16.23 如果  $H(s) = V_{out}/V_{in}$ , 则该放大器的幅度波特图如图 16.24(b) 所示, 相位波特图如图 16.25 所示

从左到右对电路进行分析, 可以写出电压增益为:

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{4000}{5000 + 10^6/20s} \left( -\frac{1}{200} \right) \times \frac{5000(10^8/s)}{5000 + 10^8/s}$$

化简得:

$$H(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20000)} \quad (16.28)$$

可以看到, 上式含有一个常数  $20 \log |-2| = 6$  dB, 转角频率为  $\omega = 10$  rad/s 和  $\omega = 20000$  rad/s, 式中还有一个线性因式  $s$ 。它们均在图 16.24(a) 中画出, 将这些曲线叠加在一起, 可以得到图 16.24(b) 所示的波特图。

## 练习

16.13 画出  $H(s)$  等于下列式子时的幅度波特图: (a)  $50/(s + 100)$ ; (b)  $(s + 10)/(s + 100)$ ; (c)  $(s + 10)/s$ 。

答案: (a)  $-6$  dB,  $\omega < 100$ ;  $-20$  dB/十倍频程,  $\omega > 100$ ; (b)  $-20$  dB,  $\omega < 10$ ;  $+20$  dB/十倍频程,  $10 < \omega < 100$ ;  $0$  dB,  $\omega > 100$ ; (c)  $0$  dB,  $\omega > 10$ ;  $-20$  dB/十倍频程,  $\omega < 10$

在画图 16.23 所示放大器的相位波特图之前, 花点时间考察一下幅度波特图的一些细节。

首先, 不要过于依赖于各个幅度曲线的相加。相反地, 通过考虑  $H(s)$  的每个因式在各频率区间的渐近值, 可以很容易求得合并后的幅度曲线的值。例如, 对于图 16.24(b) 所示曲

线在  $\omega = 10$  和  $\omega = 20\,000$  之间的平坦区域,它低于转角频率  $\omega = 20\,000$ ,因此可以用 1 代表  $(1 + s/20\,000)$ ;而该区域又高于频率  $\omega = 10$ ,因此可以用  $\omega = 10$  代表  $(1 + s/10)$ 。所以:

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10) \times (1)} \right|$$

$$= 20 \log 20 = 26 \text{ dB}, \quad (10 < \omega < 20\,000)$$

可能还想知道在高频区渐近响应曲线与横轴在何处相交。这时,两个因式可以表示为  $\omega/10$  和  $\omega/20\,000$ ,因此:

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20\,000)} \right| = 20 \log \left| \frac{400\,000}{\omega} \right|$$

因为在交点处  $H_{dB} = 0$ , 所以有  $400\,000/\omega = 1$ , 即  $\omega = 400\,000 \text{ rad/s}$ 。

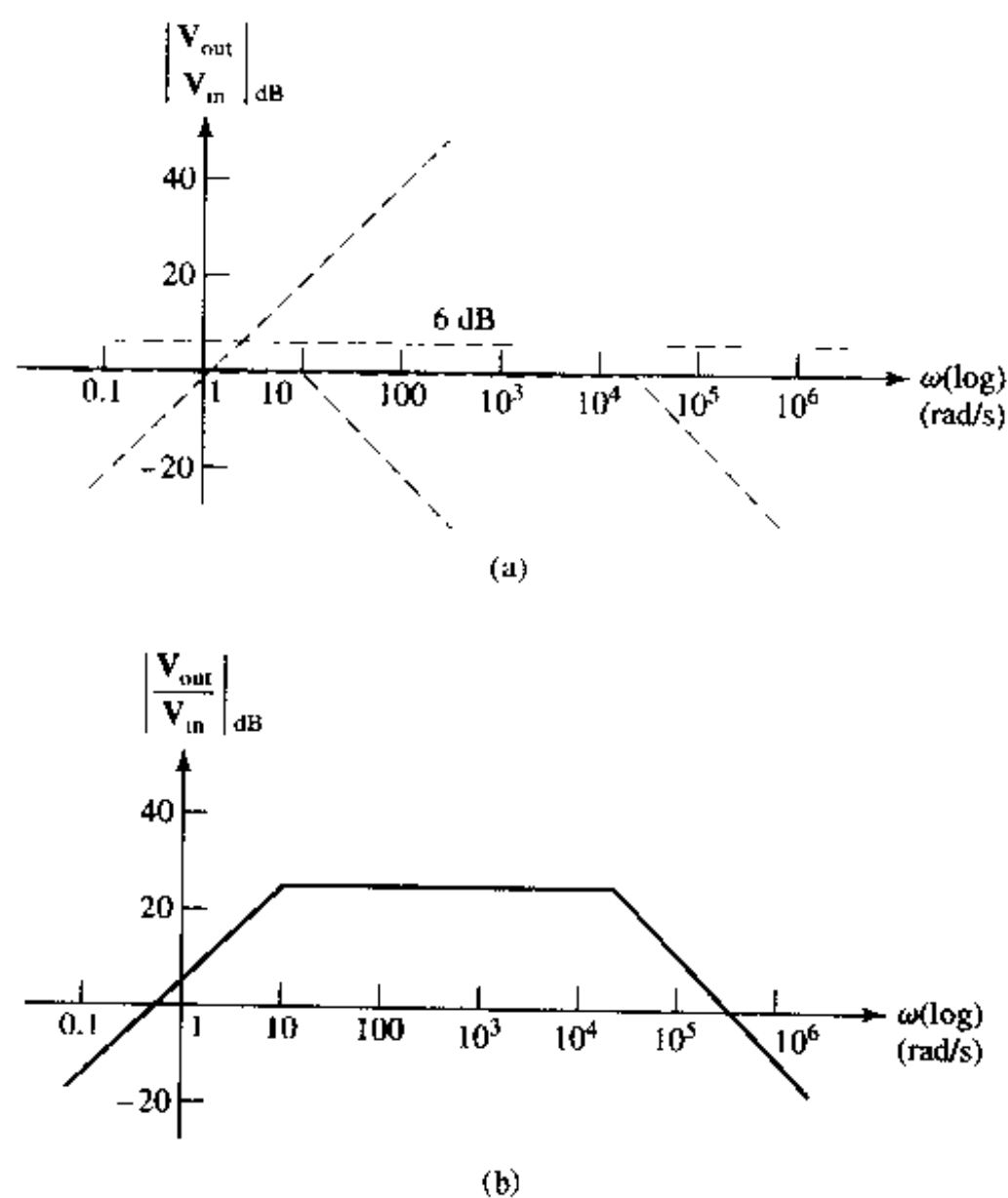


图 16.24 (a)分别画出了图 16.23 所示放大器的因式为  $-2s/(1 + s/10)^{-1}$  和  $(1 + s/20\,000)^{-1}$  的幅度波特图; (b) 将图 16.24 (a) 中的 4 个波特叠加在一起的频谱图

通常不需要在印制的半对数坐标纸上画出精确的波特图。只要简单地在纸上粗略地画出对数频率坐标即可。在选定了十倍频程的间隔(即从  $\omega = \omega_1$  到  $\omega = 10\omega_1$  的距离  $L$ , 其中  $\omega_1$  通常取 10 的整数次幂)之后,如果用  $x$  表示  $\omega_1$  右边的点  $\omega$  到  $\omega_1$  距离,则  $x/L = \log(\omega/\omega_1)$ 。记住下面这些值对画图会有帮助:当  $\omega = 2\omega_1$  时,  $x = 0.3L$ ; 当  $\omega = 4\omega_1$  时,  $x = 0.6L$ ; 当  $\omega = 5\omega_1$  时,  $x = 0.7L$ 。

**例 16.9** 画出式 (16.28) 给出的传输函数的相位波特图,  $H(s) = -2s/[(1 + s/10)(1 +$



$s/20\,000)$ ]

首先考察  $H(j\omega)$ :

$$H(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/20\,000)} \quad (16.29)$$

分子的相位为常数  $-90^\circ$ 。

剩下的两个因子用极点  $\omega = 10$  和  $\omega = 20\,000$  产生的相位贡献的叠加来表示。图 16.25 中用虚线渐近线分别表示出这三项,图中的实线表示它们的和。

将这条曲线往上平移  $360^\circ$  得到的曲线与原曲线等效。同样也可以求出渐近相位曲线的确切值。

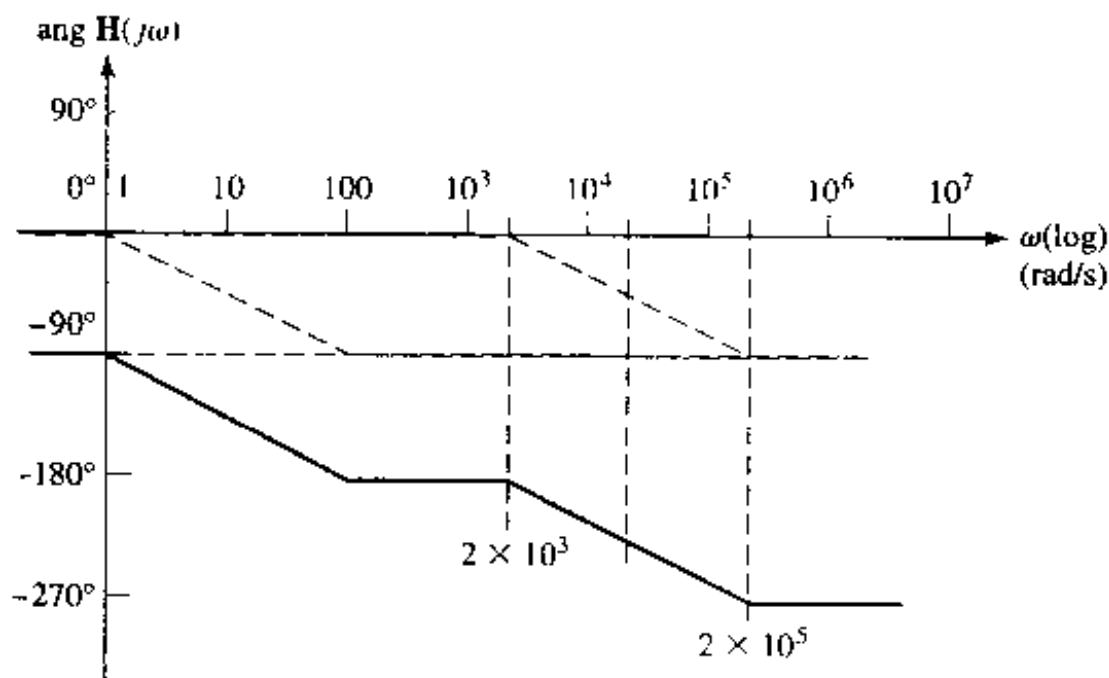


图 16.25 图中的实线表示图 16.23 所示放大器的渐近相位响应曲线

例如,当  $\omega = 10^4$  rad/s 时,根据式(16.29)中分子和分母的各因式可以求出图 16.25 中相应的相角。其中分子的相角为  $-90^\circ$ ;对于极点为 10 的因式,其贡献的相角为  $-90^\circ$ ,因为  $\omega$  比转角大十倍以上;我们知道,对于只有一个极点的情况,当频率处于转角频率的 0.1 倍和十倍之间时,相位曲线的斜率为  $-45^\circ$ /十倍频程,因此,对于转角频率为  $20\,000$  rad/s,可以计算出其相位为  $-45^\circ \log(\omega/0.1a) = -45^\circ \log[10\,000/(0.1 \times 20\,000)] = -31.5^\circ$ 。

这三项的代数和为  $-90^\circ - 90^\circ - 31.5^\circ = -211.5^\circ$ ,这与图 16.25 所示的渐近相位曲线上相应的点非常接近。

## 练习

16.14 画出当  $H(s)$  等于下列式子时的相位波特图:(a)  $50/(s+100)$ ; (b)  $(s+10)/(s+100)$ ; (c)  $(s+10)/s$ 。

答案:(a)  $0^\circ, \omega < 10$ ;  $-45^\circ$ /十倍频程,  $10 < \omega < 1\,000$ ;  $-90^\circ, \omega > 1\,000$ ; (b)  $0^\circ, \omega < 1$ ;  $+45^\circ$ /十倍频程,  $1 < \omega < 10$ ;  $45^\circ, 10 < \omega < 100$ ;  $-45^\circ$ /十倍频程,  $100 < \omega < 1\,000$ ;  $0^\circ, \omega > 1\,000$ ; (c)  $-90^\circ, \omega < 1$ ;  $+45^\circ$ /十倍频程,  $1 < \omega < 100$ ;  $0^\circ, \omega > 100$

前面所考虑的都是一阶零极点的情形,比如  $s^{\pm 1}, (1+0.2s)^{\pm 1}$  等等,不过可以很容易将它们推广到高阶的情况。因式  $s^{\pm n}$  对应的幅度响应曲线在  $\omega = 1$  处的斜率为  $\pm 20n$  dB/十倍频程,其相位响应曲线为常数相位  $\pm 90n^\circ$ 。对于高阶零点因式  $(1+s/a)^n$ ,它对应的幅度响应曲线和

相位响应曲线相当于  $n$  个一阶零点幅度响应曲线或相位响应曲线的叠加。因此,可以得到其渐近幅度响应曲线在  $\omega < a$  时为 0 dB,  $\omega > a$  时斜率为  $20n$  dB/十倍频程,  $\omega = a$  时误差为  $-3n$  dB, 在  $\omega = 0.5a$  和  $\omega = 2a$  处误差为  $-n$  dB。而渐近相位响应曲线在  $\omega < 0.1a$  时为  $0^\circ$ ,  $\omega > 10a$  时为  $90^\circ$ , 当  $\omega = a$  时为  $45^\circ$ , 当  $0.1a < \omega < 10a$  时, 斜率为  $45n^\circ$ /十倍频程。在两个转角频率处误差为  $\pm 5.71n^\circ$ 。

对于形如  $(1 + s/20)^3$  的因式, 可以很快地画出其幅度和相位渐近曲线, 但是要记住当幂比较高时, 带来的误差也比较大。

### 16.7.6 复共轭对

最后需要考虑的因式类型是共轭极点对和共轭零点对的情形。采用下列的共轭零点对作为标准形式:

$$H(s) = 1 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

其中  $\zeta$  为 16.2 节介绍的阻尼因子, 后面将看到  $\omega_0$  为渐近响应曲线的转角频率。

如果  $\zeta = 1$ , 则  $H(s) = 1 + 2(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/\omega_0)^2$ , 这是一个二阶零点因式, 前面已经讨论过了。如果  $\zeta > 1$ , 则  $H(s)$  可以分解为两个简单的因式。因此, 如果  $\zeta = 1.25$ , 则  $H(s) = 1 + 2.5(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/2\omega_0)(1 + s/0.5\omega_0)$ , 这又是我们熟悉的情况。

当  $0 \leq \zeta \leq 1$  时, 这是一种新的情况。这时, 没有必要求出共轭复根的值, 只要求出幅度和相位渐近曲线在低频区和高频区的值, 然后根据  $\zeta$  的值做一个修正即可。

对于幅度响应, 有:

$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| 1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right| \quad (16.30)$$

当  $\omega \ll \omega_0$  时,  $H_{dB} = 20 \log |1| = 0$  dB, 这是低频区的渐近线。当  $\omega \gg \omega_0$  时, 主要是二次项起作用, 这时  $H_{dB} = 20 \log |-(\omega/\omega_0)^2| = 40 \log(\omega/\omega_0)$ , 斜率为  $+40$  dB/十倍频程, 这是高频区的渐近线。两条渐近线交于  $\omega = \omega_0$  处, 对应的值为 0 dB。图 16.26 中用实线画出了渐近幅度响应曲线, 不过, 必须对转角频率的邻域进行修正。对于式(16.30), 令  $\omega = \omega_0$ , 可得:

$$H_{dB} = 20 \log \left| j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right| = 20 \log(2\zeta) \quad (16.31)$$

根据上式, 如果  $\zeta = 1$ , 则修正量为  $+6$  dB; 如果  $\zeta = 0.5$ , 则不需要进行修正; 如果  $\zeta = 0.1$ , 则修正量为  $-14$  dB。通常情况下, 这一修正已经足够画出令人满意的渐近幅度响应曲线了。图 16.26 画出了当  $\zeta = 1, 0.5, 0.25$  和  $0.1$  时根据式(16.30)计算出来的更为精确的曲线。比如对于  $\zeta = 0.25$ ,  $H_{dB}$  在  $\omega = 0.5\omega_0$  时的确切值为:

$$H_{dB} = 20 \log |1 + j0.25 - 0.25| = 20 \log \sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0 \text{ dB}$$

负的峰值并不刚好出现在  $\omega = \omega_0$  处, 它通常稍低于这个频率, 可以从  $\zeta = 0.5$  时对应的曲线看出这一点。

如果  $\zeta = 0$ , 则  $H(j\omega_0) = 0$ ,  $H_{dB} = -\infty$ , 这时通常不画出波特图。



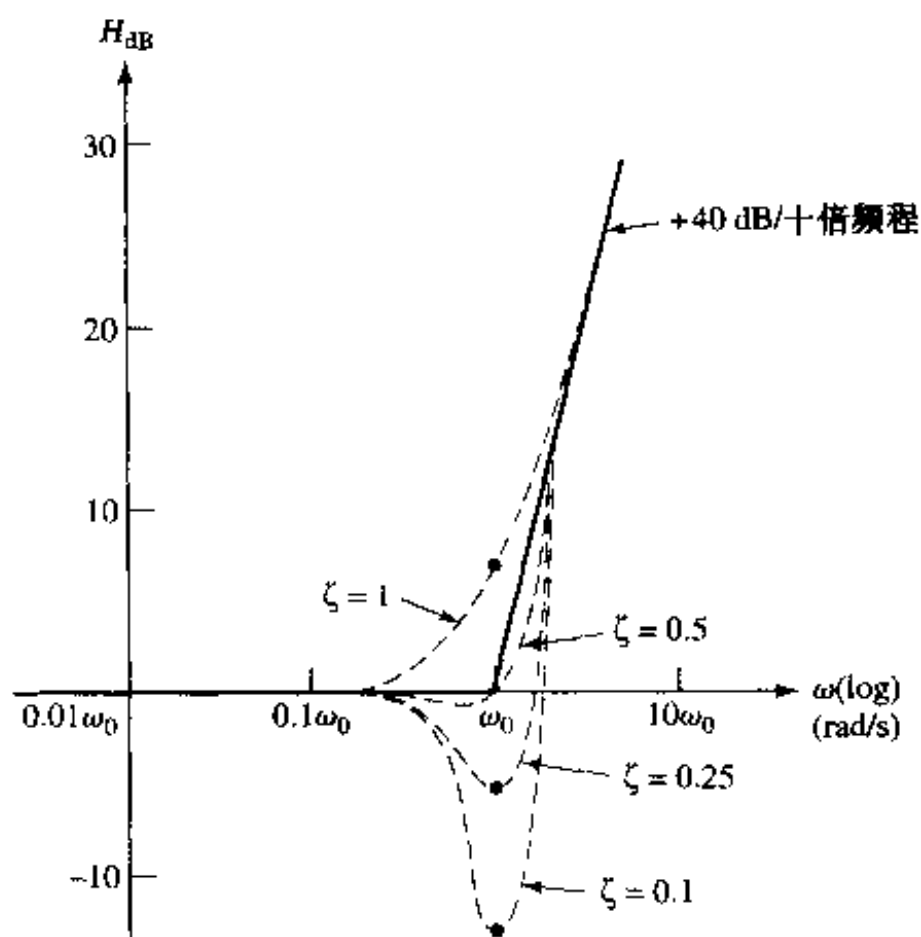


图 16.26  $H(s) = 1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2$  在几种不同的阻尼系数  $\zeta$  下的幅度波特图

最后来画出  $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$  的渐近相位响应。当  $\omega = 0.1\omega_0$  时, 令  $\text{ang } H(j\omega) = 0^\circ$ ; 当  $\omega = 10\omega_0$  时, 有  $\text{ang } H(j\omega) = \text{ang} [ - (\omega/\omega_0)^2 ] = 180^\circ$ 。在转角频率处,  $\text{ang } H(j\omega_0) = \text{ang} (j2\zeta) = 90^\circ$ 。在频率区间  $0.1\omega_0 < \omega < 10\omega_0$  为直线, 如图 16.27 的实线所示, 它开始于  $(0.1\omega_0, 0^\circ)$ , 经过  $(\omega_0, 90^\circ)$ , 终止于  $(10\omega_0, 180^\circ)$ , 斜率为  $90^\circ/\text{十倍频程}$ 。

这时, 必须根据各  $\zeta$  值对这条曲线进行修正。根据式(16.30), 有:

$$\text{ang } H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

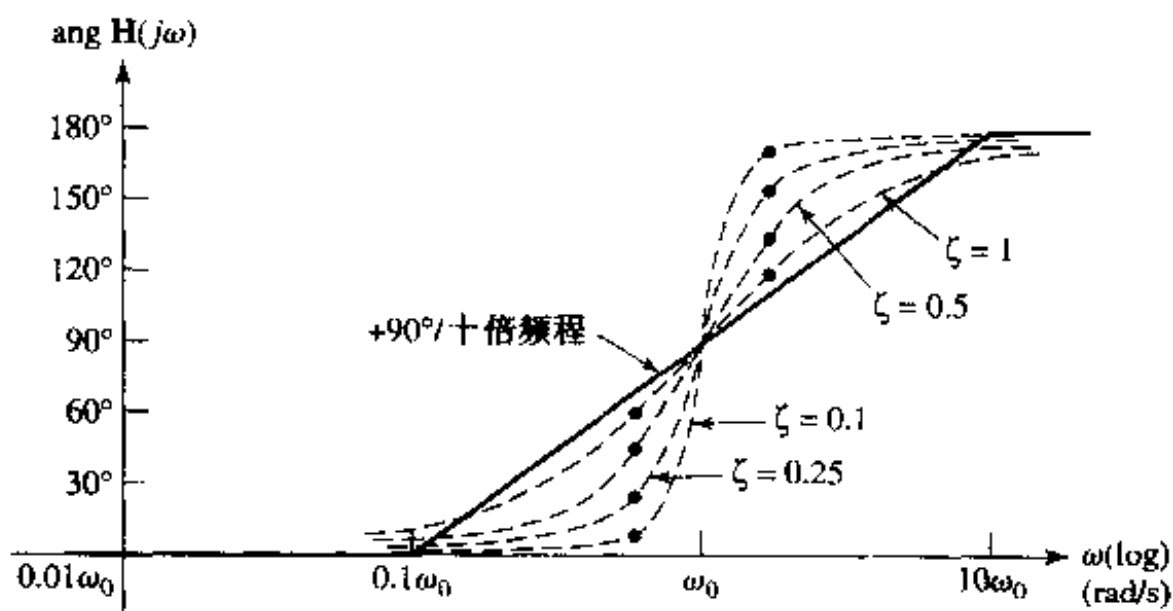


图 16.27  $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$  的相位特性的直线近似, 如图中实线所示, 图中用虚线画出了  $\zeta = 1, 0.5, 0.25$  和  $0.1$  时的精确相位曲线

只要知道了  $\omega < \omega_0$  区间和  $\omega > \omega_0$  区间某个频率的精确值, 就可以近似地画出这段曲线的形状。当  $\omega = 0.5\omega_0$  时, 有  $\text{ang } H(j0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$ ; 当  $\omega = 2\omega_0$  时, 其相位为  $180^\circ -$

$\tan^{-1}(4\zeta/3)$ 。图 16.27 中以虚线画出了当  $\zeta = 1, 0.5$  和  $0.25$  时的相位曲线;图中的实心粗点表示  $\omega = 0.5\omega_0$  和  $\omega = 2\omega_0$  时的精确相位值。

如果二次因式出现在分母中,则其幅度和相位曲线上的幅度和相位分别取为前面所讨论的曲线相应量的相反数。最后以一个包含线性因式和二次因式的例子来结束本节。

**例 16.10** 画出传输函数  $H(s) = 100\,000s / [(s+1)(10\,000 + 20s + s^2)]$  的波特图

先来考虑二次因式,并将它整理成为可以直接看出  $\zeta$  的形式。首先将二次因式除以它的常数项 10 000:

$$H(s) = \frac{10s}{(1+s)(1+0.002s+0.0001s^2)}$$

下一步,考察  $s^2$  项可得  $\omega_0 = \sqrt{1/0.0001} = 100$ 。然后重新写出二次因式的一次项,将其表示为三个因子 2,  $(s/\omega_0)$  和  $\zeta$  相乘的形式:

$$H(s) = \frac{10s}{(1+s)[(1+2)(0.1)(s/100) + (s/100)^2]}$$

可以看出  $\zeta = 0.1$ 。

图 16.28 的虚线画出了各因式的幅度渐近线:对于因式 10 为 20 dB;对于因式  $s$  为穿过横轴上的点  $\omega = 1$ ,斜率为 +20 dB/十倍频程的无穷长直线;对于分母中的一阶极点因式,其转角频率为  $\omega = 1$ ;对于含有二次项的因式,其转角频率为  $\omega = 100$ ,二次项对应的渐近线为 -40 dB/十倍频程的直线。将这四条曲线叠加起来,并对二次因式进行 +14 dB 的修正后,得到的渐近线如图 16.28 中的实线所示。

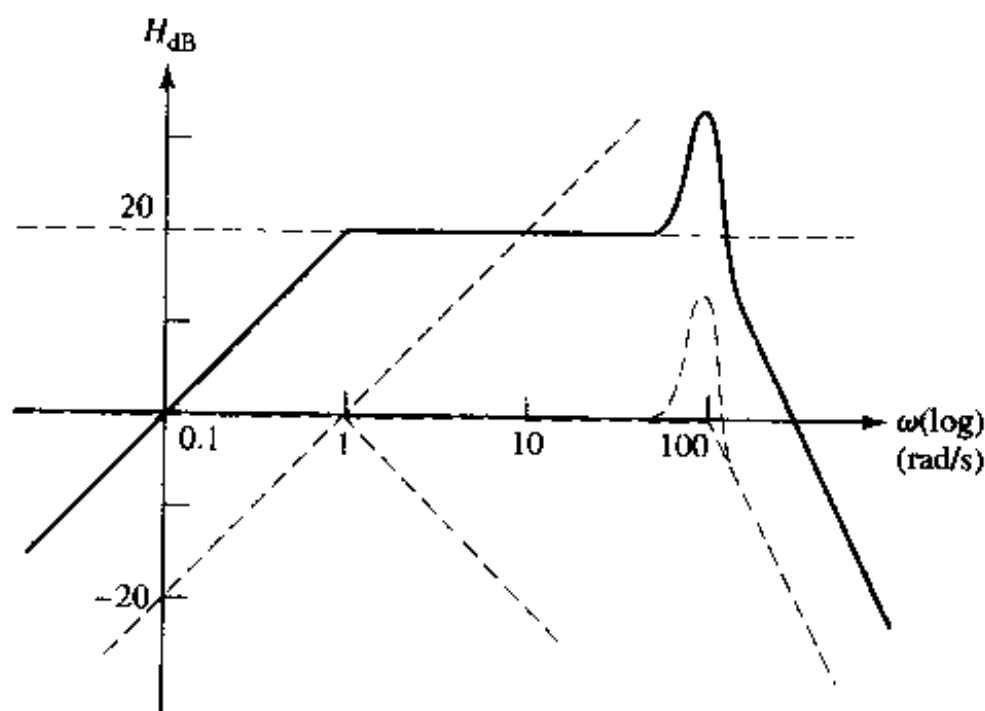


图 16.28 传递函数  $H(s) = \frac{100\,000s}{(s+1)(10\,000 + 20s + s^2)}$  的幅度波特图

相位响应由以下三部分组成:对于因式  $s$  为 +90°;对于一阶极点因式,当  $\omega < 0.1$  时为 0°,当  $\omega > 10$  时为 -90°,当  $0.1 < \omega < 10$  时为 -45°/十倍频程的直线;对于二次因式,当  $\omega < 10$  时为 0°,当  $\omega > 1\,000$  时为 -180°,当  $10 < \omega < 1\,000$  时为 -90°/十倍频程的直线。将这三条渐近线叠加起,再根据  $\zeta = 0.1$  进行一些修正,最后可以得到的渐近线如图 16.29 中的实线所示。

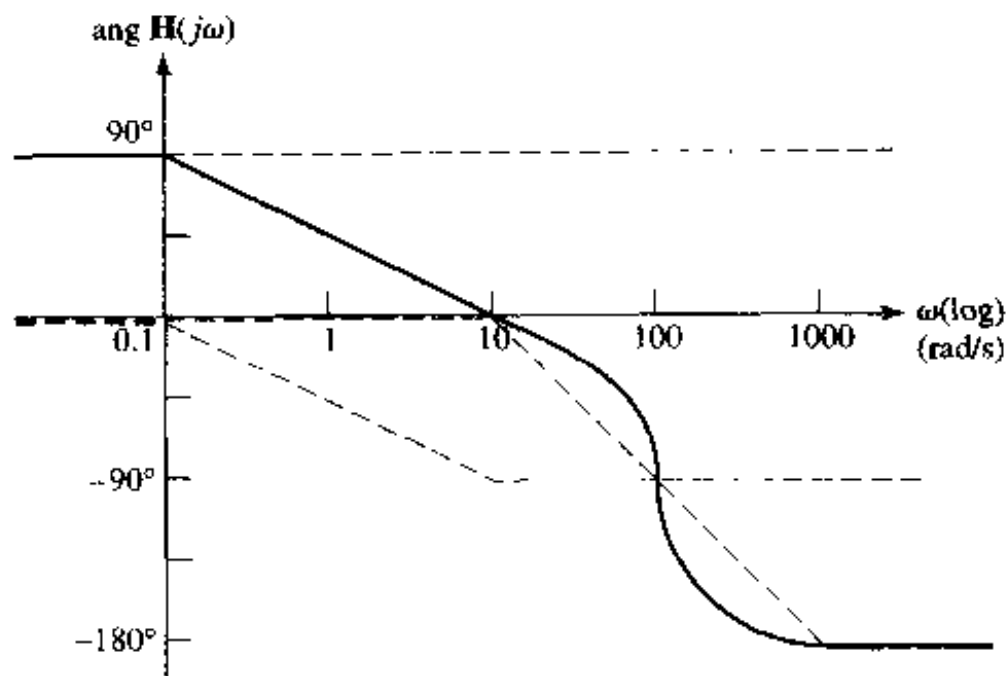


图 16.29 传递函数  $H(s) = \frac{100\,000s}{(s+1)(10\,000+20s+s^2)}$  的相位波特图

### 练习

- 16.15 设  $H(s) = 1\,000s^2/(s^2 + 5s + 100)$ , 画出幅度波特图并求 (a) 当  $H_{dB} = 0$  时  $\omega$  的值; (b) 当  $\omega = 1$  时  $H_{dB}$  的值; (c) 当  $\omega \rightarrow \infty$  时  $H_{dB}$  的值。

答案: 0.316 rad/s; 20dB; 60dB。

### 计算机辅助分析

绘制波特图的技巧非常有用。有许多需要很快绘制出近似曲线的场合(比如考试,或者在某个特殊的应用场合下计算一个特定电路的拓扑结构),只要知道了响应曲线的形状就足够了。而且在设计滤波器中,在选择因式和系数时,波特图也具有非常重要的价值。

在一些情况下,需要得到精确的响应曲线(比如校验最终的电路设计时),有几种计算机辅助工具可供选择。首先想到的方法是使用 MATLAB 来产生频率响应曲线,为了做的这一点,必须首先对电路进行分析并正确地得出其传递函数,不过,这时并不需要对求得的表达式分解因式或者进行化简。

考虑图 16.23 所示的电路,已经求出其传递函数为:

$$H(s) = \frac{-2s}{(1+s/10)(1+s/20\,000)}$$

求它在频率区间 100 mrad/s 到 1 Mrad/s 上的响应曲线。因为最后的图是在对数坐标下绘制的,因此不需要取均匀的频率间隔,用 MATLAB 的函数 `logspace()` 可以产生一个频率矢量,它的前两个参数分别表示频率区间的起始频率和终止频率是 10 的多少次幂(在本例中分别为 -1 和 6),第三个参数为总的点数。因此,相应的 MATLAB 程序为:

```
EDU >> w = logspace(-1, 6, 100);
EDU >> denom = (1 + j * w/10) .* (1 + j * w/20000);
EDU >> H = -2 * j * w ./ denom;
EDU >> Hdb = 20 * log10(abs(H));
```

```
EDU >> semilogx(w, Hdb)
EDU >> xlabel('frequency(rad/s)')
EDU >> ylabel('|H(jw)|(dB)')
```

它得到曲线如图 16.30 所示。

需要对这段 MATLAB 代码作一些解释。首先注意到,这里对  $H(s)$  的表达式进行了代换  $s = j\omega$ 。MATLAB 将变量  $\omega$  看做一个矢量,或者说一维矩阵。这样,该变量将导致分母表这式计算上的困难,因为 MATLAB 会试图用矩阵运算的规则对表达式进行运算。因此,用单独的一行来计算  $H(j\omega)$  的分母,为了将两个因子相乘,使用运算符  $.*$  而不是  $*$ 。这个新的运算符与下面的 MATLAB 语句等效:

```
EDU >> for k = 1:100
denom = (1 + j * w(k)/10) * (1 + j * w(k)/20 000);
end
```

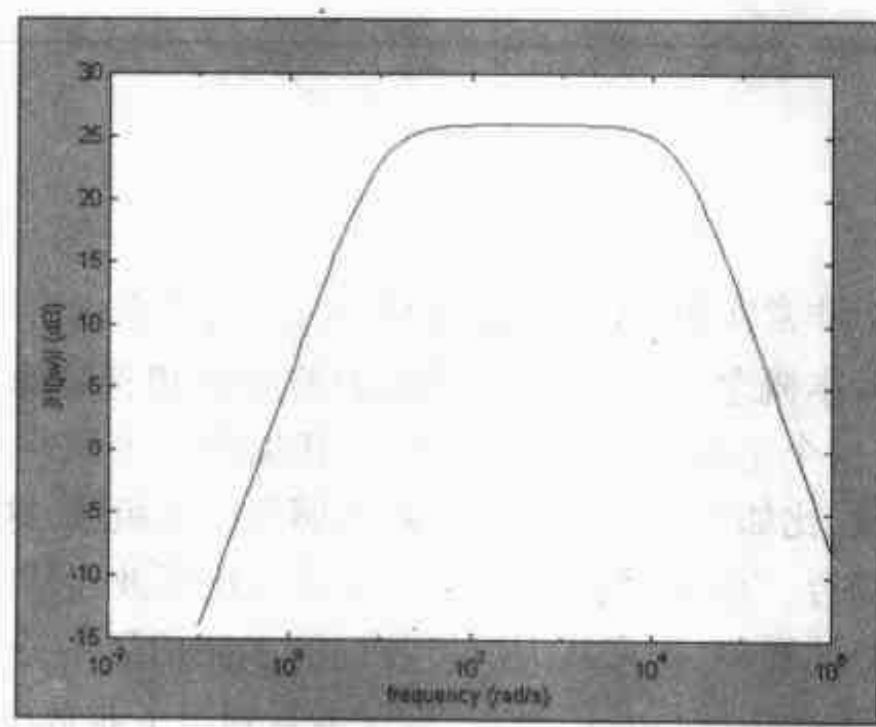


图 16.30  $H_{db}$  的 MATLAB 仿真图形

在下一行用到的另一个新运算符  $./$  的也有类似的含义。因为所求结果的单位为 dB,因此需要使用函数  $\log_{10}()$ ,在 MATLAB 中  $\log()$  表示自然对数。最后来看这个新的画图函数  $\text{semilogx}()$ ,它用来产生  $x$  轴为对数坐标的图。希望读者使用这些技巧绘制出前面例子的精确响应曲线,并与相应的波特图做比较。

PSpice 也非常适合于绘制频率响应曲线。将图 16.23 用原理图绘制工具重新绘制出来,如图 16.31 所示,图中的两个圆圈是伪元件,用来表示  $V_x$  和  $V_{out}$ ,这是为了在 Probe 中更容易识别出来。为了方便,电源 VAC 使用了幅度为 1 V 的交流电源(AC),当然也可以使用其他值。图 16.32 为用 1001 点产生的图形(选中 Decade AC Sweep Type),频率范围为 100 mHz 到 1 MHz。注意到,仿真中使用的单位为 Hz,不是 rad/s。

同样地,希望读者使用这种方法对前面的例子进行仿真,并与相应的波特图做比较。