

● 弄清问题的目标:

要分析的函数是一个周期函数,它与正弦函数有些相似,需要求出其傅里叶级数表示。如果负半部分电压没有被去掉,则它只包含一个正弦分量,这是非常简单的问题。

● 收集已知信息:

为了将此电压波形用傅里叶级数表示,首先必须确定其周期,并将这个用图形给出的电压波形表示为关于时间的函数形式。从图中可以看出,其周期为:

$$T = 0.4 \text{ s}$$

因此:

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

于是:

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

● 选择最适合问题的已有方法:

求出这三个量以后,下面来求 $f(t)$ 或 $v(t)$ 在一个周期内的表达式。事实证明,对许多学生来说,求这样的表达式是傅里叶分析中最难的部分。困难主要来自于缺乏读这种图的经验,以及在确定表达式的乘数因子时粗心大意,或者没有写出完整的表达式等等。对于本例,函数的形式为正弦波,其幅度为 V_m ,角频率已经求出为 5π ,而且该余弦波形只有正半部分。因此,在周期 $t=0$ 到 $t=0.4$ 上,其函数表达式为:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t, & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0, & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t, & 0.3 \leq t \leq 0.4 \end{cases}$$

但是,如果将周期区间取为 $t = -0.1$ 到 $t = 0.3$ 可以减少分段表达式的数目,这时,需要求的积分就更少:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t, & -0.1 \leq t \leq 0.1 \\ 0, & 0.1 \leq t \leq 0.3 \end{cases} \quad (18.12)$$

虽然前面这两种描述形式均可以得到正确的结果,但是后面这种形式比较好。

● 建立适当的方程组:

很容易求得零频率成分为:

$$a_0 = \frac{1}{0.4} \int_{-0.1}^{0.3} v(t) dt = \frac{1}{0.4} \left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t dt + \int_{0.1}^{0.3} (0) dt \right]$$

注意到,对于分段定义的函数,在一个周期上进行积分时必须分几个子区间进行,每个子区间上 $v(t)$ 的函数形式均已知。

余弦项的幅度为:

$$a_n = \frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t dt$$

● 确定是否还需要其他信息:

求积分时,当 $n=1$ 时和 n 为其他值时得到的形式不同。当 $n=1$ 时,有:

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t dt = \frac{V_m}{2} \quad (18.13)$$

当 n 不等于 1 时,有:

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi n t dt$$

● 试解:

计算上式,可得:

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \quad (18.14)$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2} [\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t] dt$$

即

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi} \frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2}, \quad (n \neq 1) \quad (18.15)$$

采用类似的方法进行积分,可以发现,对任何 n ,均有 $b_n = 0$,即该傅里叶级数不包含正弦项。根据式(18.1)、式(18.13)、式(18.14)和式(18.15)可以得到该傅里叶级数为:

$$\begin{aligned} v(t) = & \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi} \cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi} \cos 20\pi t \\ & + \frac{2V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \dots \end{aligned} \quad (18.16)$$

必须指出,当 $n=1$ 时,对 $n \neq 1$ 时 a_n 的表达式取极限 $n \rightarrow 1$,恰好可以得到正确的表达式。

● 证实所得解是否合理和满足要求:

可以通过取式(18.16)前面的若干项,忽略后面的项,然后将数值代入来验证解答。另一种方法是将函数画出来,图 18.3 画出了取前 n 项($n=1,2$ 和 4)的情况。从中可以看到,取的项数越多,画出的曲线就越接近于图 18.2(b)。

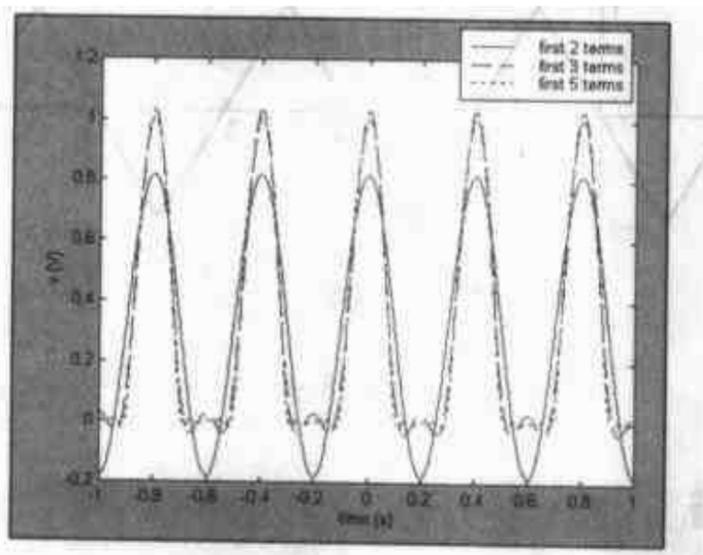
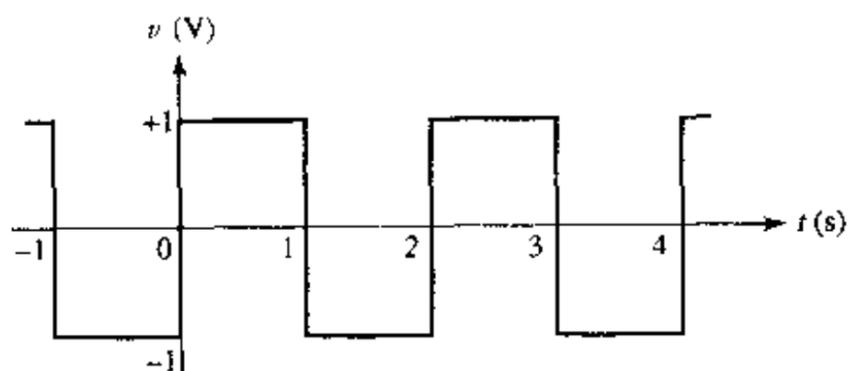


图 18.3 式(18.16)中取前 n 项($n=1,2$ 和 4)的曲线,为方便起见,取幅度 $V_m=1$

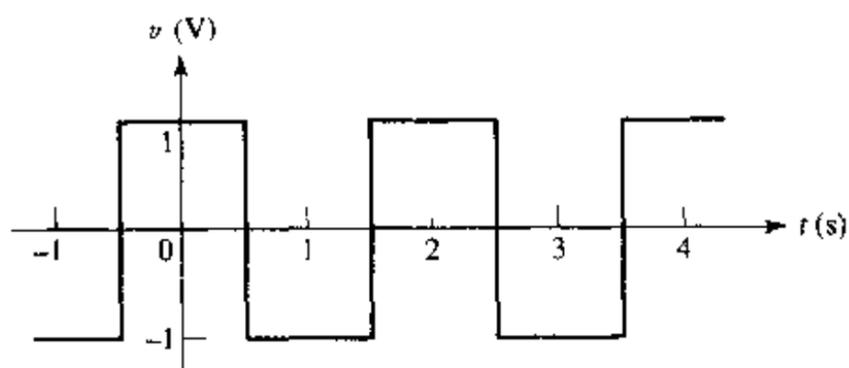
练习

- 18.2 某周期波形 $f(t)$ 可以用下面的表达式来描述: $f(t) = -4, 0 < t < 0.3$; $f(t) = 6, 0.3 < t < 0.4$; $f(t) = 0, 0.4 < t < 0.5$; $T=0.5$ 。求(a) a_0 ; (b) a_3 ; (c) b_1 。
- 18.3 用傅里叶级数表示图 18.4 所示的电压波形。

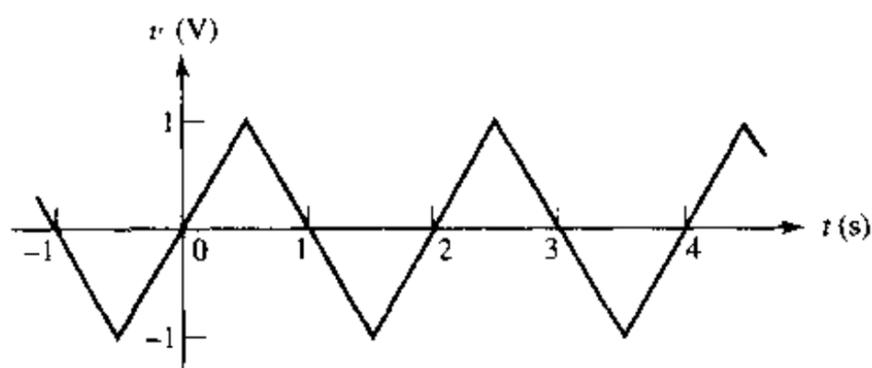
答案: 18.2: $-1.200; 1.383; -4.44$ 。 18.3: $(\frac{4}{\pi})(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots)V$;
 $(\frac{4}{\pi})(\cos \pi t + \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t - \dots)V$; $(\frac{8}{\pi^2})(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \dots)$



(a)



(b)



(c)

图 18.4

18.2.5 线谱和相位谱

图 18.2(a)中画出了 $v(t)$ 随时间变化的函数曲线,式(18.12)给出了 $v(t)$ 关于时间的分析表达式,它们都是时域表示形式。式(18.16)用傅里叶级数表示 $v(t)$,也是时域表示形式,但很容易将其转化为频域表示形式。比如,可以将式(18.16)中的各频率在 s 平面上相应的位置画出来,这样在原点和正负 $j\omega$ 轴的对称位置上将会画上标记。另外一种表示频率信息的更常用的方法是使用线谱,它反映了每种频率成分的幅度。式(18.16)的线谱如图 18.2(b)所示,每种频率成分的幅度用该频率处的垂线的长度表示。这种频谱也称为离散谱,因为任何有限频率区间只包含了有限数目的频率成分。

这里必须提醒大家注意,由于上面的例子不包含正弦项,因此 n 次谐波的幅度为 $|a_n|$ 。如果 b_n 不等于 0,那么频率为 $n\omega_0$ 的成分的幅度必然是 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,这是线谱图中必须标出的量。在后面讨论傅里叶级数的复数形式时,将看到可以更加直接地求得这个幅度。

除幅度谱以外,还可以得到离散相位谱。对任何频率 $n\omega_0$,将余弦项和正弦项合并,可以求得相位角 ϕ_n :

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}\right) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \end{aligned}$$

即

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}$$

式(18.16)中,对每个 n , $\phi_n = 0^\circ$ 或 180° 。

这个例子中求得的傅里叶级数不包含正弦项,余弦项中不包含奇次项(基波除外)。事实上,通过观察给定的时域函数,在进行积分之前就可以判断出要求的傅里叶级数缺少哪些项。下一节考虑对称性的应用。

18.3 对称性的应用

18.3.1 偶对称和奇对称

两种很容易判断的对称为偶函数对称和奇函数对称,或者简称为偶对称和奇对称。如果 $f(t)$ 满足:

$$f(t) = f(-t) \quad (18.17)$$

则称 $f(t)$ 具有偶对称性。

具有偶对称性的函数有 t^2 , $\cos 3t$, $\ln(\cos t)$, $\sin^2 7t$ 以及常数 C 等等。对于任何这样的函数,将 t 替换为 $(-t)$ 不会改变函数的值。这种对称性也可以在图形上体现出来,如果 $f(t) = f(-t)$,则关于 $f(t)$ 轴存在镜像对称性。图 18.5 所示的函数具有偶对称性,如果沿 $f(t)$ 轴将该图折叠起来,则其正时间部分的图像与负时间部分的图像将完全重合。

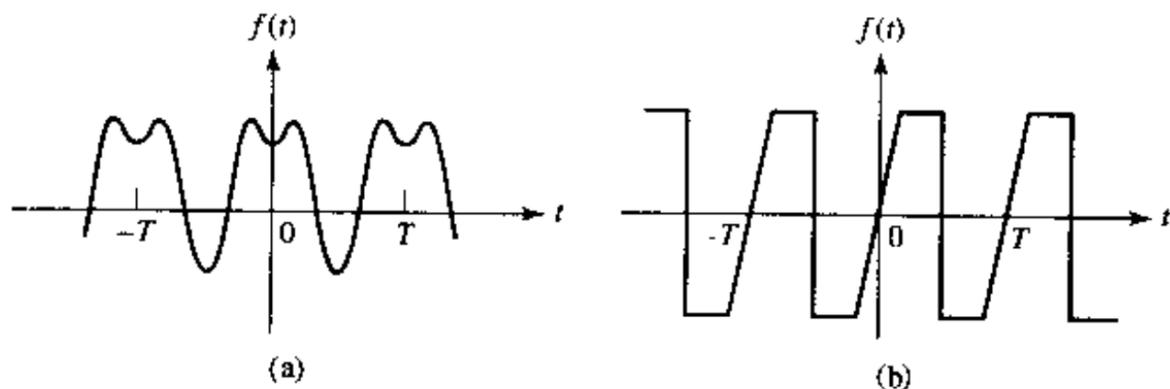


图 18.5 (a)具有偶对称性的波形;(b)具有奇对称性的波形

奇对称性定义为:如果 $f(t)$ 具有奇对称性,则:

$$f(t) = -f(-t) \quad (18.18)$$

换句话说,如果将 t 替换为 $(-t)$,则得到该函数的相反数。函数 $t, \sin t, t \cos 70t, \sqrt{1+t^2}$ 以及图 18.5(b)所示的函数均为奇函数,具有奇对称性。从图像上看,奇对称函数的特性也是很明显的,如果将 $f(t)$ 的 $t > 0$ 部分绕着 t 轴旋转 180° ,然后再将所得的结果沿着 $f(t)$ 轴对折,那么这两部分($t > 0$ 部分和 $t < 0$ 部分)将完全重合。换句话说,现在具有的对称性是关于原点的对称性而不是像偶对称函数那样关于 $f(t)$ 轴的轴对称性。

了解了偶对称和奇对称的定义之后,可以知道,两个偶函数的乘积或者两个奇函数的乘积具有偶对称性;一个奇函数和一个偶函数的乘积具有奇对称性。

18.3.2 对称性和傅里叶级数项的关系

下面来考察偶对称性使得傅里叶级数有什么样的性质。考虑到 $f(t)$ 等于无穷多个正弦函数与余弦函数的和,很显然,当 $f(t)$ 为偶对称函数时,这些正弦函数与余弦函数的和也必然是偶函数。但是正弦函数为奇函数,将任意多个正弦函数相加,除了 0 以外(它既是奇函数也是偶函数)其结果不会是什么偶函数。因此,偶函数的傅里叶级数只包含常数项和余弦项。下面来详细证明 $b_n = 0$ 。已知:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

将第一个积分的积分变量 t 替换为 $-\tau$,则 $\tau = -t$,然后利用 $f(t) = f(-t) = f(\tau)$,有:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(-\tau) \sin(-n\omega_0 \tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[- \int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0 \tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

因为积分的结果和积分变量的名称无关,因此:

$$\int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0 \tau d\tau = \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

于是:

$$b_n = 0 \quad (\text{偶对称性}) \quad (18.19)$$

即不含正弦项。因此,如果 $f(t)$ 具有偶对称性,那么 $b_n = 0$;反之,如果 $b_n = 0$,那么 $f(t)$ 具有偶对称性。

采用类似的方法进行分析,可以发现 a_n 的表达式可以简化为在半个周期区间进行积分,即 $t = 0$ 到 $t = \frac{1}{2}T$ 之间的积分:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (\text{偶对称性}) \quad (18.20)$$

对于偶函数,通过“在半个周期上积分并乘以 2”来求 a_n ,这看起来也是符合逻辑的。

类似地,具有奇对称性的函数的傅里叶展开式中不含有常数项和余弦项。下面来证明这个命题。已知:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$

然后对第一个积分做替换 $t = -\tau$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(-\tau) \cos(-n\omega_0 \tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(-\tau) \cos n\omega_0 \tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

又 $f(-\tau) = -f(\tau)$, 因此:

$$a_n = 0 \quad (\text{奇对称性}) \quad (18.21)$$

类似地(但更简单一些), 可以证明:

$$a_0 = 0 \quad (\text{奇对称性})$$

因此, 如果 $f(t)$ 具有奇对称性, 那么 $a_n = 0$ 且 $a_0 = 0$; 反之, 如果 $a_n = 0$ 且 $a_0 = 0$, 则 $f(t)$ 具有奇对称性。

同样, 在半个周期上进行积分就可以求得 b_n :

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (\text{奇对称性}) \quad (18.22)$$

本节后面的练习 18.3 中给出了偶对称性和奇对称性的例子。该练习的(a)小题和(b)小题所给出的方波的幅度和周期均相同, 只是时间的原点不同, 使得(a)小题的方波具有奇对称性, 而(b)小题具有偶对称性, 所求的结果分别只含有正弦项和余弦项。需要指出的是, 可以将 $t = 0$ 取在别的位置, 使得函数既不具有奇对称性, 也不具有偶对称性; 这样得到的傅里叶级数项的系数个数则至少是原来的两倍。

18.3.3 半波对称性

练习 18.3 中给出的两种方波的傅里叶级数均具有另外一个有趣的特性, 即它们都不包含偶次谐波^①。也就是说, 级数中的频率成分中只包含基频的奇数倍; 当 n 为偶数时, a_n 和 b_n 均等于 0。这是由另一种对称性引起的, 称为半波对称。如果:

$$f(t) = -f\left(t - \frac{1}{2}T\right)$$

则称 $f(t)$ 具有半波对称性。也可以用下式来表示:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right)$$

除了符号不同以外, 每个半周期与相邻的半周期完全一样。半波对称性与偶对称性和奇对称性不一样, 它不是由时间原点 $t = 0$ 所取的位置不同而导致的。因此, 方波[图 18.4(a)或图 18.4(b)]具有半波对称性。图 18.5 所示的波形均不具有半波对称性, 但与它们有些类似的图 18.6 中波形却具有半波对称性。

可以证明, 任何具有半波对称性的函数的傅里叶级数只包含奇次谐波。下面来考虑系数 a_n , 同样地:

^① 需要经常注意避免把偶函数和偶次谐波, 以及奇函数和奇次谐波搞混淆。比如, b_{10} 为偶次谐波系数, 而如果 $f(t)$ 为偶函数, 则它等于 0。

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]
 \end{aligned}$$

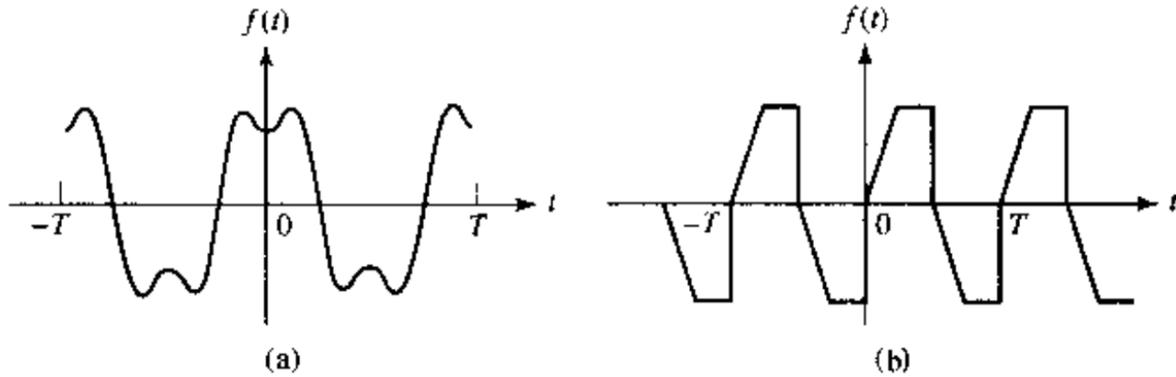


图 18.6 (a)与图 18.5(a)所示波形有点类似,但具有半波对称性;
(b)与图 18.5(b)所示波形有点类似,但具有半波对称性

可以将上式表示为:

$$a_n = \frac{2}{T} (I_1 + I_2)$$

然后对 I_1 做变量替换 $\tau = t + \frac{1}{2}T$ 得:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right) \cos n\omega_0\left(\tau - \frac{1}{2}T\right) d\tau \\
 &= \int_0^{T/2} -f(\tau) \left(\cos n\omega_0\tau \cos \frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0\tau \sin \frac{n\omega_0 T}{2} \right) d\tau
 \end{aligned}$$

而 $\omega_0 T$ 等于 2π , 于是:

$$\sin \frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

因此:

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau) \cos n\omega_0\tau d\tau$$

注意到上式与 I_2 有相同的因式, 然后可以得到:

$$a_n = \frac{2}{T} (1 - \cos n\pi) \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

因子 $(1 - \cos n\pi)$ 说明当 n 为偶数时 a_n 等于 0。因此:

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (\text{半波对称}) \quad (18.23)$$

采用类似的方法可以证明, 当 n 为偶数时, b_n 也等于 0, 因此:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (\text{半波对称}) \quad (18.24)$$

需要注意的是, 具有奇对称性或偶对称性的波形均可以具有半波对称性。比如图 18.6(a) 中给出的波形, 它既具有偶对称性, 又具有半波对称性。当波形既有半波对称性又有偶对称性或

奇对称性时,可以根据其 1/4 周期的波形来重构整个波形。 a_n 和 b_n 的值也可以通过在任何 1/4 周期上进行积分而求得,即:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ a_n &= 0, & n \text{ (为偶数)} \\ b_n &= 0, & \text{所有 } n \end{aligned} \right\} \text{(半波和偶对称)} \quad (18.25)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0, & \text{所有 } n \\ b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin \omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ b_n &= 0, & n \text{ 为偶数} \end{aligned} \right\} \text{(半波和奇对称)} \quad (18.26)$$

在计算给定波形的傅里叶级数时,花一些时间来考虑其对称性是值得的。

练习

- 18.4 画出下面所给函数的图像,分别指出它们是否具有偶对称性、奇对称性和半波对称性,并指出它们的周期分别是多少:(a) $v = 0, -2 < t < 0$ 或 $2 < t < 4; v = 5, 0 < t < 2; v = -5, 4 < t < 6$;然后周期重复;(b) $v = 10, 1 < t < 3; v = 0, 3 < t < 7; v = -10, 7 < t < 9$;然后周期重复;(c) $v = 8t, -1 < t < 1; v = 0, 1 < t < 3$;然后周期重复。
- 18.5 求练习 18.4 中(a)和(b)的波形的傅里叶级数。

答案: 18.4: 否, 否, 是, 8; 否, 否, 否, 8; 否, 是, 否。 18.5: $\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{10}{n\pi}$

$$\left(\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi t}{4} + \sin \frac{n\pi t}{4} \right); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi} \left[\left(\sin \frac{3n\pi}{4} - 3 \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos \frac{n\pi t}{4} + \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \sin \frac{n\pi t}{4} \right]$$

18.4 周期激励函数的完全响应

使用傅里叶级数,可以将任何周期激励函数表示为无穷多个正弦激励函数相加的形式。通过常规的稳态分析,可以求出每个正弦函数的受迫响应,而通过求出网络的传递函数的极点可以得到自由响应。根据网络的初始条件,包括受迫响应的初始值,可以求出自由响应的幅度,然后将受迫响应和自由响应相加,就得到完全响应。

例题 18.2 将图 18.7(a)所示的方波信号(包括其直流成分)作用于图 18.7(b)所示的 RL 网络中,求该电路的周期性响应。激励函数是在 $t=0$ 时接入的,求电流的响应,其初始值为 0 该激励函数的基频为 $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$,将本题的波形与练习 18.3 中图 18.4(a)所示波形进行比较,可以写出其傅里叶级数为:

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{n}$$

在频域中求解,可以求出 n 次谐波的受迫响应,其中:

$$v_m(t) = \frac{20}{n\pi} \sin 2nt$$

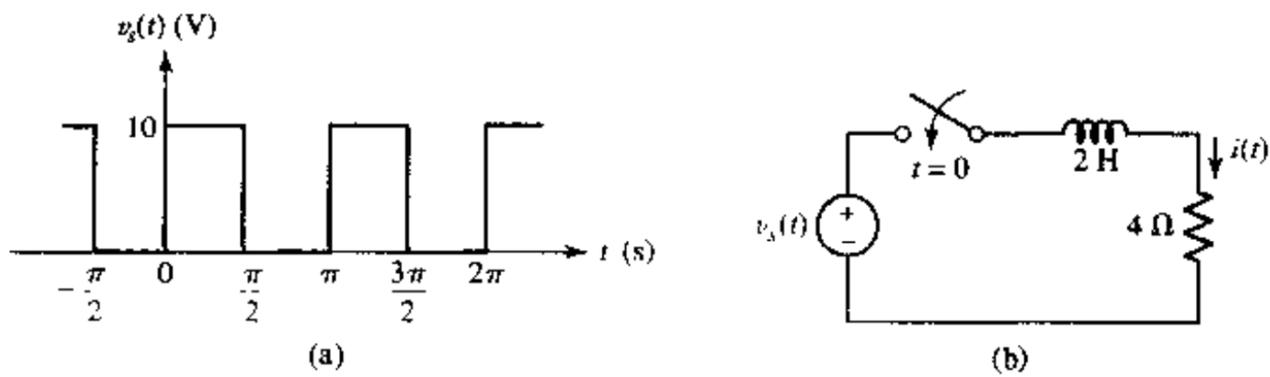


图 18.7 (a)方波电压激励函数;(b)在 $t=0$ 时将(a)中的激励函数作用于串联 RL 电路中,求 $i(t)$ 的完全响应

即

$$\mathbf{V}_m = \frac{20}{n\pi}(-j)$$

在这个频率上, RL 电路的阻抗为:

$$\mathbf{Z}_n = 4 + j(2n) \times 2 = 4 + j4n$$

因此,在这个频率上的受迫响应为:

$$\mathbf{I}_m = \frac{\mathbf{V}_m}{\mathbf{Z}_n} = \frac{-j5}{n\pi(1 + jn)}$$

变换到时域中,可以得到:

$$\begin{aligned} i_m &= \frac{5}{n\pi} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \cos(2nt - 90^\circ - \tan^{-1}n) \\ &= \frac{5}{\pi(1+n^2)} \left(\frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt \right) \end{aligned}$$

直流成分产生的响应为 $5V/4\Omega = 1.25\text{ A}$, 因此,总的受迫响应可以用下式表示:

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

对于这样一个简单电路,很容易写出其自由响应为单个指数项[说明传递函数 $I_f/V_s = 1/(4+2s)$ 只有一个极点]:

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

因此,完全响应等于下面的和:

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

因为 $i(0) = 0$, 所以:

$$A = -i_f(0)$$

令 $t=0$, 可以得到 $i_f(0)$:

$$i_f(0) = 1.25 - \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

虽然可以用这种和的形式来表示 A , 但是计算出这个和式的数值并用它来表示更方便一些。和式 $\sum 1/(1+n^2)$ 的前 5 项的和为 0.671, 前 10 项的和为 0.695, 前 20 项的和为 0.708, 精确的和为 0.720(保留三位有效数字)。因此:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}(0.720) = -0.104$$

于是:

$$i(t) = -0.104e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right] \text{ A}$$

在这个求解过程中,必须用到本章和前面第 17 章中介绍的许多最一般的概念。因为这个特定问题比较简单,因此不必用到别的概念,不过对于一般的分析则可能会用到它们。从这个意义上说,可以将对本问题的解答看做是这门电路分析入门课程学习的重大成就。尽管很有成就感,但必须指出的是,例题 18.2 所求出的用解析形式表示的完全响应实际上并没有多大价值,因为它没有形象地描述响应的特点。实际上,我们需要得到 $i(t)$ 随时间变化的曲线,这可以通过取足够多的项进行繁琐的计算而得到,这可以借助于计算机或者可编程计算器来进行。将自由响应、直流项和前几个谐波项的曲线叠加起来,可以近似地得到总的响应曲线,不过,这是一件相当繁琐而不值得去做的工作。

其实,本问题最好的解法是采用反复的瞬态分析方法。也就是说,可以先计算出时间区间 $t=0$ 到 $t=\pi/2$ s 内的曲线,这是一个指数上升的曲线,最大值为 2.5 A。求出第一个区间终点的值以后,相当于知道了下一个 $(\pi/2)$ 秒区间的初始值。这样反复进行下去,直到响应曲线具有周期性为止。这种方法非常适合于本例,因为相邻区间 $\pi/2 < t < 3\pi/2$ 和 $3\pi/2 < t < 5\pi/2$ 的响应曲线的差异几乎可以忽略。图 18.8 画出了电流的完全响应。

练习

- 18.6 对图 18.8 所示的电流曲线,使用第 8 章所介绍的方法求出 t 等于下列值时的电流值:(a) $\pi/2$; (b) π ; (c) $3\pi/2$ 。

答案: 2.392 A; 0.1034 A; 2.396 A

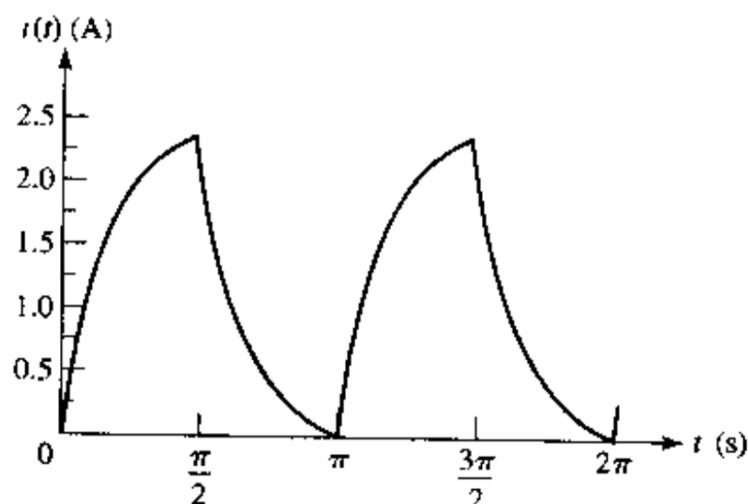


图 18.8 图 18.7(b)所示电路在图 18.7(a)所示方波激励下的完全响应的初始波形

18.5 傅里叶级数的复数形式

在求频谱时,已经看到每种频率成分的幅度和 a_n 及 b_n 均有关,也就是说正弦项和余弦项均对幅度有贡献,幅度的确切表达式为 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 。如果将傅里叶级数的每一项均用余弦函数及相角形式来表示,则可以直接得到每种频率的幅度。

如果将正弦项和余弦项用带有复常数因子的指数函数来表示,则可以得到一种更方便和更简洁的傅里叶级数表示形式。

首先写出傅里叶级数的三角形式:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

然后将其中的正弦项和余弦项用指数形式代替并整理得:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{jn\omega_0 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t} \frac{a_n + jb_n}{2} \right)$$

然后定义复常数 c_n 为:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18.27)$$

a_n, b_n 和 c_n 的值均与 n 和 $f(t)$ 有关。如果将 n 替换为 $(-n)$, 那么这些常数将有什么变化呢? 关于 a_n 和 b_n 的定义请参见式(18.10)和式(18.11), 显然:

$$a_{-n} = a_n$$

但

$$b_{-n} = -b_n$$

根据式(18.27), 有:

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18.28)$$

因此:

$$c_n = c_{-n}^*$$

另外, 令:

$$c_0 = a_0$$

这样, 可以将 $f(t)$ 表示为:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

或

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

最后, 将第二个和式变成从 -1 到 $-\infty$ 进行求和, 而不从 1 到 ∞ 进行求和, 得到:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.29)$$

按照约定, 从 $-\infty$ 到 ∞ 求和包含了 $n=0$ 的情况。

式(18.29)即为 $f(t)$ 的傅里叶级数的复数形式, 使用这种形式最重要的原因在于它的简洁性。将式(18.10)和式(18.11)代入式(18.27)中, 可以得到复系数的计算公式:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

然后, 使用正弦和余弦的指数表达式将其简化为:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.30)$$

这样,就用一个简洁的公式代替了傅里叶级数的三角形式中的两个公式。在求傅里叶系数时,只需要做一次积分就可以了,不需要做两次,而且这个积分的计算几乎总是要简单一些。需要注意的是,式(18.30)中,积分的乘积因子为 $1/T$,而 a_n 和 b_n 的积分公式中的因子均为 $2/T$ 。

将指数形式的傅里叶级数的两个基本关系式写在一起为:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.29)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.30)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi/T$, 和以前一致。

对于指数形式的傅里叶级数,频率成分 $\omega = n\omega_0$ 的幅度为 $|c_n|$ (其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。可以画出 $|c_n|$ 随着 $n\omega_0$ 或 nf_0 变化的离散谱,横坐标由正的和负的 n 值组成,这时,将得到关于原点对称的图像,因为根据式(18.27)和式(18.28)可以证明 $|c_n| = |c_{-n}|$ 。

根据式(18.29)和式(18.30),也可以看到频率成分 $\omega = n\omega_0$ 的幅度为 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| = 2|c_{-n}| = |c_n| + |c_{-n}|$ (其中 $n = 1, 2, 3, \dots$)。对于直流成分, $a_0 = c_0$ 。

同样地, $f(t)$ 的对称性也会影响指数形式的傅里叶级数[式(18.30)]的系数计算。在各种对称情况下, c_n 的计算公式为:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, \text{ (偶对称)} \quad (18.31)$$

$$c_n = \frac{-j2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt, \text{ (奇对称)} \quad (18.32)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, & (n \text{ 为奇数}) \\ 0, & (n \text{ 为偶数, } \frac{1}{2} \text{ 波对称}) \end{cases} \quad (18.33a)$$

$$(n \text{ 为偶数, } \frac{1}{2} \text{ 波对称}) \quad (18.33b)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & (n \text{ 为奇数, } \frac{1}{2} \text{ 波和偶对称}) \\ 0, & (n \text{ 为偶数, } \frac{1}{2} \text{ 波和偶对称}) \end{cases} \quad (18.34a)$$

$$(n \text{ 为偶数, } \frac{1}{2} \text{ 波和偶对称}) \quad (18.34b)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{-j4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt, & (n \text{ 为奇数, } \frac{1}{2} \text{ 波和奇对称}) \\ 0, & (n \text{ 为偶数, } \frac{1}{2} \text{ 波和奇对称}) \end{cases} \quad (18.35a)$$

$$(n \text{ 为偶数, } \frac{1}{2} \text{ 波和奇对称}) \quad (18.35b)$$

例题 18.3 求图 18.4(b)所示方波的傅里叶级数系数 c_n 。

这个方波具有偶对称性,同时具有半波对称性。如果忽略这些对称性而使用一般式(18.30)来求,取 $T = 2$, $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$, 这时:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{-0.5} -e^{-jn\pi t} dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-jn\pi t} dt - \int_{0.5}^1 e^{-jn\pi t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{jn\pi} (e^{-jn\pi t})_{-1}^{-0.5} + \frac{1}{jn\pi} (e^{-jn\pi t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{jn\pi} (e^{-jn\pi t})_{0.5}^1 \right] \\
 &= \frac{1}{j2n\pi} (e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}) \\
 &= \frac{1}{j2n\pi} (2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned}$$

可以得到 $c_0 = 0, c_1 = 2/\pi, c_2 = 0, c_3 = -2/3\pi, c_4 = 0, c_5 = 2/5\pi$ 等等。不过,如果我们还记得当 $b_n = 0$ 时, $a_n = 2c_n$ 的话,那么可以看出,这里求出的结果与练习 18.3 中对图 18.4(b) 所示波形所求得的结果一致。

利用波形的对称性(偶对称和半波对称性)来求要简单一些,根据式(18.34a)和(18.34b),有:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{4}{2} \int_0^{0.5} \cos n\pi t dt = \frac{2}{n\pi} (\sin n\pi t) \Big|_0^{0.5} \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, & (n \text{ 为奇数}) \\ 0, & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

这和不利用对称性所求得的结果一致。

下面来考虑一个难一些但比较有趣的例子。

例题 18.4 函数 $f(t)$ 为幅度等于 V_0 , 宽度为 τ 的矩形脉冲系列, 周期为 T , 如图 18.9(a) 所示。求 $f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数

基频为 $f_0 = 1/T$ 。因为没有任何对称性, 因此必须利用一般形式的复系数计算公式(18.30):

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{V_0}{T} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T} (e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0}) \\
 &= \frac{2V_0}{n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)} \sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right) \\
 &= \frac{V_0\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}
 \end{aligned}$$

因此可以求出 c_n 的幅度为:

$$|c_n| = \frac{V_0\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau} \right| \quad (18.36)$$

相角为:

$$\text{ang } c_n = -n\omega_0 \left(t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \quad (\text{正向脉冲 } 180^\circ) \quad (18.37)$$

式(18.36)和式(18.37)即为要求的指数形式的傅里叶级数。

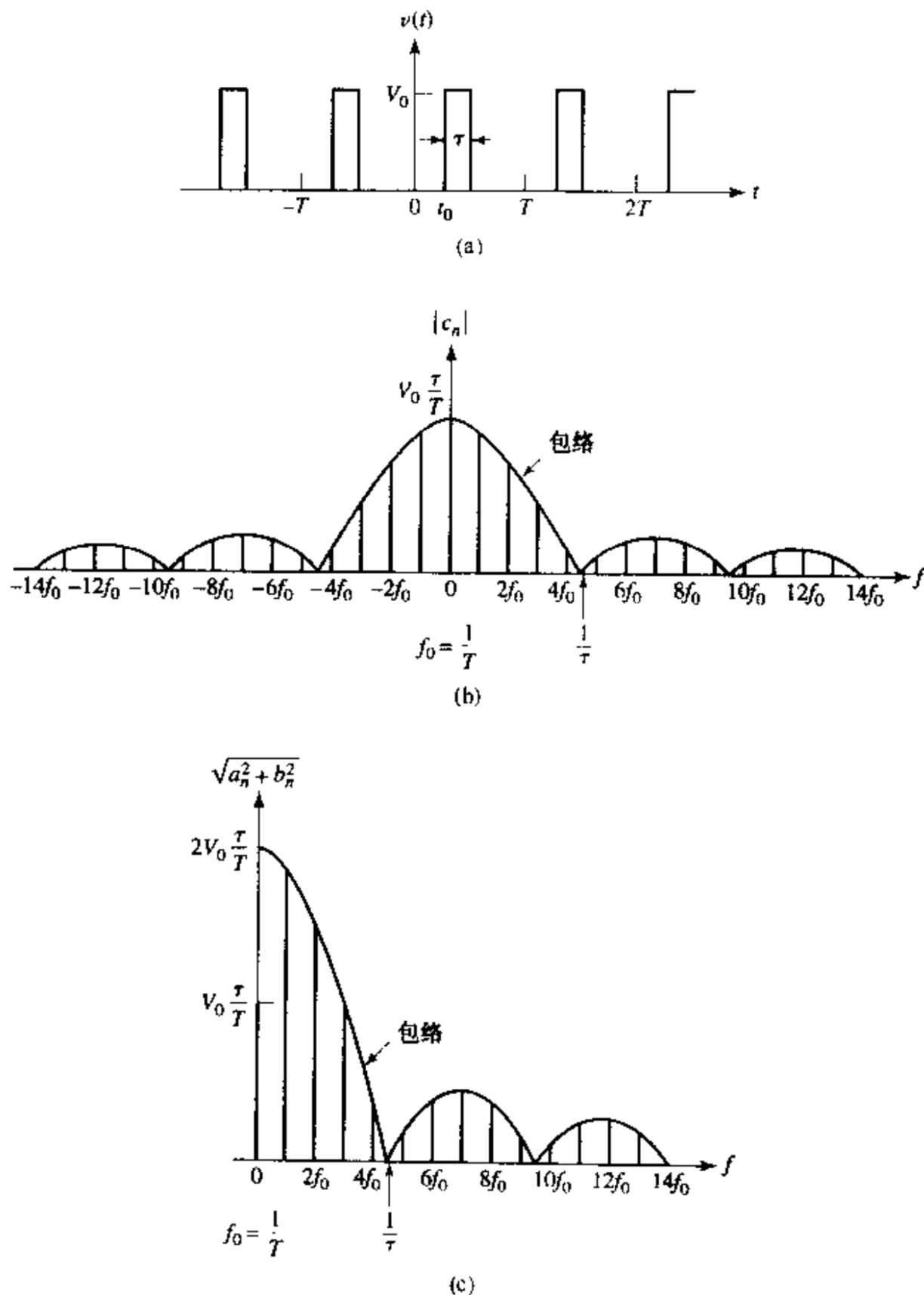


图 18.9 (a) 周期矩形脉冲; (b) $|c_n|$ 对应的离散线谱, $f = n f_0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; (c) $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, f = n f_0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

18.5.1 采样函数

在现代通信理论中,式(18.36)中绝对值符号内的因子称为采样函数。“采样”源于

图 18.9(a)所示的时间函数,采样函数也是由此而来的。将该脉冲序列与任何其他函数 $f(t)$ 相乘,如果 τ 足够小并且 $V_0 = 1$,将得到 $f(t)$ 的样本,样本之间的间隔为 T 秒。定义为:

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

因为它有助于求出 $f(t)$ 各种频率成分的幅度,因此有必要去研究这个函数的重要性质。首先,注意到当 x 为 π 的整数倍时 $\text{Sa}(x)$ 为 0,即:

$$\text{Sa}(n\pi) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

当 x 为 0 时,该函数的值未知,不过容易证明其值为 1:

$$\text{Sa}(0) = 1$$

因此, $\text{Sa}(x)$ 的幅度在 $x = 0$ 到 $x = \pi$ 区间的是下降的。当 x 从 π 增加到 2π 时, $|\text{Sa}(x)|$ 从 0 增加到一个小于 1 的极大值,然后又下降为 0。当 x 继续增加时,接下来的极大值将继续减小,因为分子不会大于 1 而分母却继续增大。另外, $\text{Sa}(x)$ 具有偶对称性。

现在来计算其线谱。首先考虑 $|c_n|$, 将式(18.36)表示成关于基频 f_0 的函数:

$$|c_n| = \frac{V_0 \tau}{T} \left| \frac{\sin(n\pi f_0 \tau)}{n\pi f_0 \tau} \right| \quad (18.38)$$

将已知值 τ 和 $T = 1/f_0$ 代入式(18.38)中,然后取不同的 n 值,就可以求出 c_n 的幅度, $n = 1, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。这里不使用式(18.38)去求这些离散频点处的值,而是将频率 nf_0 看成连续变量,画出 $|c_n|$ 的包络。换句话说,可以只将 f (实际上是 nf_0) 取为谐波频率 $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0$ 等等,但这时必须将 n 看做是连续变量。当 f 等于 0 时, $|c_n|$ 显然等于 $V_0 \tau / T$, 当 f 增加至 $1/\tau$ 时, $|c_n|$ 为 0。图 18.9(b)中的虚线即为所求的包络,在每个谐波频率上画一条垂直线就可以得到其线谱,如图所示,垂直线的高度即为 c_n 的幅度。该图所画出的是 $\tau/T = 1/(1.5\pi) = 0.212$ 时的曲线。对于本例,在包络值为 0 处恰好没有谐波频率,不过,如果取另外的 τ 和 T 值,则可以得到这样的情况。

图 18.9(c)画出了正弦成分的幅度随频率变化的曲线,再次注意到 $a_0 = c_0$ 以及 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n| + |c_{-n}|$ 。观察图 18.9(c)所示的周期方波序列的线谱,可以得到几个结论。很明显,离散线谱的包络“宽度”与 τ 有关,而与 T 无关。由此可以得出结论,能让这种周期性方波通过的滤波器的带宽是脉冲宽度 τ 的函数,而不是脉冲周期 T 的函数,从图 18.9(c)可以看出,这个带宽约为 $1/\tau$ Hz。脉冲的周期 T 增大(即脉冲的重复频率 f_0 减小),带宽 $1/\tau$ 不变,但频率 0 到频率 $1/\tau$ 之间的谱线的数目增加了,但它还是离散的;每条线谱的幅度与 T 的倒数成正比。最后说一点,改变时间原点的位置不会改变线谱,即 $|c_n|$ 不是 t_0 的函数。当然,所取的 t_0 不同,频率成分的相对相位会不同。

练习

18.7 分别求(a)图 18.4(a)和(b)图 18.4(c)所示波形的复傅里叶系数 c_n 。

答案: n 为奇数时为 $-j2/(n\pi)$, n 为偶数时为 0; 对所有的 n 可统一表示为 $-j[4/(n^2\pi^2)]\sin n\pi/2$ 。

18.6 傅里叶变换的定义

熟悉了周期函数的傅里叶级数表示的基本概念之后,下面来定义傅里叶变换。首先回想

一下上一节中求出的矩形脉冲序列频谱,那是一个离散的频谱,这是所有周期时域函数所具有的性质。频谱为离散是指它不是关于频率光滑的或者说是连续的函数,它只是在某些频率点上具有非零值。

但是,有许多激励函数不是周期时域函数,比如单个矩形脉冲、阶跃函数、斜坡函数以及第 14 章中定义的比较特别的冲激函数等等。可以求出这种非周期函数的频谱,只是它们是连续的,这时,通常在任何非零频率区间内,总是存在一些能量,而不管这个区间有多小。

下面从周期函数开始,然后令周期趋于无穷大来引入傅里叶变换这个概念。根据前面从周期矩形脉冲得到的结果可知,随着周期的增加,频谱包络的幅度将减小,但是形状保持不变,并且在任何给定的频率区间内将会出现更多的频率成分。当周期变为无穷大时,可以想像,包络的幅度将变得几乎为 0,频率成分将变为无穷多,频率之间的间隔将变得趋于 0。比如,频率区间 0 Hz ~ 100 Hz 之间的频率成分变为无穷多,但每个成分的幅度却趋于 0。初看起来,幅度为 0 的频谱的概念非常令人费解。我们知道,周期激励函数的线谱表示每种频率成分的幅度,但是非周期激励函数的零幅度连续谱表示什么含义呢?这个问题留到下一节来回答,现在继续刚才讨论的极限情况。

从指数形式的傅里叶级数开始:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.39)$$

其中:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.40)$$

且

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (18.41)$$

然后令:

$$T \rightarrow \infty$$

根据式(18.41)可知,这时 ω_0 将变得无穷小。将这个极限用微分表示:

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

因此:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad (18.42)$$

“谐波”频率 $n\omega_0$ 则与频率变量相对应,它反映了连续的频谱。换句话说,当 ω_0 趋于 0 时, n 必须趋于无穷,它们的乘积才是有限值:

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \quad (18.43)$$

将这 4 个极限代入式(18.40)中,可以发现 c_n 必然趋于 0,这和原来的设想一致。如果将式(18.40)的两边同时乘以周期 T 然后取极限,则可以得到一个有意义的结果:

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

该式的右边为 ω (不是 t)的函数,用 $F(j\omega)$ 来表示它为:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (18.44)$$

下面来看式(18.39)的极限。将和式乘以 T 并除以 T , 得到:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T}$$

然后将 $c_n T$ 替换为 $\mathbf{F}(j\omega)$, 再利用式(18.42)和式(18.43)。取极限后, 求和变成了积分, 于是得到:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18.45)$$

式(18.44)和式(18.45)合起来称为傅里叶变换对。函数 $\mathbf{F}(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶变换, $f(t)$ 称为 $\mathbf{F}(j\omega)$ 的傅里叶逆变换。

读者可能已经看到, 傅里叶变换和拉普拉斯变换之间存在一些相似性。它们之间主要的不同之处在于, 采用傅里叶变换进行分析不容易将初始存储的能量包含进来, 而采用拉普拉斯变换则很容易; 而且某些时域函数(比如指数增长函数)并不存在傅里叶变换。但是, 如果关心的主要是频率信息而不是瞬态响应, 则使用傅里叶变换更合适。

这个变换关系非常重要! 从此之后要牢记它。为了强调其重要性, 重新在下面将其列出:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (18.46a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \mathbf{F}(j\omega) d\omega \quad (18.46b)$$

这两个公式中, 指数项的指数部分符号相反, 其中, $f(t)$ 的表达式中取正号, 这与式(18.39)中复傅里叶级数的形式一致, 注意到这一点有助于记忆。

这时, 要提出一个问题, 对于式(18.46)的傅里叶变换对, 是否对于任何 $f(t)$, 均可以得到其傅里叶变换呢? 事实上, 对于几乎所有可以实际产生的电压和电流来说, 答案是肯定的。 $\mathbf{F}(j\omega)$ 存在的一个充分条件为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

不过这不是必要条件, 因为有些函数虽然不满足此式, 但同样存在傅里叶变换, 例如阶跃函数就是一个例子。而且可以发现, $f(t)$ 的傅里叶变换存在不一定要要求它是非周期的, 周期时域函数的傅里叶级数表示只是更一般的傅里叶变换表示法的特例。

在前面已经指出, 傅里叶变换对是惟一的。也就是说, 对于给定的函数 $f(t)$, 只存在一个 $\mathbf{F}(j\omega)$; 对于给定的 $\mathbf{F}(j\omega)$, 也只存在一个 $f(t)$ 。

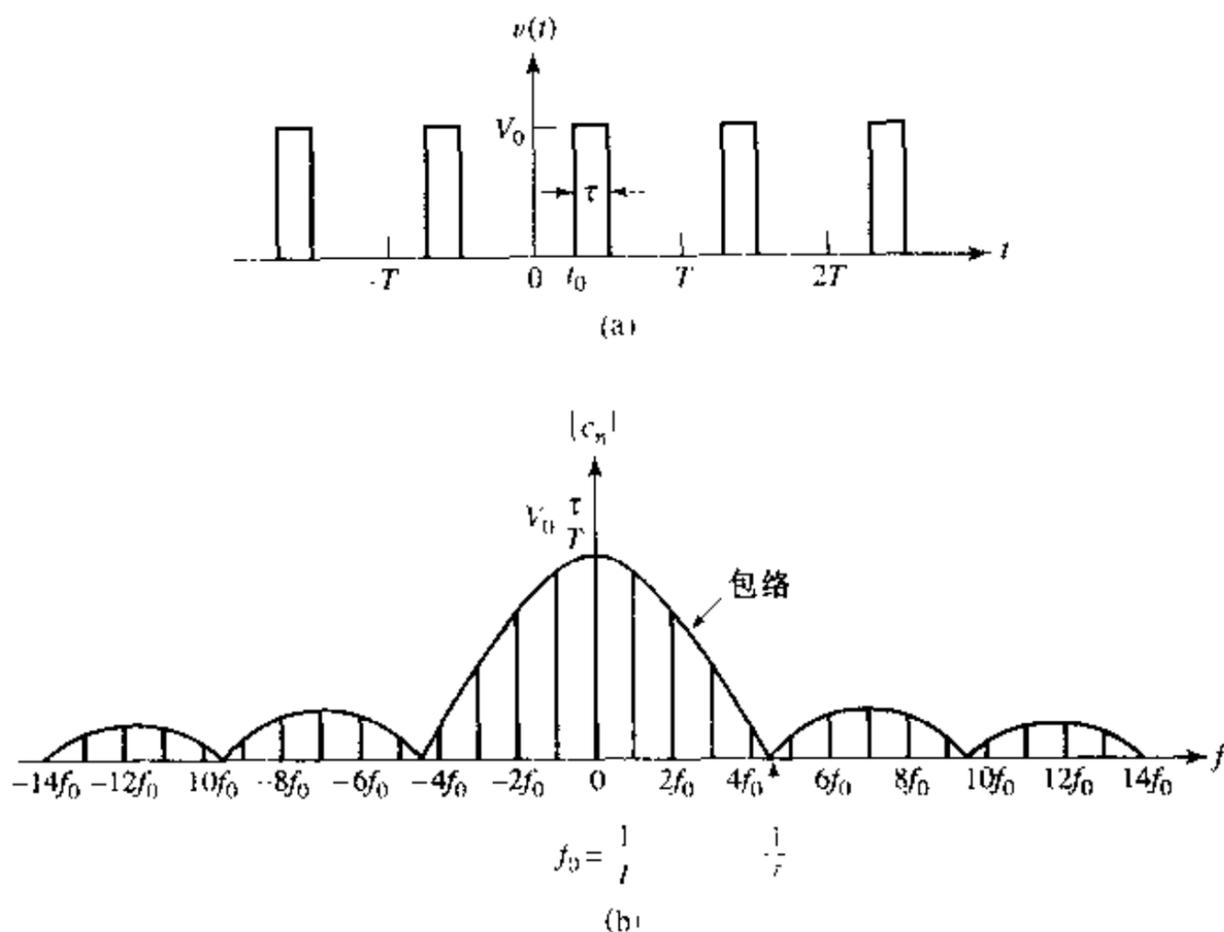
例题 18.5 用傅里叶变换求单个矩形脉冲的连续谱。特别地, 考虑图 18.9(a) [重新在图 18.10(a) 中画出] 所示的脉冲, 假设其持续时间区间为 $t_0 < t < t_0 + \tau$

该脉冲可以表示为:

$$f(t) = \begin{cases} V_0, & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0, & t < t_0 \text{ 和 } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

根据式(18.46a)可以得到 $f(t)$ 的傅里叶变换:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V_0 e^{-j\omega t} dt$$

图 18.10 (a)周期矩形脉冲;(b) $|c_n|$ 对应的离散线谱

容易求出这个积分并将其化简得:

$$F(j\omega) = V_0 \tau \frac{\sin \frac{1}{2} \omega \tau}{\frac{1}{2} \omega \tau} e^{-j\omega(t_0 + \tau/2)}$$

$F(j\omega)$ 的幅度表示连续频谱,它与采样函数的波形一致。其中, $F(0)$ 的值为 $V_0 \tau$ 。频谱的形状与图 18.9(b)所示的包络一致。将 $|F(j\omega)|$ 随 ω 变化的曲线画出来,它并不表示在任何给定频率下的电压幅度。那么它表示什么呢?考察式(18.45)可以发现,如果 $f(t)$ 为电压波形,则 $F(j\omega)$ 的量纲为“伏特每单位频率”,15.2节中出现过这个概念。

练习

- 18.8 如果 $f(t) = -10 \text{ V}$, $-0.2 < t < -0.1 \text{ s}$, $f(t) = 10 \text{ V}$, $0.1 < t < 0.2 \text{ s}$,对任何其他 t , $f(t) = 0$,求当 ω 等于下列值时 $F(j\omega)$ 的值:(a)0;(b) $10\pi \text{ rad/s}$;(c) $-10\pi \text{ rad/s}$;(d) $15\pi \text{ rad/s}$;(e) $-20\pi \text{ rad/s}$ 。
- 18.9 如果 $-4 < \omega < -2 \text{ rad/s}$ 时 $F(j\omega) = -10 \text{ V}/(\text{rad/s})$,当 $2 < \omega < 4 \text{ rad/s}$ 时 $F(j\omega) = +10 \text{ V}/(\text{rad/s})$,当 ω 取其他值时 $F(j\omega)$ 等于0,求 t 等于下列时刻时 $f(t)$ 的值:(a) 10^{-4} s ;(b) 10^{-2} s ;(c) $\pi/4 \text{ s}$;(d) $\pi/2 \text{ s}$;(e) $\pi \text{ s}$ 。

答案:18.8: 0; $j1.273 \text{ V}/(\text{rad/s})$; $-j1.273 \text{ V}/(\text{rad/s})$; $-j0.424 \text{ V}/(\text{rad/s})$; 0。18.9: $j1.9099 \times 10^{-3} \text{ V}$; $j0.1910 \text{ V}$; $j4.05 \text{ V}$; $-j4.05 \text{ V}$; 0

18.7 傅里叶变换的性质

本节的目标是建立傅里叶变换的若干数学性质,并且更加重要的是理解它们的物理含义。

首先用欧拉公式替换式(18.46a)中的 $e^{-j\omega t}$, 得到:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (18.47)$$

因为 $f(t)$, $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 均为时域函数, 所以式(18.47)中的积分均为关于 ω 的实函数。因此, 令:

$$\mathbf{F}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (18.48)$$

可以得到:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (18.49)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (18.50)$$

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (18.51)$$

以及:

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (18.52)$$

用 $-\omega$ 替换 ω 可以发现 $A(\omega)$ 和 $|\mathbf{F}(j\omega)|$ 均为关于 ω 的偶函数, 而 $B(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 均为关于 ω 的奇函数。

如果 $f(t)$ 为关于 t 的偶函数, 则式(18.50)的被积函数为奇函数, 由于积分区间具有对称性, 所以 $B(\omega)$ 为 0。因此, 如果 $f(t)$ 为偶函数, 则其傅里叶变换 $\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 的偶对称实函数。这时, 对所有 ω , 相位函数 $\phi(\omega)$ 为 0 或 π 。如果 $f(t)$ 为关于 t 奇函数, 则 $A(\omega) = 0$, $\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 的奇对称纯虚函数, $\phi(\omega)$ 为 $\pm \pi/2$ 。一般情况下, $\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 的复函数。

最后, 注意到, 将式(18.47)中的 ω 替换为 $-\omega$, 得到 $\mathbf{F}(j\omega)$ 的共轭, 即:

$$\mathbf{F}(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = \mathbf{F}^*(j\omega)$$

因此, 有:

$$\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega) = \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|^2$$

18.7.1 傅里叶变换的物理意义

知道了傅里叶变换的这些基本关系后, 现在来考虑其物理意义。假定 $f(t)$ 为 1Ω 电阻上的电压或者流过 1Ω 电阻的电流, 因此, $f^2(t)$ 为 $f(t)$ 提供给此 1Ω 电阻的功率。将此功率对时间积分, 可以求得 $f(t)$ 提供给此 1Ω 电阻的总能量:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (18.53)$$

下面使用一点技巧对这个积分进行变换。考虑式(18.53)中的被积函数, 即 $f(t)$ 乘以它自身, 将其中一个 $f(t)$ 用式(18.46b)进行替换, 得:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \mathbf{F}(j\omega) d\omega \right] dt$$

因为 $f(t)$ 不是关于积分变量 ω 的函数, 因此, 可以将它放到括号内的积分里面, 然后交换积分顺序:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega t} f(t) dt \right] d\omega$$

再将 $\mathbf{F}(j\omega)$ 从内层积分中提出来, 这时, 内层积分变为 $\mathbf{F}(-j\omega)$:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) \mathbf{F}(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(j\omega)|^2 d\omega$$

综合这些结果, 得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(j\omega)|^2 d\omega \quad (18.54)$$

式(18.54)非常有用, 它称为 Parseval 定理。该定理以及式(18.53)告诉我们可以通过在时域中积分求得能量, 也可以通过在整个频域中积分然后乘以 $1/(2\pi)$ 求得能量。

Parseval 定理使我们能更加深入地理解傅里叶变换的意义。考虑电压 $v(t)$, 其傅里叶变换为 $\mathbf{F}_v(j\omega)$, 该电压在一个 1Ω 电阻上提供的能量 $W_{1\Omega}$ 为:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2 d\omega$$

上式右边那个等号成立是因为 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 为关于 ω 的偶对称函数。又因为 $\omega = 2\pi f$, 因此:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2 df \quad (18.55)$$

图 18.11 画出了 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 随着 ω 和 f 变化的一个典型的曲线。如果用非常小的区间 df 对频率区间进行分割, 那么根据式(18.55)可得, $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 曲线下方宽度为 df 的小块面积为 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2 df$, 如图中阴影部分所示。所有这些面积的和(f 从负无穷到正无穷变化), 等于 $v(t)$ 给 1Ω 电阻提供的总能量。因此, 称 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 为单位电阻能量密度或称为 $v(t)$ 的单位带宽能量(J/Hz), 而且此能量密度函数总是关于 ω 的偶对称非负实函数。在取定的频率区间对 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 进行积分, 可以计算出该频率区间的能量。注意, 能量密度与 $\mathbf{F}_v(j\omega)$ 的相位无关, 因此有无穷多个时域函数及傅里叶变换具有相同的能量密度函数。

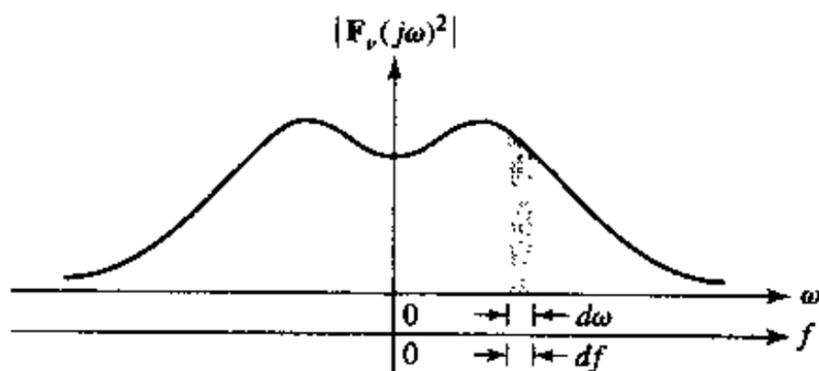


图 18.11 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 下方的条形区域面积表示 $v(t)$ 在带宽 df 内的单位电阻能量

例题 18.6 将单边[即 $t < 0$ 时 $v(t) = 0$]指数脉冲:

$$v(t) = 4e^{-3t}u(t)$$

接到理想带通滤波器的输入端, 如果该滤波器的通带为 $1 < |f| < 2$ Hz, 计算滤波器输出的总能量

令输出电压为 $v_o(t)$, 则 $v_o(t)$ 的能量等于 $v(t)$ 在频率区间 $1 < f < 2$ 和 $-2 < f < -1$ 上的能量。首先来求 $v(t)$ 的傅里叶变换: