

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(xu/M + vy/N)} \quad (4.2.16)$$

像在一维中的情形一样,此表达式必须对 u 值 ($u = 0, 1, 2, \dots, M-1$) 和 v 值 ($v = 0, 1, 2, \dots, N-1$) 计算。同样,给出 $F(u, v)$, 可以通过反傅里叶变换获得 $f(x, y)$, 由表达式给出:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(xu/M + vy/N)} \quad (4.2.17)$$

其中, $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。式(4.2.16)和式(4.2.17)构成了二维离散傅里叶变换对(DFT)。变量 u 和 v 是变换或频率变量, x 和 y 是空间或图像变量。正如在一维中的情形那样,常量 $1/MN$ 的位置并不重要,有时它在反变换之前。其他时候,它被分为两个相等的常数 $1/\sqrt{MN}$, 分别乘在变换和反变换的式子前。

像在前一节中一样定义傅里叶谱、相角和频率谱:

$$|F(u, v)| = [R^2(x, y) + I^2(x, y)]^{1/2} \quad (4.2.18)$$

$$\phi(u, v) = \arctan\left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right] \quad (4.2.19)$$

并且

$$\begin{aligned} P(u, v) &= |F(u, v)|^2 \\ &= R^2(u, v) + I^2(u, v) \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

其中, $R(u, v)$ 和 $I(u, v)$ 分别是 $F(u, v)$ 的实部和虚部。

通常在进行傅里叶变换之前用 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入的图像函数。由于指数的性质,很容易看出(参见 4.6 节):

$$\mathfrak{F}[f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - M/2, v - N/2) \quad (4.2.21)$$

其中 $\mathfrak{F}[\cdot]$ 表示引文中的傅里叶变换。这个等式说明 $f(x, y)(-1)^{x+y}$ 傅里叶变换的原点[即 $F(0, 0)$]被设置在 $u = M/2$ 和 $v = N/2$ 上。换句话说,用 $(-1)^{x+y}$ 乘以 $f(x, y)$ 将 $F(u, v)$ 原点变换到频率坐标下的 $(M/2, N/2)$, 它是二维 DFT 设置的 $M \times N$ 区域的中心。我们将此频率域的范围指定为频率矩形, 它从 $u = 0$ 到 $u = M-1$, 从 $v = 0$ 到 $v = N-1$ (u 和 v 是整数)。为了确保移动后的坐标为整数, 要求 M 和 N 为偶数。当在计算机中使用傅里叶变换时, 总和的范围为 u 从 1 到 M , v 从 1 到 N 。实际的变换中心将为 $u = (M/2) + 1$ 和 $v = (N/2) + 1$ 。

从式(4.2.16)得到 $(u, v) = (0, 0)$ 的变换值为:

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (4.2.22)$$

即 $f(x, y)$ 的平均值。换句话说, 如果 $f(x, y)$ 是一幅图像, 在原点的傅里叶变换即等于图像的平均灰度级。因为在原点处常常为零, $F(0, 0)$ 有时称做频率谱的直流成分。这个术语来自电子工程领域, 其中“dc”表示直流(即, 零频率的电流)。

如果 $f(x, y)$ 是实函数, 它的傅里叶变换必然为对称的, 即:

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (4.2.23)$$

其中“*”表示对于复数的标准共轭操作。由此, 它遵循:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (4.2.24)$$

其中, 傅里叶变换的频率谱为对称的。共轭对称和前面讨论的中心对称的性质简化了频率域

内循环对称滤波器的技术条件,此内容将在下面的部分中讨论。

最后,如在一维中的情况,空间域和频率域抽样点之间的关系如下所示:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad (4.2.25)$$

并且

$$\Delta v = \frac{1}{N\Delta y} \quad (4.2.26)$$

这些变量的意义解释与4.2.1节中给出的一维变量相同。

例 4.2 一个简单二维函数的中心谱

图4.3(a)显示了在 512×512 像素尺寸的背景上叠加一个 20×40 像素尺寸的白色矩形。此图像在进行傅里叶变换的计算之前被乘以 $(-1)^{x+y}$,从而可以使频率谱关于中心对称,如图4.3(b)所示(注意两张图的位置、标志和轴的原点。在图像和相关的傅里叶谱中的讨论都遵循此约定)。在图4.3(b)中, u 方向谱的零点分隔恰好是 v 方向零点分隔的两倍。这却相反地符合图像中1:2的矩形尺寸比例。在显示之前频率谱用式(3.2.2)中的对数变换处理以增强灰度级细节。变换中使用 $c=0.5$ 的值可以降低整体强度。在本章中显示的大多数傅里叶频率谱都用对数变换进行了相似的处理。

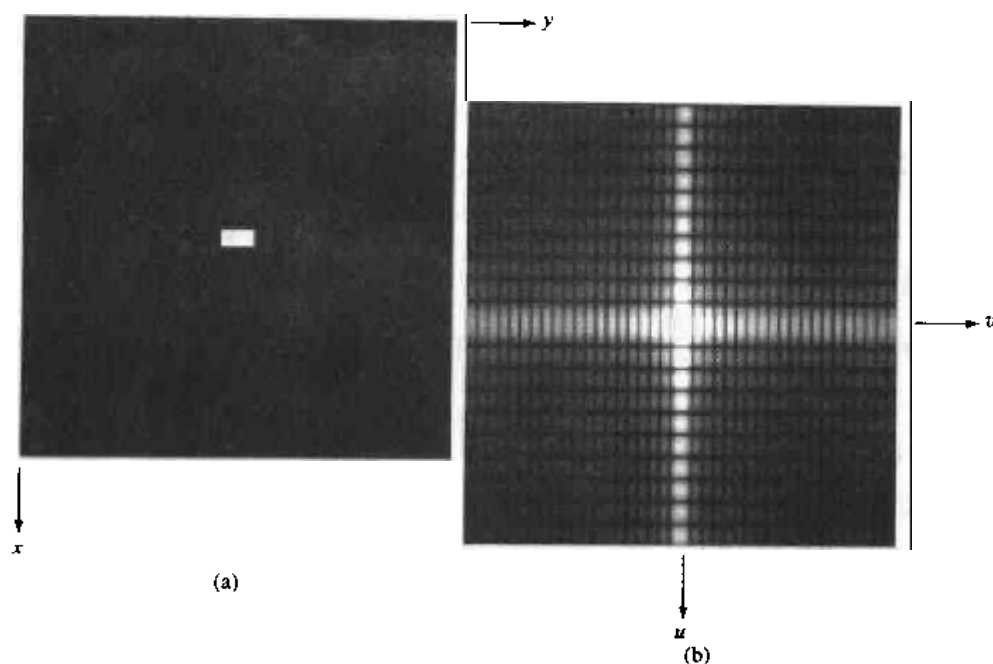


图4.3 (a)在大小为 512×512 的黑色背景上叠加一个尺寸为 20×40 的白色矩形的图像,
(b)与图4.2相比,应用了式(3.2.2)中给出的对数变换后显示的中心傅里叶谱

4.2.3 频率域滤波

在前两节中,频率域仅是由傅里叶变换和频率变量 (u, v) 定义的空间。此节中,将联系图像处理揭示频率域的深刻含义。

频率域的基本性质

从观察式(4.2.16)开始,每个 $F(u, v)$ 项包含了被指数项修正的 $f(x, y)$ 的所有值。因此,除了特殊情况,一般不可能建立图像特定分量和其变换之间的直接联系。然而,一般文献通常会有关于傅里叶变换的频率分量和图像空间特征之间联系的阐述。例如,既然频率与变化率直接相关,直观上要将傅里叶变换的频率与图像中的强度变化模式联系起来并不困难。在前面的章节中显示了变化最慢的频率成分($u = v = 0$)对应一幅图像的平均灰度级。当从变换的原点移开时,低频对应着图像的慢变化分量,例如,一幅房间的图像,墙和地板可能对应平滑的灰度分量,当我们进一步移开原点时,较高的频率开始对应图像中变化越来越快的灰度级。这些是物体的边缘和由灰度级的突发改变(如噪声)标志的图像成分。

例 4.3 一幅图像及显示某些重要特征的傅里叶谱

一个例证将有助于确定这些想法。图 4.4(a) 中所示图像是一幅集成电路的扫描电子显微镜图像,放大将近 2500 倍。除了设备本身有趣的结构外,还注意到两个主要的特征:大约成 $\pm 45^\circ$ 的强边缘和两个因热感应不足而产生的白色氧化突起。图 4.4(b) 所示的傅里叶频谱显示了沿着 $\pm 45^\circ$ 方向对应于刚刚提及的边缘突起的部分。沿着垂直轴仔细观察,可以看到在轴偏左的部分有垂直成分。这是由氧化突起的边缘形成的。注意在偏离轴的角度,频率成分如何对应长的白色元素的水平位移,并且注意在垂直频率成分中的零点如何对应氧化突起的狭窄垂直区域。

这是典型的建立频率和空间域联系例子。正如在本章所示的,即使是这些总体的联系类型,以及前面提到的频率与图像灰度级变化率之间的联系,也可以产生非常有用的增强结果。

在频率域中的滤波基础

在频率域中的滤波是简单明了的。它包含如下步骤:

1. 用 $(-1)^{u+v}$ 乘以输入图像来进行中心变换,如式(4.2.21)所示。
2. 由(1)计算图像的 DFT,即 $F(u, v)$ 。
3. 用滤波器函数 $H(u, v)$ 乘以 $F(u, v)$ 。
4. 计算(3)中结果的反 DFT。
5. 得到(4)中结果的实部。
6. 用 $(-1)^{u+v}$ 乘以(5)中的结果。

$H(u, v)$ 被称为滤波器(常用术语为“滤波器传递函数”)的原因是它在变换中抑制某些频率但其他频率不受影响。类似于日常生活中的筛子,它可以严格按照尺寸使一些物体通过而同时阻止其他物体。

在等式的形式下,用 $f(x, y)$ 代表步骤(1)中的输入图像,而用 $F(u, v)$ 表示它的傅里叶变换。如下给出其输出图像的傅里叶变换:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (4.2.27)$$

H 和 F 的相乘涉及二维函数,并在逐元素的基础上定义。即, H 的第一个元素乘以 F 的第一个元素, H 的第二个元素乘以 F 的第二个元素,以此类推。总之, F 中的元素为复数,但我们

在本书中处理的典型滤波器为实数。在这种情况下, H 的每一个分量乘以 F 中相应部分的实部和虚部。这种滤波器称为“零相移”滤波器。正如名字中提示的, 这些滤波器不改变变换的相位, 从式(4.2.19)可以看出因为值相等, 所以实部和虚部的乘数可以抵消。

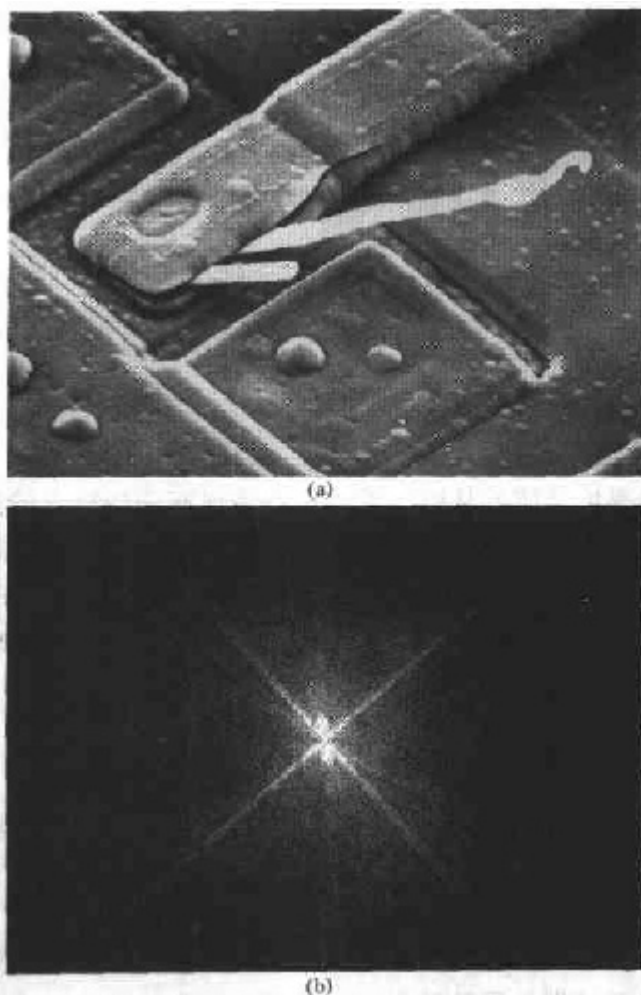


图 4.4 (a) 受损的集成电路 SEM 图像, (b) (a) 的傅里叶谱
(原图像由加拿大安大略省哈密尔顿市 McMaster 大学材料研究所的 J.M. Hudak 博士提供)

被滤波的图像可以从 $G(u, v)$ 的反傅里叶变换中得到:

$$\text{被滤波的图像} = \mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)] \quad (4.2.28)$$

最终的图像通过取结果的实部并且乘以 $(-1)^{u+v}$ 以取消输入图像的乘数来获得。总体来说, 反傅里叶变换较复杂。然而, 当输入图像和滤波器函数都为实函数时, 反傅里叶变换的虚部即为 0。实际上, 由于计算的舍入误差, 反 DFT 一般有寄生的虚部成分, 这些成分可以忽略。

包括前处理和后处理的更普遍形式的滤波过程框图总结在图 4.5 中。除了 $(-1)^{u+v}$ 过程之外, 其他过程的例子可能包括将输入图像向其最接近的偶数维数转换(要求有合适的变换中心)、灰度级标定、输入向浮点的转换、输出向 8 比特整数格式转换等。多滤波步骤和其他前后处理函数都是有可能的。在这个基本主题上会有许多变化。需要记住的关键点是, 滤波过程通过滤波器函数以某种方式来修改图像变换, 然后通过取结果的反变换来获得处理后的输出图像。

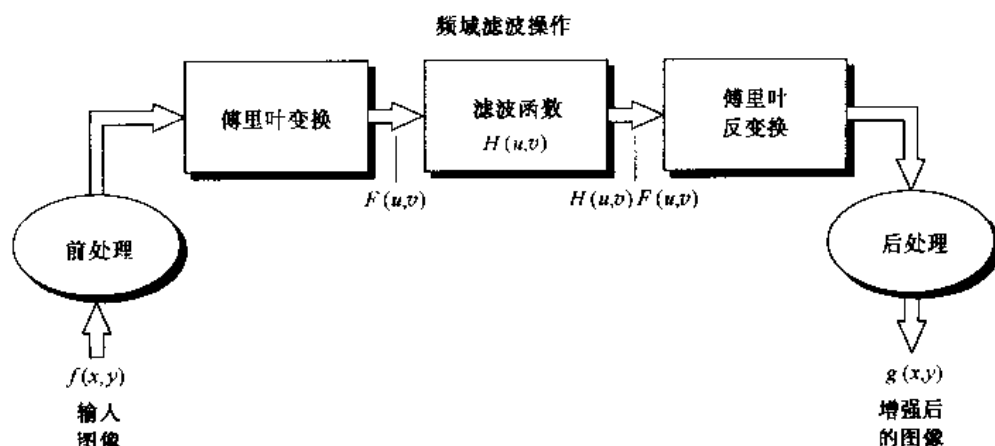


图 4.5 频域滤波的基本步骤

一些基本的滤波器及其性质

目前已经建立了频率域滤波的基础。下一步就是观察一些特殊的滤波器,看它们是如何作用于图像的。前面式(4.2.22)的讨论很好地把我们引入到了滤波的实例。假定希望图像的平均值为零。根据式(4.2.22),图像的平均值由 $F(0,0)$ 给出。如果在频率域中设置此项为零,并进行反变换,那么结果图像的平均值将为零。假定变换如式(4.2.21)中所讨论的那样集中在中心,则可以用滤波函数乘以 $F(u,v)$ 的所有值来完成此操作。

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & (u,v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (4.2.29)$$

此滤波器可以设置 $F(0,0)$ 为零(正如所希望的那样),而保留其他傅里叶变换的频率成分不变。处理后的图像(具有0平均值)可以通过对 $H(u,v)F(u,v)$ 进行傅里叶反变换来获得,如式(4.2.28)所示。如前所述, $F(u,v)$ 的实部和虚部都乘以滤波函数 $H(u,v)$ 。

刚刚讨论的滤波器称为“陷波滤波器”,因为它除了原点处有凹陷外其他均是常量函数。图 4.4(a)中的图像经此滤波器处理的结果显示在图 4.6 中。注意,由于使平均值设置为 0 而产生整体平均灰度级的降低;同时还要注意产生边缘突出的伴随结果[实际中,所显示的图像平均值不能为零,因为如果其平均灰度级为零,图像必为负值,而显示无法处理负值。图 4.6 是用“标准”方式显示的,将所有负值当做 0 显示(即黑色),而其他值在此基础上按比例增加]。如 5.4.3 节所示,当可以识别由特定的、局部化频域成分引起的空间图像效果时,陷波滤波器是一个非常有用的工具。

在傅里叶变换中,低频主要决定图像在平滑区域中总体灰度级的显示,而高频决定图像细节部分,如边缘和噪声。这些思想将在下一节中详细讨论,但用其他两类滤波器的例子有益于补充对陷波滤波器的说明。使低频通过而使高频衰减的滤波器称为“低通滤波器”。具有相反特性的滤波器称为“高通滤波器”。可以预料,被低通滤波的图像比原始图像少一些尖锐的细节部分,因为高频部分已被衰减。同样,被高通滤波的图像在平滑区域中将减少一些灰度级的变化并突出过渡(如边缘)灰度级的细节部分。这样的图像将更为锐化。

图 4.7 说明了低通和高通滤波对图 4.4(a)中图像的影响。图的左侧部分显示了滤波器,右侧部分显示了使用图 4.5 总结出的过程进行滤波的结果。而滤波函数 $H(u,v)$ 是周期对称

的。在将原点移至由 $F(u, v)$ 设置的矩形区域中心后,它们乘以中心变换,正如式(4.2.27),式(4.2.28)和图 4.5 指出的那样。取每个结果的实部,然后乘以 $(-1)^{u+v}$ 以得到图 4.7 右侧部分所显示的图像。正如所料,图 4.7(b)中的图像被模糊了,而在图 4.7(d)中的图像是锐化的,因为 $F(0,0)$ 已被设置为 0,所以几乎没有平滑的灰度级细节。这是高通滤波的典型结果,接下来的过程通常在滤波器中加入常量,以使 $F(0,0)$ 不被完全消除。使用此过程的结果如图 4.8 所示。它对图 4.7 的改进很明显。

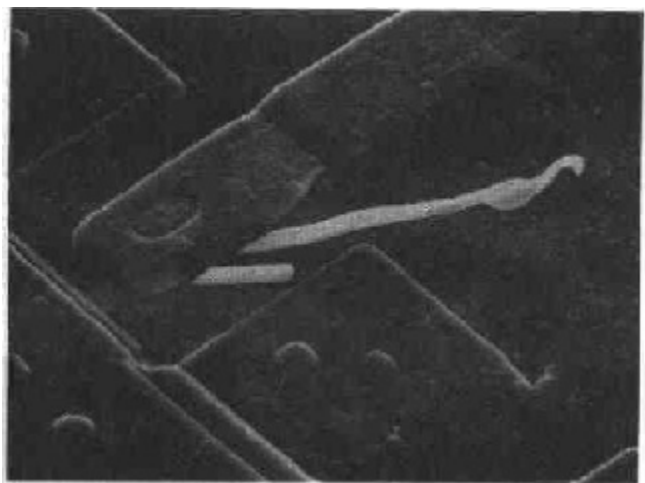


图 4.6 图 4.4(a)中的图像经陷波滤波器处理后的结果,在傅里叶变换中,陷波滤波器将原点设置为 0

4.2.4 空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

在前一章中通过观察和(或)使用数学公式得到了不同的空间滤波器形式,如拉普拉斯算子。在本节中,将建立空间域中的一些滤波器和其频率域对应项之间的直接联系。

空间域和频率域之间最基本的联系是由卷积定理的著名结论建立的。读者已在空间域熟悉了卷积的基本概念和机理(在 3.5 节中已说明过)。将图像的模板在图像中逐像素移动,并对每个像素进行指定数量的计算的过程就是卷积过程。形式上,大小为 $M \times N$ 的两个函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的离散卷积表示为 $f(x, y) * h(x, y)$,并定义如下:

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n) \quad (4.2.30)$$

除了前面的常数、负号以及求和的上下限之外,这个表达式与式(3.5.1)相似。特别是负号只说明函数 h 关于原点镜像对称。这是卷积定义中自带的。式(4.2.30)只不过是一种实现:(1)关于原点翻转函数;(2)通过改变 (x, y) 的值相对于一个函数移动另外一个函数;(3)对每一个 (x, y) 的位移值,计算所有 m 和 n 值乘积的和。 (x, y) 位移是以整数增加的,当函数不再重叠时停止。

用 $F(u, v)$ 和 $H(u, v)$ 分别表示 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的傅里叶变换,卷积定理的一部分只说明 $f(x, y) * h(x, y)$ 和 $F(u, v)H(u, v)$ 组成傅里叶变换对。形式上表示如下:

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v) \quad (4.2.31)$$

双箭头表示左边的表达式(空间域卷积)可以通过对右边表达式[在频率域的 $F(u, v)H(u, v)$ 的乘积]进行反傅里叶变换获得。相反,右边表达式可以通过对左边表达式进行正向傅里叶变换获得。类似的结果是频率域的卷积被简化为空间域的乘法,反之亦然;即:

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v) \quad (4.2.32)$$

这两个结论构成卷积定理。如上所述的定理并没有复杂之处,卷积操作过程就是如此。处理过程的其他部分仅为两个函数逐元素相乘的乘法。

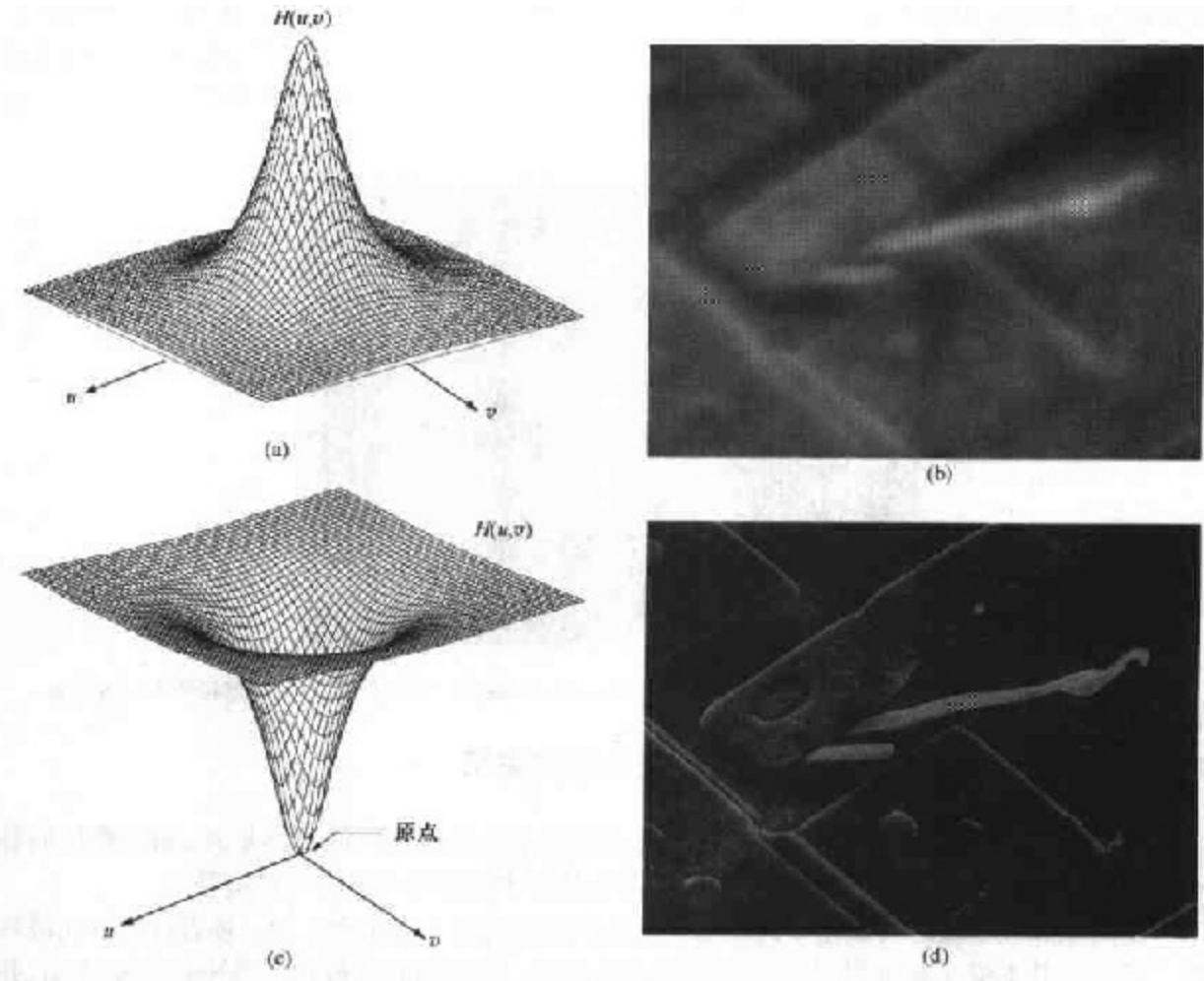


图 4.7 (a)一个二维低通滤波函数,(b)图 4.4 中图像经低通滤波的结果,
(c)二维高通滤波函数,(d)图 4.4 中图像经高通滤波的结果

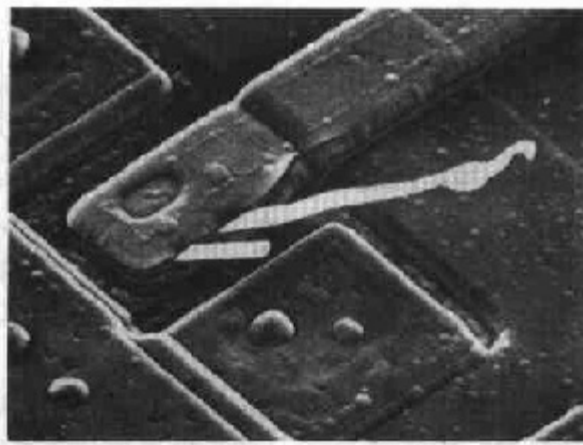


图 4.8 用图 4.7(c)中的滤波器对图 4.4(a)中的图像进行高通滤波的结果,该滤波器通过对滤波函数加上一个滤波器高度一半的常数加以改进

在实现空间域和频率域之间的联系前,还需要一个概念。在 (x_0, y_0) 坐标处强度为 A 的冲激函数表示为 $A\delta(x - x_0, y - y_0)$,并定义如下:

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) A\delta(x - x_0, y - y_0) = As(x_0, y_0) \quad (4.2.33)$$

总之,这个等式表明乘以一个冲激的函数 $s(x, y)$ 的和等于冲激函数在此位置的值再乘以冲激强度 A 。函数的范围限制即为求和的上下限。将 $A\delta(x - x_0, y - y_0)$ 指定为一幅尺寸为 $M \times N$ 的图像。它只在 (x_0, y_0) 处有为 A 的图像值,其他处的值全为零。

通过设式(4.2.30)中的 f 或 h 为冲激函数,并使用式(4.2.33)中的定义稍加处理就可以得出带冲激函数的卷积“复制”了在冲激位置上此函数的值。此特性称为卷积函数的“筛选”特性。此时,特别重要的是在单位冲激情况,用 $\delta(x, y)$ 表示。这里,

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) \delta(x, y) = s(0, 0) \quad (4.2.34)$$

利用这个简单的工具,现在可以在空间域和频率域滤波之间建立更为有趣和有用的联系了。根据式(4.2.16),可以计算原点处单位冲激的傅里叶变换:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \delta(x, y) e^{-j2\pi(xu/M + yv/N)} \\ &= \frac{1}{MN} \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

其中,第二步根据式(4.2.34)而来。由此,可以得出空间域原点处的冲激函数的傅里叶变换是实常量(这意味着相角为0)。如果冲激任意放置,变换会含有更为复杂的成分。它们的幅度应该相同,但在变换后出现的非零相角会引起脉冲平移。

现在假设 $f(x, y) = \delta(x, y)$,同时执行式(4.2.30)中定义的卷积,再次使用式(4.2.34)得到:

$$\begin{aligned} f(x, y) * h(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m, n) h(x - m, y - n) \\ &= \frac{1}{MN} h(x, y) \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

其中,注意在求和时的变量为 m 和 n ,最后一步由式(4.2.34)而来。将式(4.2.35)、式(4.2.36)和式(4.2.31)合并,得到:

$$\begin{aligned} f(x, y) * h(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v)H(u, v) \\ \delta(x, y) * h(x, y) &\Leftrightarrow \mathcal{F}[\delta(x, y)]H(u, v) \\ h(x, y) &\Leftrightarrow H(u, v) \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

仅使用冲激函数和卷积定理的性质,确定了在空间域和频率域中的滤波器组成了傅里叶变换对。因此,给出在频率域的滤波器,可以通过将前者进行反傅里叶变换而得到在空间域相应的滤波器,反之亦然。

注意,前述的所有函数均为相同的尺寸 $M \times N$ 。因此,在实际中,指定一个频率域的滤波器,然后进行反变换以计算相同尺寸的空间域的相应滤波器,但这种方法从计算的角度来看并不能解决太大问题。如4.6节讨论的,如果两个滤波器是相同尺寸,那么通常在频率

域进行滤波计算更为有效。但是,在空间域更适用于更小的滤波器。这正是我们所感兴趣的联系。滤波在频率域中更为直观,但在空间域使用更小的滤波器模板更为明智。式(4.2.37)告诉我们,可以在频率域指定滤波器,做反变换,然后在空间域使用结果滤波器作为在空间域构建更小空间滤波模板的指导(更为正式的方法在4.6.7节中论)。这些在以下例证加以说明。记住,在以下的讨论中傅里叶变换和反变换都是线性过程(习题4.2),所以讨论仅限在线性滤波中。

基于高斯函数的滤波有特殊的重要性,因为它们的形状易于确定,而且高斯函数的傅里叶变换和反变换均为实高斯函数。在此将讨论限制在一个变量的范围以简化符号表示。二维函数将在本章的后面讨论。

用 $H(u)$ 表示频率域,高斯滤波器函数由如下等式给出:

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2} \quad (4.2.38)$$

其中, σ 为高斯曲线的标准差。可以看出相关的空间域滤波器为(习题4.4):

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2x^2/\sigma^2} \quad (4.2.39)$$

这两个等式表示了一个重要结论,原因有二:(1)它们组成了傅里叶变换对,成分均为实高斯函数,这非常有助于分析,因为我们不必处理复数量,除此之外,高斯曲线直观且易于操作;(2)这些函数有相互之间的作用,换句话说,当 $H(u)$ 有很宽的轮廓时(大的 σ 值), $h(x)$ 有很窄的轮廓,反之亦然。事实上,当 σ 接近无限时, $H(u)$ 趋于常量函数,而 $h(x)$ 趋于冲激函数。这正是 4.2 节图 4.2 和图 4.3 中看到的相互作用类型的特性。这两个特性有助于理解空间域和频率域之间的滤波性质,因为它们有相似的分析解释。

高斯滤波器在频率域的曲线如图 4.9(a)所示。读者可以识别出 $H(u)$ 的形状为低通滤波器。相应的空间域低通滤波器如图 4.9(c)所示。我们的兴趣在于 $h(x)$ 的一般形状,通常希望作为指导来确定空间域中较小滤波器的系数。两个滤波器的相似之处在于两个域中的值均为正。因此得出结论,在空间域通过使用带正系数的模板可以实现低通滤波,做法如 3.6.1 节所示。该节中的两种模板作为参考如图 4.9(c)所示。另一个重要特性是在前一段中讨论的相互之间的关系。频率域滤波器越窄,滤除的低频成分就越多,使得图像就越模糊。在空间域,这意味着滤波器就越宽,模板就越大,如例 3.9 所示。

更复杂的滤波器可以由式(4.2.38)的基本高斯函数构造出来。例如,可以构造一个不同的高斯高通滤波器,如下所示:

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad (4.2.40)$$

其中, $A \geq B$, 并且 $\sigma_1 > \sigma_2$ 。在空间域的相应滤波器为:

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 Ae^{-2x^2/\sigma_1^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 Be^{-2x^2/\sigma_2^2} \quad (4.2.41)$$

这两个函数的曲线分别示于图 4.9(b)和(d)中。还要注意宽度上的相互关系,但其中最重要的特性是空间域滤波器有正值和负值。事实上,应特别注意一旦值变为负数,就再也不会变为正数。在第 3 章中高通滤波使用的两个模板如图 4.9(d)所示。空间曲线和滤波器之间形式上的相似很明显。

在第 3 章中,我们指出低通和高通滤波器的形状严格基于空间域的考虑。通过在频率域的分析已得出所有小的空间域滤波器模板的基本形状,如图 4.9 所示。虽然付出了巨大的努

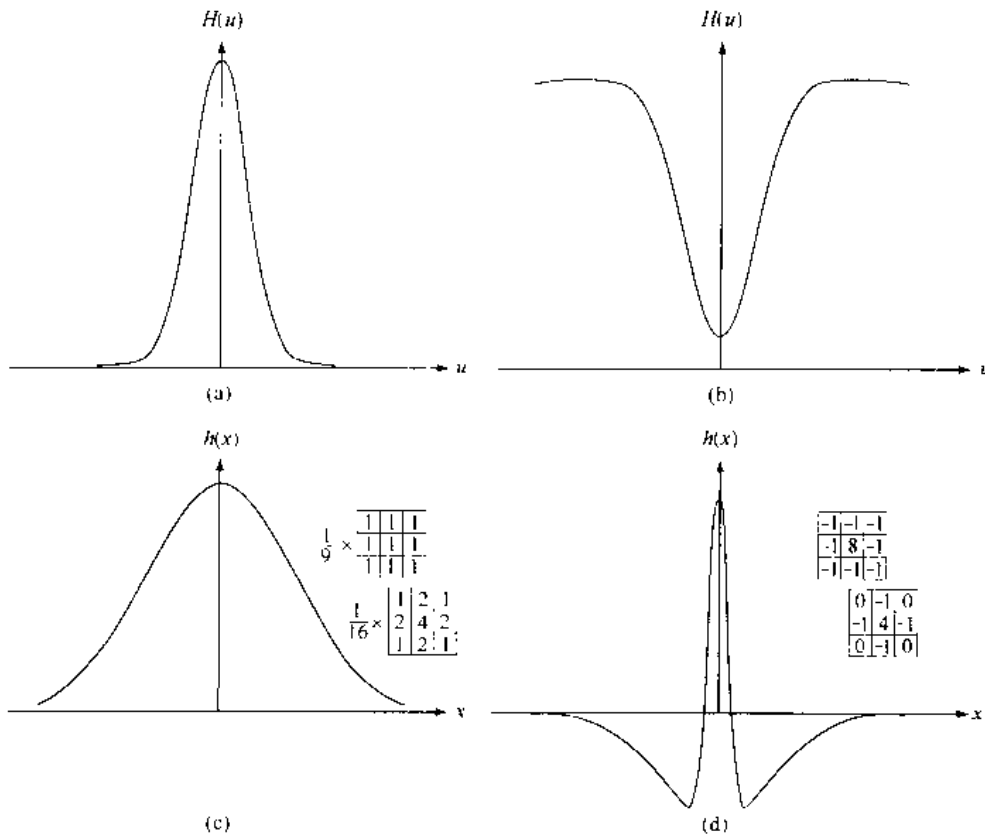


图 4.9 (a)频率域高低通滤波器,(b)频率域高高通滤波器,(c)相应的空间低通滤波器,(d)相应的空间高通滤波器.所示的模板是第3章中低通和高通滤波器采用的

力才得到此结论,但如果没有已建立的基础要真正理解频率域滤波是很困难的。

在频率域技术的发展过程中,总会出现的问题是计算的复杂性。为什么在频率域中的内容(至少是部分的)在空间域使用小的空间模板?基本的回答是双方面的。首先,正如我们看到的,频率域在很大程度上凭直观指定滤波器。另一方面取决于空间模板的大小,通常根据可比较的方法来决定。

通常基于此目的所使用的基准是空间域和频率域中应用的卷积。空间域的卷积在式(4.2.30)中给出,而且从卷积定理得出:通过两个函数变换结果在频率域的反变换可以得到相同的结论。假定在同一台微机上用软件实现这两种方法[用在4.6.6节讨论的快速傅里叶变换(FFT)算法进行频率域的计算]。会发现在频率域因为 M 和 N 的值较小所以执行速度非常快。例如,Brigham [1988]的比较显示,对于一维情况,如果点数大于 32,则 FFT 的方法会更快。虽然这个数字部分决定于其他因素,如所使用的机器和算法,但它通常低于在图像处理中遇到的值。

频率域可以看成是一个“实验室”,可以从中利用频率成分和图像外表之间的对应关系。如在本章后面多次证明的,一些在空间域直接表述非常困难的、甚至是不可能的增强任务在频率域中变得非常普通。一旦通过频率域实验选择了空间滤波,通常实际实施都在空间域进行。一种方法是指定小的空间模板以试图捕捉空间域内完整滤波器函数的“本质”,如图 4.9 中所解释的那样。更为普通的方法是利用基于数学和统计准则的近似设计一个二维数字滤波器。