第 3 章　现代谱估计

利用给定的一组样本数据估计一个平稳随机信号的功率谱密度称为功率谱估计。在许多工程应用中，功率谱的分析与估计是十分重要的，因为它能给出被分析对象的能量随频率的分布情况。例如，在雷达信号处理中，由回波信号的功率谱密度、谱峰的宽度、高度和位置，可以确定运动目标的位置、辐射强度和运动速度。在被动式声纳信号处理中，谱峰的位置可给出鱼雷的方向（方位角）。在生物医学工程中，功率谱密度的峰形和波形显示类癫痫病发作的周期。在目标识别中，功率谱可作为目标的特征之一。

估计功率谱密度的平滑周期图是一种计算简单的经典方法。它的主要特点是与任何模型参数无关，是一类非参数化方法。它的主要问题是：由于假定信号的自相关函数在数据观测区以外等于零，因此估计出来的功率谱很难与信号的真实功率谱相匹配。在一般情况下，周期图的渐近性能无法给出实际功率谱的一个满意的近似，因而是一种低分辨率的谱估计方法。

与周期图方法不同，另外一类功率谱估计方法使用参数化的模型，它们统称为参数化功率谱估计。由于这类方法能够给出比周期图方法高得多的频率分辨率，故又称为高分辨率方法或现代谱估计方法。

在阵列信号处理中，使用广义的功率谱，它描述的是信号功率随空间角度而非频率的分布情况，因而常称其为空间功率谱。我们把它的估计也纳入现代谱估计的范畴。

本章将介绍功率谱和空间功率谱的各种现代谱估计方法，它们构成了现代信号处理中一个极其重要的领域，是许多信号处理技术（如雷达信号处理、通信信号处理、声纳信号处理、地震信号处理和生物医学信号处理等）的共同基础。

3.1　离散随机过程与非参数化谱估计

在数字信号处理中，一个连续时间的随机过程必须先进行采样，变成离散序列后再进行有关处理。这就需要将连续随机过程的概念推广为离散形式。这一处理包

括：从连续函数变化为离散序列，从模拟系统变化为离散系统，从 Fourier 积分变化为 Fourier 级数。

3.1.1 离散随机过程

一离散过程 $x(n)$ 就是一实或复数随机变量的序列，它对每个整数 n 定义。令采样时间间隔为 T，为方便计，$x(nT)$ 常简记为 $x(n)$。离散过程 $x(n)$ 的均值 $\mu_x(n)$、自相关函数 $R_{xx}(n_1,n_2)$ 和自协方差函数 $C_{xx}(n_1,n_2)$ 定义为

$$R_{xx}(n_1,n_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{x(n_1)x^*(n_2)\} \tag{3.1.1}$$

和

$$\begin{aligned} C_{xx}(n_1,n_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{[x(n_1)-\mu_x(n_1)][x(n_2)-\mu_x(n_2)]^*\} \\ &= R_{xx}(n_1,n_2)-\mu_x(n_1)\mu_x^*(n_2) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

式中

$$\mu_x(n)=\mathrm{E}\{x(n)\} \tag{3.1.3}$$

代表信号在 n 时刻的均值。

离散过程 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关函数 $R_{xy}(n_1,n_2)$ 与互协方差函数 $C_{xy}(n_1,n_2)$ 定义为

$$R_{xy}(n_1,n_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{x(n_1)y^*(n_2)\} \tag{3.1.4}$$

$$\begin{aligned} C_{xy}(n_1,n_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{[x(n_1)-\mu_x(n_1)][y(n_2)-\mu_y(n_2)]^*\} \\ &= R_{xy}(n_1,n_2)-\mu_x(n_1)\mu_y^*(n_2) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

离散过程 $x(n)$ 称为是 (广义) 平稳的，若它的均值为常数，自相关函数只取决于时间差 $k=n_1-n_2$，即

$$R_{xx}(k)=\mathrm{E}\{x(n)x^*(n-k)\}=C_{xx}(k)+|\mu_x|^2 \tag{3.1.6}$$

两个离散过程 $x(n)$ 和 $y(n)$ 称为是 (广义) 联合平稳的，若它们每一个都是平稳的，并且它们的互相关函数只取决于时间差 $k=n_1-n_2$，即

$$R_{xy}(k)=\mathrm{E}\{x(n)y^*(t-k)\}=C_{xy}(k)+\mu_x\mu_y^* \tag{3.1.7}$$

平稳离散过程 $x(n)$ 的功率谱密度定义为自协方差函数的 Fourier 级数，即

$$P_{xx}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{xx}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kT\omega} \tag{3.1.8}$$

它是一个以 $\sigma = \pi/T$ 为周期的函数，因此，自协方差函数可用功率谱密度表示为

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} P_{xx}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau T\omega}\mathrm{d}\omega \tag{3.1.9}$$

类似地，互功率谱密度定义为

$$P_{xy}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{xy}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kT\omega} \tag{3.1.10}$$

3.1.2 非参数化功率谱估计

假定离散随机过程有 N 个数据样本 $x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$。不失一般性，假定这些数据已零均值化。估计离散信号 $x(n)$ 的谱估计分为非参数方法和参数化方法。非参数化谱估计也称经典谱估计，它是以 Fourier 变换为基础的，有两种主要方法，即直接法和间接法。

直接法先计算 N 个数据的 Fourier 变换 (即频谱)

$$X_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \tag{3.1.11}$$

然后取频谱和其共轭的乘积，得到功率谱

$$P_x(\omega) = \frac{1}{N}|X_N(\omega)|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}\right|^2 \tag{3.1.12}$$

间接法则先根据 N 个样本数据估计 $x(n)$ 的样本自相关函数

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n+k)x^*(n), \quad k = 0, 1, \cdots, M \tag{3.1.13}$$

其中 $1 \ll M < N$，且 $\hat{R}_x(-k) = \hat{R}_x^*(k)$。然后，计算样本自相关函数的 Fourier 变换，得到功率谱

$$P_x(\omega) = \sum_{k=-M}^{M} \hat{R}_x(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega} \tag{3.1.14}$$

由于在计算式 (3.1.12) 和式 (3.1.14) 的 Fourier 变换时，分别将 $x(n)$ 和 $\hat{R}_x(k)$ 视作周期函数，所以由直接法和间接法估计的功率谱常称为周期图。周期图方法估计的功率谱为有偏估计。为了减小其偏差，通常需要加窗函数对周期图进行平滑。

加窗函数有两种不同的方法. 一种是将窗函数 $c(n)$ 直接加给样本数据，得到的功率谱常称为修正周期图，定义为

$$P_x(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{NW}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}\right|^2 \tag{3.1.15}$$

式中

$$W = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|c(n)|^2 = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}|C(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{3.1.16}$$

这里 $C(\omega)$ 是窗函数 $c(n)$ 的 Fourier 变换.

另一种方法是将窗函数 $w(n)$ 加给样本自相关函数，得到的功率谱称为周期图平滑，是 Blackman 和 Tukey 提出的 [19]，故又称 Blackman-Tukey 方法，其功率谱定义为

$$P_{\mathrm{BT}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-M}^{M}\hat{R}_x(k)w(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega} \tag{3.1.17}$$

直接加给数据的窗函数 $c(n)$ 称为数据窗，而加给自相关函数的窗函数 $w(k)$ 称为滞后窗，其 Fourier 变换 $W(\omega)$ 则称作谱窗。

下面是几种典型的窗函数:

Hanning 窗

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.1.18}$$

Hamming 窗

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.1.19}$$

Blackman 窗

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.1.20}$$

加窗函数虽然能够减小周期图的偏差，改善功率谱曲线的光滑性，但作为非参数化谱估计，周期图具有分辨率低的固有缺陷，不能适应高分辨功率谱估计的需要。与之相比，参数化谱估计可以提供比周期图高得多的频率分辨率，故常称参数化谱估计为高分辨谱估计。参数化谱估计是本章的主要讨论对象。

3.2 平稳 ARMA 过程

参数不随时间变化的系统称为时不变系统。相当多的平稳随机过程都可以通过用白噪声激励一线性时不变系统来产生，而线性系统又可以用线性差分方程进行描述，这种差分模型就是自回归—滑动平均 (ARMA) 模型。另一方面，有关功率谱分析的研究表明，任何一个有理式的功率谱密度都可以用一个 ARMA 随机过程的功率谱密度精确逼近。

若离散随机过程 $\{x(n)\}$ 服从线性差分方程

$$x(n) + \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i) = e(n) + \sum_{j=1}^{q} b_j e(n-j) \tag{3.2.1}$$

式中 $e(n)$ 是一离散白噪声，则称 $\{x(n)\}$ 为 ARMA 过程，而式 (3.2.1) 所示差分方程称为 ARMA 模型。系数 $a_1, \cdots, a_p$ 和 $b_1, \cdots, b_q$ 分别称为自回归 (AR: autoregressive) 参数和滑动平均 (MA: moving average) 参数，而 p 和 q 分别叫做 AR 阶数和 MA 阶数。显然，ARMA 模型描述的是一个时不变的线性系统。具有 AR 阶数 p 和 MA 阶数 q 的 ARMA 过程常用符号 ARMA(p,q) 简记之。

ARMA 过程可以写作更紧凑的形式

$$A(z)x(n) = B(z)e(n), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{3.2.2}$$

式中，多项式 $A(z)$ 和 $B(z)$ 分别称作 AR 和 MA 多项式，即有

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p} \tag{3.2.3}$$

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q} \tag{3.2.4}$$

且 z^{-j} 是后向移位算子，定义为

$$z^{-j} x(n) \stackrel{\text{def}}{=} x(n-j), \quad j = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{3.2.5}$$

ARMA 模型描述的线性时不变系统的传递函数定义为

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^{-i} \tag{3.2.6}$$

式中 h_i 称为系统的冲激响应系数。可见，系统的极点 $A(z)=0$ 贡献为自回归，而系统零点 $B(z)=0$ 贡献为滑动平均。

ARMA 过程有两个特例。

(1) 若 $B(z)=1$，则 ARMA(p,q) 过程退化为

$$x(n)+a_1x(n-1)+\cdots+a_px(n-p)=e(n) \tag{3.2.7}$$

这一过程称为阶数为 p 的自回归过程，简记为 AR(p) 过程。

(2) 若 $A(z)=1$，则 ARMA(p,q) 过程退化为

$$x(n)=e(n)+b_1e(n-1)+\cdots+b_q(n-q) \tag{3.2.8}$$

这一过程称为阶数为 q 的滑动平均过程，简记为 MA(q) 过程。

下面讨论 ARMA 过程的重要性质。

首先，为了使线性时不变系统是稳定的，即有界的输入 $e(n)$ 一定产生有界的输出 $x(n)$，则系统的冲激响应 h_i 必须是绝对可求和的：

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| < \infty \tag{3.2.9}$$

这一条件等价为系统传递函数不能在单位圆上有极点，即 $A(z)\neq 0, |z|=1$。

其次，系统模型不能被简化，这要求多项式 $A(z)$ 与 $B(z)$ 没有任何公共因子，或者说 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是互素的。

除了稳定性和互素性以外，还要求线性时不变系统是物理可实现的，即它必须是一个因果系统。

定义 3.2.1 (因果性) 一个由 $A(z)x(n)=B(z)e(n)$ 定义的 ARMA 过程称为是因果的，或称 $x(n)$ 是 $e(n)$ 的因果函数，若存在一常数序列满足下列条件：

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| < \infty \tag{3.2.10a}$$

$$x(n)=\sum_{i=0}^{\infty} h_i e(n-i) \tag{3.2.10b}$$

条件式 (3.2.10a) 是为了保证系统输出 $x(n)$ 任何时候都是有界的，而条件式 (3.2.10b) 才是因果性真正的条件。这两个条件意味着 $h_i = 0, i < 0$。应当注意，因果性并不是输出 $x(n)$ 单独的性质，而是它与输入激励 $e(n)$ 之间的关系。

下面的定理给出了一个 ARMA 过程是因果过程的充分必要条件。

定理 3.2.1 令 $\{x(n)\}$ 是一个 $A(z)$ 和 $B(z)$ 无公共零点的 ARMA(p,q) 过程，则 $\{x(n)\}$ 是因果的，当且仅当对所有 $|z|\geqslant 1$ 有 $A(z)\neq 0$。

证明 先证充分性 ($\Rightarrow$)。假定 $A(z)\neq 0, |z|\geqslant 1$。这意味着，存在一个任意小的非负数 $\epsilon\geqslant 0$ 使得 $1/A(z)$ 具有幂级数展开

$$\frac{1}{A(z)} = \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i z^{-i} = \xi(z), \quad |z| > 1+\epsilon$$

换言之，当 $i\to\infty$ 时，有 $\xi_i(1+\epsilon/2)^{-i}\to 0$。因此，存在 $K\in(0,+\infty)$ 使得

$$|\xi_i| < K(1+\epsilon/2)^i, \quad i = 0,1,2,\cdots$$

由此可得 $\sum_{i=0}^{\infty}|\xi_i| < \infty$ 和 $\xi(z)A(z) = 1, \forall |z|\geqslant 1$。再对差分方程 $A(z)x(n) = B(z)e(n)$ 的两边同除以算子 $\xi(z)$，则有

$$x(n) = \xi(z)B(z)e(n) = \frac{B(z)}{A(z)}e(n)$$

令 $H(z) = \xi(z)B(z)$，即可得到所希望的表达式

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty}h_i z^{-i}e(n) = \sum_{i=0}^{\infty}h_i e(n-i)$$

再证必要性 ($\Leftarrow$)。假定 $\{x(n)\}$ 是因果的，即有 $x(n) = \sum_{i=0}^{\infty}h_i e(n-i)$，并且序列 $\{h_i\}$ 满足 $\sum_{i=0}^{\infty}|h_i| < \infty$ 和 $H(z)\neq 0, |z|\geqslant 1$。这意味着 $x(n) = H(z)e(n)$ 成立。注意

$$B(z)e(n) = A(z)x(n) = A(z)H(z)e(n)$$

令 $\eta(z) = A(z)H(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\eta_i z^{-i}, |z|\geqslant 1$，则上式可写作

$$\sum_{i=0}^{q}\theta_i e(n-i) = \sum_{i=0}^{\infty}\eta_i e(n-i), \quad |z|\geqslant 1$$

两边同乘 $e(n-k)$ 后取数学期望，由于 $e(n)$ 为白噪声，满足 $\mathrm{E}\{e(n-i)e(n-k)\}=\sigma^2\delta(k-i)$，故有 $\eta_i=\theta_i, i=0,1,\cdots,q$ 以及 $\eta_i=0, i>q$，从而得

$$B(z)=\eta(z)=A(z)H(z), \quad |z|\geqslant 1 \tag{3.2.11}$$

另一方面，

$$|H(z)|=\left|\sum_{i=0}^{\infty}h_i z^{-i}\right|<\sum_{i=0}^{\infty}|h_i||z^{-i}|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}|h_i|, \quad |z|\geqslant 1$$

但根据稳定性条件，h_i 是绝对可求和的，故上式意味着

$$|H(z)|<\infty, \quad |z|\geqslant 1 \tag{3.2.12}$$

由于 $B(z)$ 与 $A(z)$ 无公共零点，所以由式 (3.2.11) 和式 (3.2.12) 知，对 $|z|\geqslant 1$ 不可能有 $A(z)=0$。这就完成了本定理的证明。 ■

定理 3.2.1 表明，当且仅当系统极点全部位于单位圆以内时，系统输出 $x(n)$ 才是输入 $e(n)$ 的因果函数。若系统极点全部位于单位圆以外，则称系统输出是输入的反因果函数，系统为反因果系统。注意，稳定性要求系统的极点不能位于单位圆上。极点既位于单位圆内，也位于单位圆外的系统称为非因果系统。

下面考虑系统零点的作用，它决定系统的可逆性。

定义 3.2.2 (可逆性) 由差分方程 $A(z)x(n)=B(z)e(n)$ 定义的 ARMA(p,q) 过程称为是可逆的，若存在一个常数序列 $\{\pi_i\}$，使得

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\pi_i|<\infty \tag{3.2.13}$$

$$e(n)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i x(n-i) \tag{3.2.14}$$

和因果性一样，可逆性也不是 ARMA 过程 $\{x(n)\}$ 单独的性质，而是它与输入激励 $e(n)$ 之间的性质。下面的定理给出了可逆性的充分必要条件。

定理 3.2.2 令 $\{x(n)\}$ 是一个多项式 $A(z)$ 和 $B(z)$ 无公共零点的 ARMA(p,q) 过程。$\{x(n)\}$ 是可逆的，当且仅当对所有 $|z|\geqslant 1$ 的复数 z 恒有 $B(z)\neq 0$。可逆过程 (3.2.14) 式中的系数 π_i 由下式决定：

$$\pi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^{-i}=\frac{A(z)}{B(z)}, \quad |z|\geqslant 1 \tag{3.2.15}$$

证明 与定理 3.2.1 的证明类似，留给读者作练习。

定理 3.2.2 表明，当且仅当系统零点全部位于单位圆内时，系统输入 $e(n)$ 才是输出 $x(n)$ 的可逆函数。若一个 ARMA(p,q) 过程可逆，则其逆系统 $A(z)/B(z)$ 的所有极点便全部位于单位圆内，因而是因果系统。一个可逆的系统也称最小相位系统。若系统零点位于单位圆上和单位圆外，则称系统是最大相位系统；若系统在单位圆内外都有零点，则称系统是非最小相位系统。注意，当一个系统在单位圆上具有零点时，其逆系统将是不稳定的系统；而当一系统的全部零点位于单位圆外时，其逆系统则是反因果系统。

更一般地，我们来考虑当 $|z|=1$ 时 $A(z)\neq 0$ 的情况。此时，由复数分析知，存在一半径 $r>1$，使得 Laurent 级数

$$\frac{B(z)}{A(z)}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_i z^{-i}=H(z) \tag{3.2.16}$$

在环形区域 $r^{-1}<|z|<r$ 内是绝对收敛的。Laurent 级数的这一收敛性在下述定理的证明中起着关键的作用。

定理 3.2.3 若对所有 $|z|=1$ 有 $A(z)\neq 0$，则 ARMA 过程 $A(z)x(n)=B(z)e(n)$ 具有惟一的平稳解

$$x(n)=H(z)e(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_i e(n-i) \tag{3.2.17}$$

式中的系数 h_i 由式 (3.2.16) 决定。

证明 先证充分性 ($\Rightarrow$)。若对于所有 $|z|=1$ 均有 $A(z)\neq 0$，则由定理 3.2.1 知，存在 $\delta>1$，使得级数 $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}\xi_i z^{-i}=1/A(z)=\xi(z)$ 在环形区域 $\delta^{-1}<|z|<\delta$ 内绝对收敛。因此，可以对 ARMA 模型 $A(z)x(n)=B(z)e(n)$ 两边同乘算子 $\xi(z)$ 得到

$$\xi(z)A(z)x(n)=\xi(z)B(z)e(n)$$

由于 $\xi(z)A(z)=1$，故上式可以写作

$$x(n)=\xi(z)B(z)e(n)=H(z)e(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_i e(n-i)$$

式中 $H(z)=\xi(z)B(z)=B(z)/A(z)$，即函数 $H(z)$ 的系数 h_i 由式 (3.2.16) 决定。

再证明必要性 ($\Leftarrow$)。假定一过程具有惟一的平稳解 (3.2.17)。对式 (3.2.17) 两边运用算子 $A(z)$，则有

$$A(z)x(n)=A(z)H(z)e(n)=B(z)e(n)$$

即具有惟一平稳解的过程是一个 ARMA 过程。由于 ARMA 过程要满足稳定性，所以对所有 $|z| = 1$ 应该恒有 $A(z) \neq 0$。 ■

综合定理 3.2.2 和定理 3.2.3，可以归纳得到描述 ARMA、MA 与 AR 过程之间的 Wold 分解定理[101]。

定理 3.2.4 (Wold分解定理) 任何一个具有有限方差的 ARMA 或 MA 过程都可以表示成惟一的、阶数有可能无穷大的 AR 过程；同样，任何一个 ARMA 或 AR 过程也可以表示成一个阶数可能无穷大的 MA 过程。

上述定理在实际应用中具有重要的作用：如果在三种模型中选择了一个错误的模型，则我们仍然可以通过一个很高的阶数获得一个合理的近似。因此，一个 ARMA 模型可以用一个阶数足够大的 AR 模型来近似。相比于 ARMA 模型不仅需要 AR 和 MA 阶数确定，而且还需要 AR 和 MA 参数估计 (其中 MA 参数估计还必须求解非线性方程)，AR 模型只涉及 AR 参数的估计，所以有不少的工程技术人员常喜欢采用 AR 模型作近似。

对于 MA(q) 过程而言，其 MA 参数与产生该过程的系统的冲激响应是完全相同的，即有

$$b_i = h_i, \quad i = 0, 1, \cdots, q \tag{3.2.18}$$

式中，$b_0 = h_0 = 1$，这是因为

$$\begin{aligned} x(n) &= e(n) + b_1 e(n-1) + \cdots + b_q e(n-q) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} h_i e(n-i) = e(n) + h_1 e(n-1) + \cdots + h_q e(n-q) \end{aligned}$$

由于只有 $q+1$ 个冲激响应系数，故这样的系统称为有限冲激响应系统，简称 FIR 系统，这里 FIR 是有限冲激响应 (finite impulse response) 的英文缩写。因此，MA 模型也称 FIR 模型。与之相反，ARMA 系统和 AR 系统称为无限冲激响应 (infinite impulse response, IIR) 系统，因为它们具有无穷多个冲激响应系数。

3.3 平稳 ARMA 过程的功率谱密度

一个平稳 ARMA 过程的功率谱密度具有广泛的代表性。例如，任何有理式谱密度以及在加性白噪声中观测的 AR 过程，具有线谱的正弦波 (更广义为谐波) 过程，都可以用 ARMA 谱密度来表示。由于其广泛的代表性和实用性，ARMA 谱分析已成为现代谱分析中最重要的方法之一。