

4.5 同态滤波器

2.3.4节介绍的照度-反射模型可用来开发一种频域处理,通过同时进行灰度范围的压缩和对比度增强来改进一幅图像的外观。从2.3.4节的讨论中可知图像 $f(x, y)$ 能被表达成照度和反射两部分的乘积:

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (4.5.1)$$

式(4.5.1)不能用来直接对照度和反射的频率部分分别进行操作,原因是两个函数乘积的傅里叶变换是不可分的。换言之:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} \neq \mathfrak{F}\{i(x, y)\}\mathfrak{F}\{r(x, y)\}$$

然而,假设定义:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \ln f(x, y) \\ &= \ln i(x, y) + \ln r(x, y) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

那么

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{z(x, y)\} &= \mathfrak{F}\{\ln f(x, y)\} \\ &= \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

或

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v) \quad (4.5.4)$$

这里, $F_i(u, v)$ 和 $F_r(u, v)$ 分别是 $\ln i(x, y)$ 和 $\ln r(x, y)$ 的傅里叶变换。

如果借助于一个滤波函数 $H(u, v)$ 处理 $Z(u, v)$,那么从式(4.2.27)可得:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

这里, $S(u, v)$ 是结果的傅里叶变换。在空间域,

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}\{S(u, v)\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

令

$$i'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} \quad (4.5.7)$$

和

$$r'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\} \quad (4.5.8)$$

则式(4.5.6)可以用如下形式表示:

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y) \quad (4.5.9)$$

最后,只要 $z(x, y)$ 是原始图像 $f(x, y)$ 取对数得到的,相反的(取指数)操作就能产生符合要求的增强图像,由 $g(x, y)$ 表示,也就是:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= e^{s(x, y)} \\ &= e^{i'(x, y)} \cdot e^{r'(x, y)} \\ &= i_0(x, y)r_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

这里

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)} \quad (4.5.11)$$

$$r_0(x, y) = e^{r'(x, y)} \quad (4.5.12)$$

是输出图像的照射分量和反射分量。

采用上述概念的增强方法总结于图 4.31 中。这个方法是基于称为同态系统的一类系统的特例。在这个特殊应用中,方法的关键是用式(4.5.4)的形式将照射分量和反射分量分开。同态滤波函数 $H(u, v)$ 能分别对两个分量进行操作,如式(4.5.5)指出的那样。

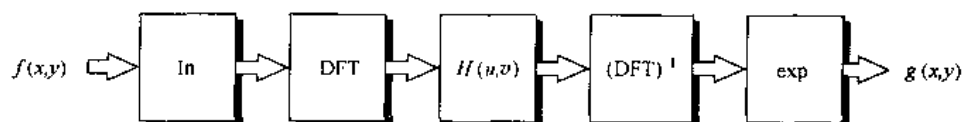


图 4.31 图像增强中的同态滤波

图像照射分量通常以空间域的慢变化为特征,而反射分量往往引起突变,特别在不同物体的连接部分。这些特性导致图像对数的傅里叶变换的低频成分与照度相联系,而高频成分与反射联系在一起。虽然这些联系只是大体上的近似,但它们用于图像增强时是有益的。

许多控制能通过用同态滤波器对照射分量和反射分量操作来加强。这些控制需要一个滤波器函数 $H(u, v)$ 来规范。它能以不同的方法影响傅里叶变换的高低频成分。图 4.32 显示了这种滤波器的横截面图。一旦 γ_L 和 γ_H 选定,而 $\gamma_L < 1$ 且 $\gamma_H > 1$,图 4.32 所示的滤波器函数往往减少低频(照度)的贡献,而增加高频(反射)的贡献。结果是同时进行动态范围的压缩和对比度的增强。

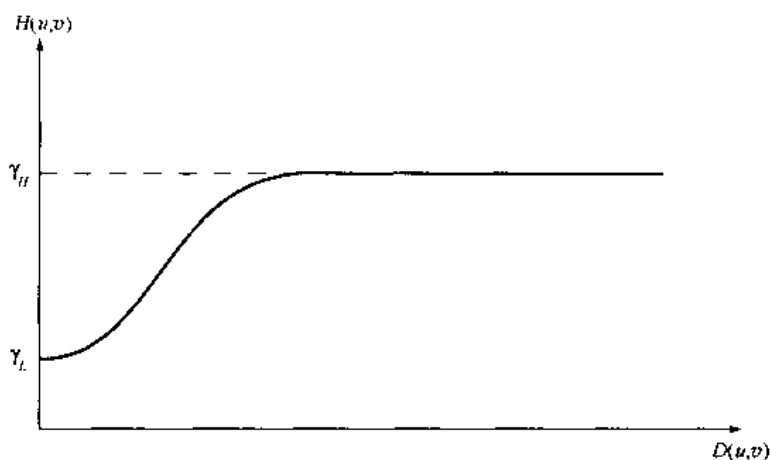


图 4.32 一个圆对称滤波函数的横截面。 $D(u, v)$ 是中心变换后距原点的距离

图 4.32 所示的曲线形状能用前面章节所述的任何一种理想高通滤波器的基本形式近似。例如,采用高斯型高通滤波器稍微修改过的形式:

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) [1 - e^{-c(D^2(u, v)/D_0^2)}] + \gamma_L \quad (4.5.13)$$

这里, $D^2(u, v)$ 由式(4.3.3)给出,常数 c 被引入用来控制滤波器函数斜面的锐化,它在 γ_L 和 γ_H 之间过渡。这类滤波器与 4.4 节末尾讨论的高频加强滤波器相似。

例 4.10 用同态滤波增强

图 4.33 是用图 4.32 所示的同态滤波器函数得到的典型结果。图 4.33(a)所示的原始图

像中,掩体内部的细节被墙外的光所遮蔽。图 4.33(b)显示了用同态滤波器处理这一图像的结果,其中图 4.32 的滤波函数中的 $\gamma_L = 0.5$ 且 $\gamma_H = 2.0$ 。减小亮度的动态范围,增强对比度可以使掩体内的细节显示出来,并且平衡墙外的灰度。增强后的图像同样更加锐化。

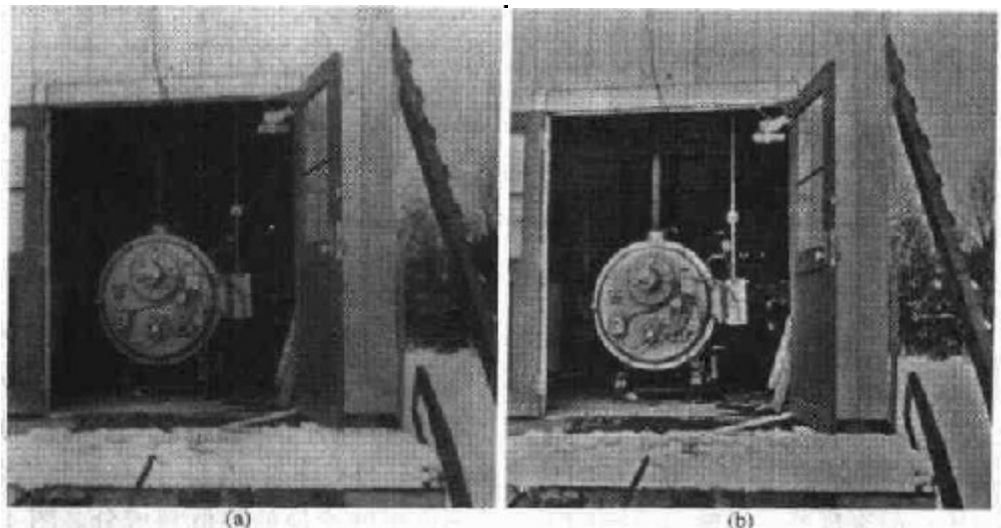


图 4.33 (a)原图像,(b)用同态滤波处理后的图像(注意掩体内的细节)(Stockham)

4.6 实现

这一节讨论傅里叶变换的基础知识。从对一些二维傅里叶变换特性的总结开始,通过快速傅里叶变换(FFT)的简要复习得出结论。

4.6.1 一些二维傅里叶变换的性质

平移

傅里叶变换对有如下平移性质:

$$f(x, y)e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (4.6.1)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(x_0 u/M + y_0 v/N)} \quad (4.6.2)$$

这里,如式(4.2.31)中介绍的那样,引入双箭头用于表示傅里叶变换对。当 $u_0 = M/2$ 且 $v_0 = N/2$ 时有:

$$\begin{aligned} e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} &= e^{j\pi(x+y)} \\ &= (-1)^{x+y} \end{aligned}$$

在这种情况下,式(4.6.1)变为:

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2) \quad (4.6.3)$$

类似地,

$$f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{(u+v)} \quad (4.6.4)$$

可见式(4.6.3)与式(4.2.21)相同,式(4.2.21)用于中心化变换。这些结果基于变量 u 和 v , 它们的值分别在 $[0, M-1]$ 和 $[0, N-1]$ 范围内。在计算机执行的过程中,变量 u 的值从 1 变到

M , 而变量 v 的值从 1 变到 N , 在这种情况下, 变换的实际中心变为 $u = (M/2) + 1, v = (N/2) + 1$ 。

分配性和比例变换性

从傅里叶变换的定义有:

$$\mathfrak{F}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathfrak{F}[f_1(x, y)] + \mathfrak{F}[f_2(x, y)] \quad (4.6.5)$$

且通常

$$\mathfrak{F}[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \mathfrak{F}[f_1(x, y)] \cdot \mathfrak{F}[f_2(x, y)] \quad (4.6.6)$$

换言之, 傅里叶变换对加法具有分配性, 而不适用于乘法。傅里叶反变换适用于相同的结论。类似地, 对于比例因子 a 和 b , 可得:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v) \quad (4.6.7)$$

和

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b) \quad (4.6.8)$$

旋转

如果引入极坐标:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, u = \omega \cos \varphi, v = \omega \sin \varphi$$

那么 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 分别变成 $f(r, \theta)$ 和 $F(\omega, \varphi)$ 。在傅里叶变换的定义中直接替换得到:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0) \quad (4.6.9)$$

这个表达式指出以角度 θ_0 旋转 $f(x, y)$, $F(u, v)$ 将转过相同的角度。类似地, 旋转 $F(u, v)$, $f(x, y)$ 将转过相同的角度。

周期性和对称性

离散傅里叶变换有如下周期性性质:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N) \quad (4.6.10)$$

反变换也是周期性的:

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N) \quad (4.6.11)$$

共轭对称的概念在 4.2 节中介绍过, 为便于学习, 在这里再介绍一下:

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (4.6.12)$$

从中可以得到结论: 频谱也是关于原点对称的:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (4.6.13)$$

这些等式的有效性是建立在式(4.2.16)和式(4.2.17)上的。

周期性的重要性在图 4.34(a) 中得到说明, 图中显示了一维变换 $F(u)$ 的频谱 [见式(4.2.5)和式(4.2.10)]。根据式(4.6.10), $F(u) = F(u + M)$, 从而 $|F(u)| = |F(u + M)|$ 。同样, 根据式(4.6.13), $|F(u)| = |F(-u)|$ 。周期性指出 $F(u)$ 的周期长度为 M , 对称性指出频谱关于原点对称, 如图 4.34(a) 所示。这幅图和前面的讨论表明从 $(M/2) + 1$ 到 $M - 1$ 变换值的大小是对原点左边半周期值的映射。因为离散傅里叶变换是对区间 $[0, M - 1]$ 中的 u 值表述的, 这个变换的结果在该区间产生两个背靠背的半周期。要显示一个完全的周期, 必须将变换的原点移至点 $u = M/2$, 如图 4.34(b) 所示。为做到这一点, 在变换前简单地将 $f(x)$ 乘以

$(-1)^x$, 如式(4.6.3)所示。

二维频谱以相同的方法加以分析。图 4.34(c)和(d)是中心化前后(只显示一个周期)的典型频谱图。此例中,变换中心在图的左上角,而四个二维周期分量从图像的四个角背靠背地扩展到中心,且包含了高频成分。相对比,用式(4.6.3)获得的中心化变换的原点(零频率成分)在图 4.34(d)的中心,而它的各部分以共轭对称向外扩展。图 4.34(d)清楚地显示了中心化变换不仅有助于可视化,而且像前几章和本章所述的,也能简化滤波。

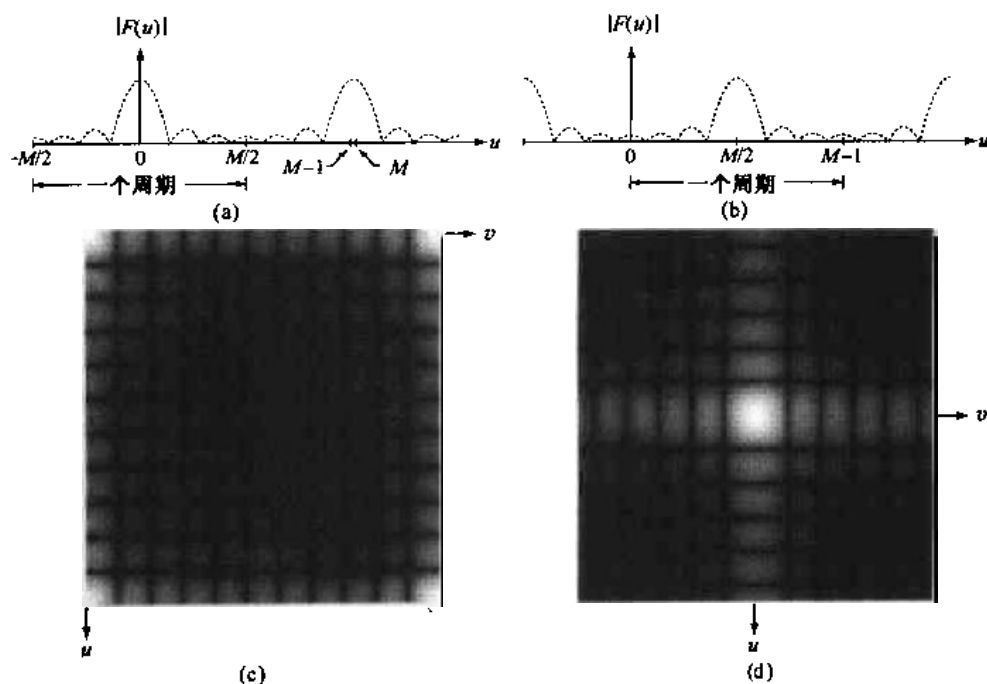


图 4.34 (a)在区间 $[0, M-1]$ 中显示半周期背靠背的傅里叶谱, (b)在相同区间内移动频谱以显示全周期, (c)一幅图像的傅里叶谱, 显示了与(a)一样的背靠背特性, 但是二维的, (d)中心化的傅里叶谱

可分性

式(4.2.16)的离散傅里叶变换可以用可分离的形式表示:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M} \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

这里

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \quad (4.6.15)$$

对于每个 x 值, 当 $v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 时, 该等式是完整的一维傅里叶变换。换言之, $F(x, v)$ 是沿着 $f(x, y)$ 的一行所进行的傅里叶变换。当 x 由 0 变为 $M-1$ 时, 沿着 $f(x, y)$ 的所有行计算傅里叶变换。然而频率变量 u 仍然保持不变。为完成二维变换, 必须在式(4.6.14)中将 u 值从 0 变到 $M-1$ 。很明显, 这涉及沿 $F(x, v)$ 的每一列计算一维变换。这是一个重要结论。它告诉我们可以先沿输入图像的每一行计算一维变换, 然后沿中间结果的每一列再

计算一维变换的方法来求二维变换。颠倒次序后(先列后行)结论同样成立。该步骤概括于图 4.35 中。

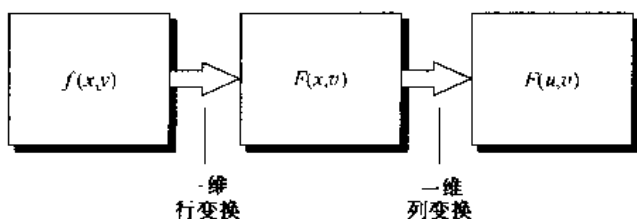


图 4.35 顺序进行一维变换计算二维傅里叶变换

一个相似的过程适用于计算二维傅里叶反变换。先沿 $F(u, v)$ 的每一行计算一维反变换,再沿中间结果的每一列计算一维反变换。正如下面章节所示,可用一维前向傅里叶变换算法实现反变换。

4.6.2 用前向变换算法计算傅里叶反变换

如前面一节所述,二维傅里叶变换可以通过应用一维变换实现。在 4.2.1 节定义了一维傅里叶变换对。为方便,重复这两个公式:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad (4.6.16)$$

$u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, 且

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad (4.6.17)$$

$x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。式(4.6.17)取复共轭,并用 M 同时除以两边,得到:

$$\frac{1}{M} f^*(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F^*(u) e^{-j2\pi ux/M} \quad (4.6.18)$$

与式(4.6.16)比较这一结果显示式(4.6.18)的右边是前向傅里叶变换的形式。因此,将 $F^*(u)$ 输入到为计算前向变换而设计的算法中,得到值 $f^*(x)/M$ 。取复共轭,再乘以 M 便产生所要的反变换 $f(x)$ 。对双变量有类似的分析:

$$\frac{1}{MN} f^*(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (4.6.19)$$

这就是二维前向傅里叶变换的形式。如果 $f(x)$ 或 $f(x, y)$ 是实函数(如一幅图像),式(4.6.19)左边取复共轭就没有必要了。只简单地取出结果的实部而忽略寄生的复数项,在大部分傅里叶变换的计算中是很典型的。

当开发出的技术用于得到变换时,通过相继的一维变换计算二维变换经常是混乱的根源。记住前一节列出的步骤,避免被式(4.6.18)误导。换句话说,当一维算法被用于计算二维反变换时,在处理每一行或一列后不必计算共轭。取而代之的,函数 $F^*(u, v)$ 被当做 $f(x, y)$,用在前向二维变换步骤中,二维变换步骤总结在图 4.35 中。结果中的复共轭(或可用的实部)乘以 $M \times N$,得到相对应的正确 $f(x, y)$ 。这里强调,上述关于常数 M 和 N 的讨论是基于离散傅里叶变换的定义,即所有的常量和前向变换有关。如 4.2.1 节和 4.2.2 节指出的那样,通常会遇到常量以不同方式分布在前向变换和反变换之间的情况。因此,为避免减去一个缩放因子,当计算反变换时,如果以与本书不同的方式分布这些常量,要特别注意常量的放置。

4.6.3 更多的关于周期性的讨论:必要的铺垫

4.2.4 节解释了,基于卷积理论,频率域的乘法相当于空间域的卷积,反之亦然。当处理离散变量和傅里叶变换时,要记住不同函数所包含的周期性(4.6.1 节)。虽然可能不太直观,但周期性是定义离散傅里叶变换时产生的数学副产品。周期性是处理操作的一部分,不应忽视。

图 4.36 列举了周期性的重要性。图的左边一列是用式(4.2.30)的一维形式计算的卷积:

$$f(x) * h(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(m) h(x-m) \quad (4.6.20)$$

在此,还要利用这一机会更详细地解释卷积运算。为简化表示,简单的数字将代替那些表示函数长度和高度的通用符号。图 4.36(a)和(b)是两个要进行卷积的函数。每个函数包含 400 个点。卷积的第一步是将一个函数关于原点进行镜像映射(倒转),在本例情况下,对第二个函数进行,在图 4.36(c)中以 $h(-m)$ 示出。下一步是将 $h(-m)$ 滑过 $f(m)$ 。这要增加一个常数 x 到 $h(-m)$,即变成 $h(x-m)$,如图 4.36(d)所示。注意只有一个置换值。在第一次遇到时,这个简单步骤通常是引起混乱的根源。而这恰好是卷积计算的全部关键。换言之,为了执行卷积,倒转了一个函数,并将它滑过另一个函数。在每一个置换点(的每一个值)都要计算式(4.6.20)的全部总和。这个总和不比在给定位移处 f 和 h 乘积的和更大。位移 x 的范围为 h 完全滑过 f 需要的所有值。图 4.36(e)显示了 h 完全滑过 f 后的结果,并在 x 的每个点计算式(4.6.20)。在此例中,为使 $h(x-m)$ 完全滑过 f , x 值的范围是从 0 到 799。这幅图是两个函数的卷积。要清楚地记住卷积中的变量是 x 。

从 4.2 节[见式(4.2.31)]介绍的卷积理论可知,利用式(4.6.20),由 $F(u)H(u)$ 的傅里叶反变换能得到同样的准确结果。但是,从本章前面对周期性的讨论又知离散傅里叶变换自动地将输入函数周期化。换言之,采用 DFT 允许在频率域进行卷积计算,但函数必须看做周期性的,且周期等于函数的长度。

可以通过图 4.36 右边一列考察这种隐含的周期性。图 4.36(f)同图 4.36(a)一样,但同样的函数在两个方向上周期性地无限扩展(扩展部分用虚线表示)。从图 4.36(g)到图 4.36(i)同样应用该扩展。现在,可以通过将 $h(x-m)$ 滑过 $f(m)$ 进行卷积。如前面一样,变化 x 完成滑动。然而, $h(x-m)$ 的周期性扩展产生了图 4.36 左边的计算中所没有的值。例如,在图 4.36(i)中,当 $x=0$ 时,看到 $h(x-m)$ 右侧第一个扩展周期的一部分进入图 4.36(f)中所示的 $f(m)$ (从原点开始)的一部分。当 $h(x-m)$ 向右滑动时,在 $f(m)$ 中的那部分开始向右侧移出,但被 $h(x-m)$ 左侧相同部分所取代。这引起卷积产生一个常量值,如图 4.36(j)所示的 $[0,100]$ 的一段。从 100 到 400 的一段是正确的,但周期性是周而复始的,这样就引起卷积函数尾部的一部分丢失,由图 4.36(j)和图 4.36(e)实线部分的比较可以看出这一点。

在频率域,该过程需要计算图 4.36(a)和(b)中函数的傅里叶变换。根据卷积理论,两个变换要相乘,再计算傅里叶反变换。结果包含 400 个点的卷积,如图 4.36(j)的实线部分所示。简单的解释表明当使用傅里叶变换得出卷积函数时,错误地处理周期性将得到错误的结论。结果,在开头有错误数据,结尾将丢失数据。

问题的解决办法很简单。假设 f 和 h 分别由 A 个和 B 个点组成。对两个函数同时添加

零,以使它们具有相同的周期,表示为 P 。这个过程产生扩展的或延拓的函数,如下所示:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \end{cases} \quad (4.6.21)$$

和

$$g_e(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B \leq x \leq P \end{cases} \quad (4.6.22)$$

可以看出(Brigham[1988]),除非选择 $P \geq A + B - 1$,否则卷积的独立周期将会混叠。已经在图 4.36中看到了这种现象的结果,这通常归于缠绕误差。若 $P = A + B - 1$,周期便会邻接起来。若 $P > A + B - 1$,周期将会是分隔开的,分隔的程度等于 P 与 $A + B - 1$ 的差。

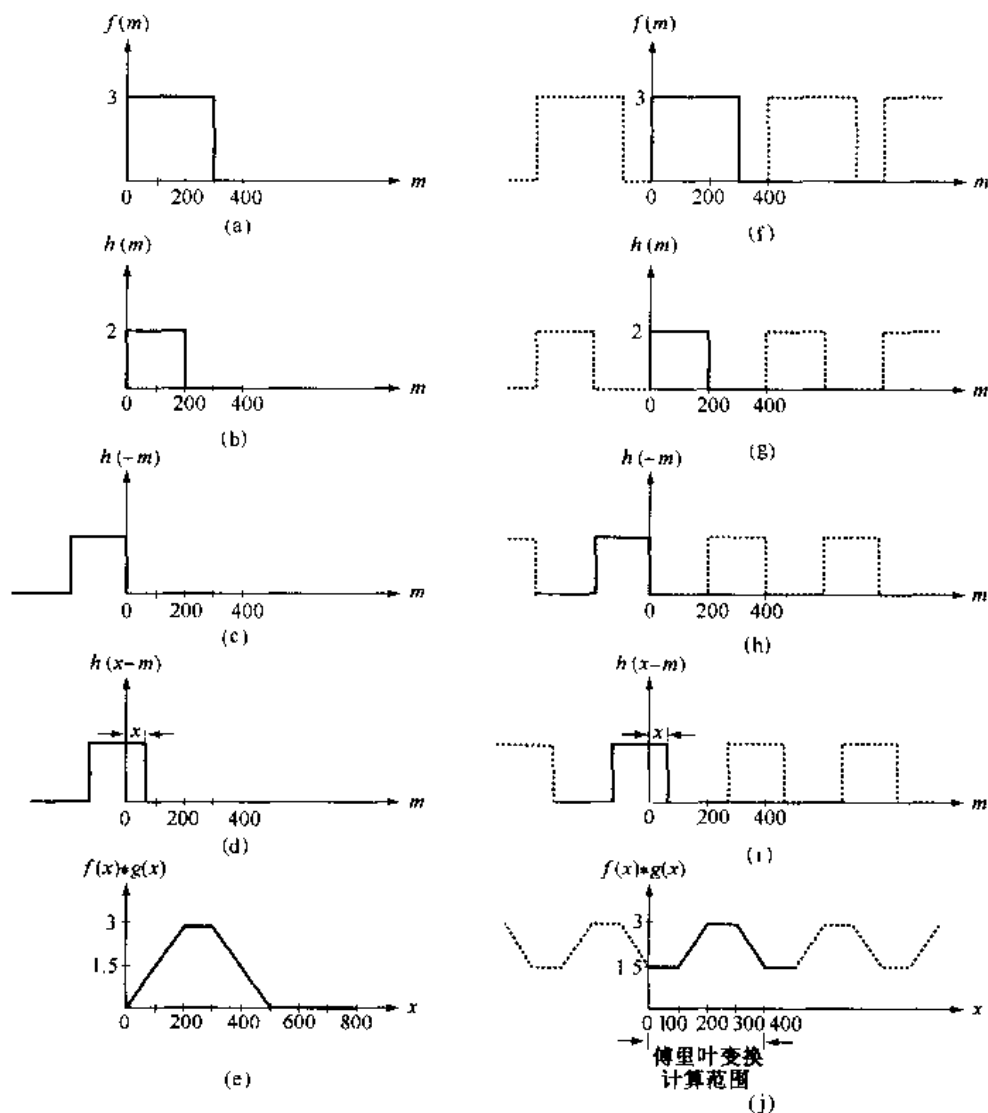


图 4.36 左边:两个离散函数的卷积。右边:相同函数的卷积,考虑 DFT 周期性的应用。注意在(j)中邻近周期的数据如何混淆卷积结果

扩展图 4.36(a)和(b)的函数后得到的结果示于图 4.37(a)和(b)。此例中,选择 $P = A + B - 1(799)$,即可知卷积周期是相邻的。遵循与前面的解释相同的过程,得到如图 4.37(e)所示

的卷积函数。该结果的一个周期与图 4.36(e) 相同,是正确的。这样,如果要在频率域计算卷积,应该:(1)得到两个扩展序列的傅里叶变换(每个序列有 800 个点);(2)将两个变换相乘;(3)计算傅里叶反变换。结果便得到正确的 800 个点的卷积函数,见图 4.37(e) 中周期加重的部分。

这些概念扩展到二维函数时遵循了相同的前提。假设有 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 两幅图像,大小分别为 $A \times B$ 和 $C \times D$ 。如同一维情况,这些行列必须假定在 x 方向上有相同的周期 P ,在 y 方向上有相同的周期 Q 。二维卷积的混叠可由选择如下周期避免:

$$P \geq A + C - 1 \quad (4.6.23)$$

$$Q \geq B + D - 1 \quad (4.6.24)$$

扩展 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 形成如下周期性序列:

$$f_r(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A - 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0 & A \leq x \leq P \text{ 或 } B \leq y \leq Q \end{cases} \quad (4.6.25)$$

$$h_r(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C - 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0 & C \leq x \leq P \text{ 或 } D \leq y \leq Q \end{cases} \quad (4.6.26)$$

填充的问题是对滤波中心化。当执行本章讨论过的任何频率域滤波时,用要处理的图像变换乘以滤波器传递函数。由卷积定理可知,这与空间域滤波器表达式和图像相卷积的效果是相同的。这样,如果正确的填充不能实现,结果便会是错误的,如图 4.38 所示。为了简化图例,假设 f 和 h 是方形的,且大小相同,这里 h 是滤波器 $H(u, v)$ 的傅里叶反变换。图 4.38(a) 显示了图像没有延拓时得到的滤波结果。这通常是由于没有对一幅输入图像进行延拓就进行傅里叶变换,然后又乘上同样大小的滤波函数(也没有延拓),计算傅里叶反变换。结果就是与输入图像相同的大小为 $A \times B$ 的图像,如图 4.38(a) 左上象限所示。如同一维情况,图像前面边沿(阴影部分)由于周期性而引入了错误数据,而在尾部边沿将丢失数据。如图 4.38(b) 所示,通过对输入图像和滤波函数进行合适的延拓,将得到正确的、大小为 $P \times Q$ 的过滤图像,如图 4.38(c) 所示。这幅图像在两个坐标方向上是原始图像的两倍大小,有原始图像 4 倍数量的像素点。但是,不久就要看到,感兴趣的区域通常出现在大图像上。

重要的是注意到,刚才描述的处理方法需要频率域滤波函数的反变换,用 0 延拓,然后再进行正变换。所有过滤的其他方面已在 4.2.3 节描述过了。同样要注意滤波器的傅里叶反变换有实部和虚部。虽然滤波器的虚部在本书讨论中通常比实部小许多个数量级,但实际一般不能在傅里叶计算的中间过程中忽略虚部。这样,在通过前向变换的计算产生频率域滤波器延拓前,实部和虚部都将延拓。

图 4.39 显示了用来生成图 4.12(c) 的理想低通滤波器延拓的空间域表示(只显示实部)。黑色显示延拓“0”的区域。选择理想低通滤波器的例子是因为它在空间域中有着很大部分的可见“结构”。所用的延拓是所要求的最小尺寸,当图像和滤波器是大小相同的方形时,在两个维度上都简单地倍乘原始图像大小。

图 4.40 所示的是用刚刚讨论的方法延拓函数滤波的结果。很容易看出,用图 4.12(a) 的延拓怎样卷绕图 4.39 所示的滤波器生成图 4.40。在这种情况下,很明显,结果图像的 3 个区域包含了无用的信息,因此裁剪回原始图像的大小可以得到想要的过滤结果。可以确定切去由于延拓产生的图像没有混叠错误。

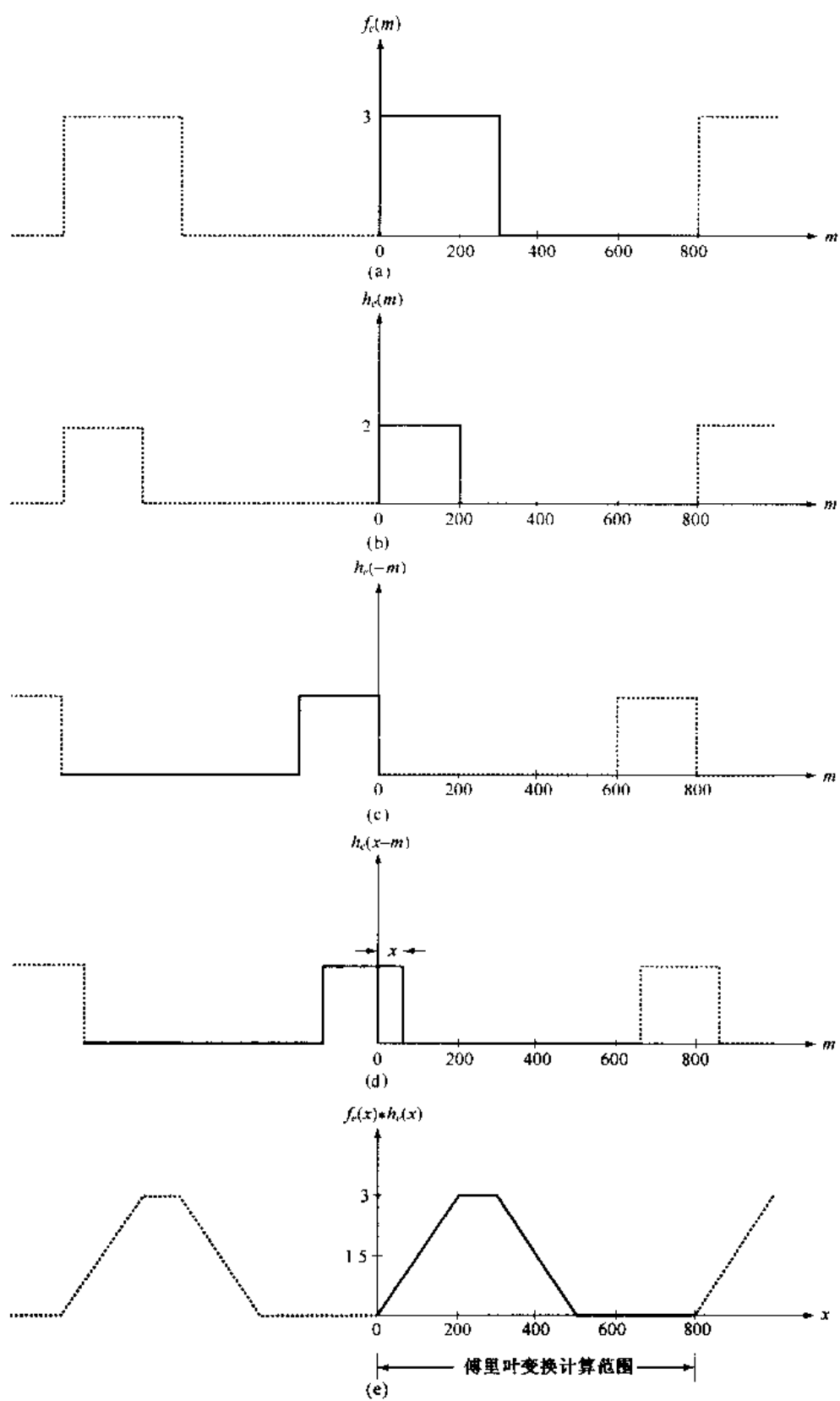


图 4.37 用扩展函数执行卷积的结果。比较图 4.37(e)和图 4.36(e)