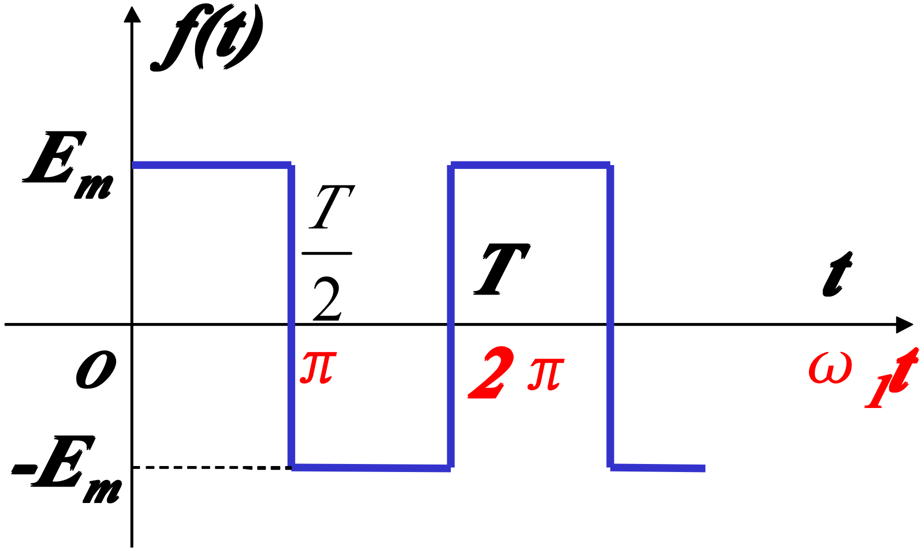
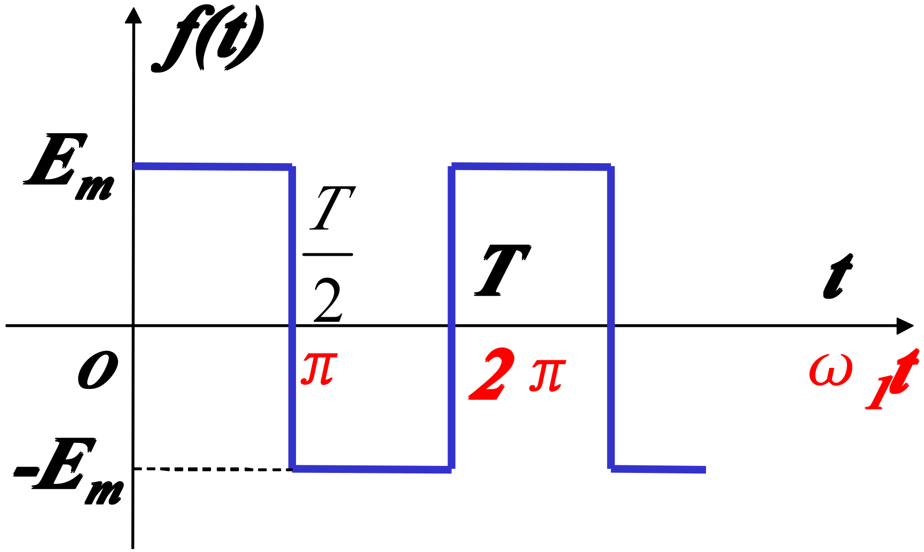
例：求周期性矩形信号的傅里叶级数展开式及其频谱



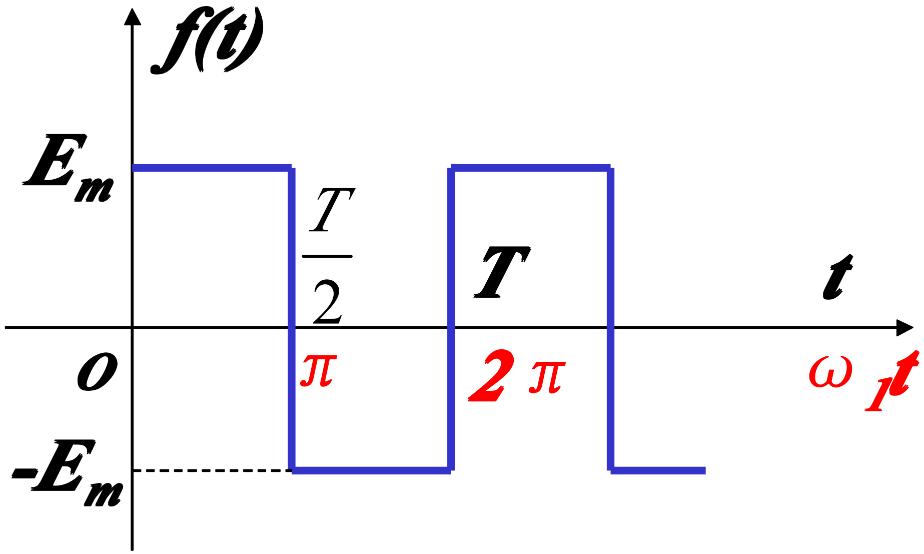
解：$f(t)$在第一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases} E_m & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ -E_m & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

根据公式计算系数



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$$



$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} E_m \cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t) - \int_{\pi}^{2\pi} E_m \cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)]$$

$$= \frac{2E_m}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$=0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} E_m \sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t) - \int_{\pi}^{2\pi} E_m \sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t)]$$

$$= \frac{2E_m}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\omega_1 t)d(\omega_1 t) = \frac{2E_m}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(k\omega_1 t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2E_m}{k\pi}[1-\cos(k\pi)]$$

当k为偶数时：

$\cos(k\pi)=1$

$b_k=0$

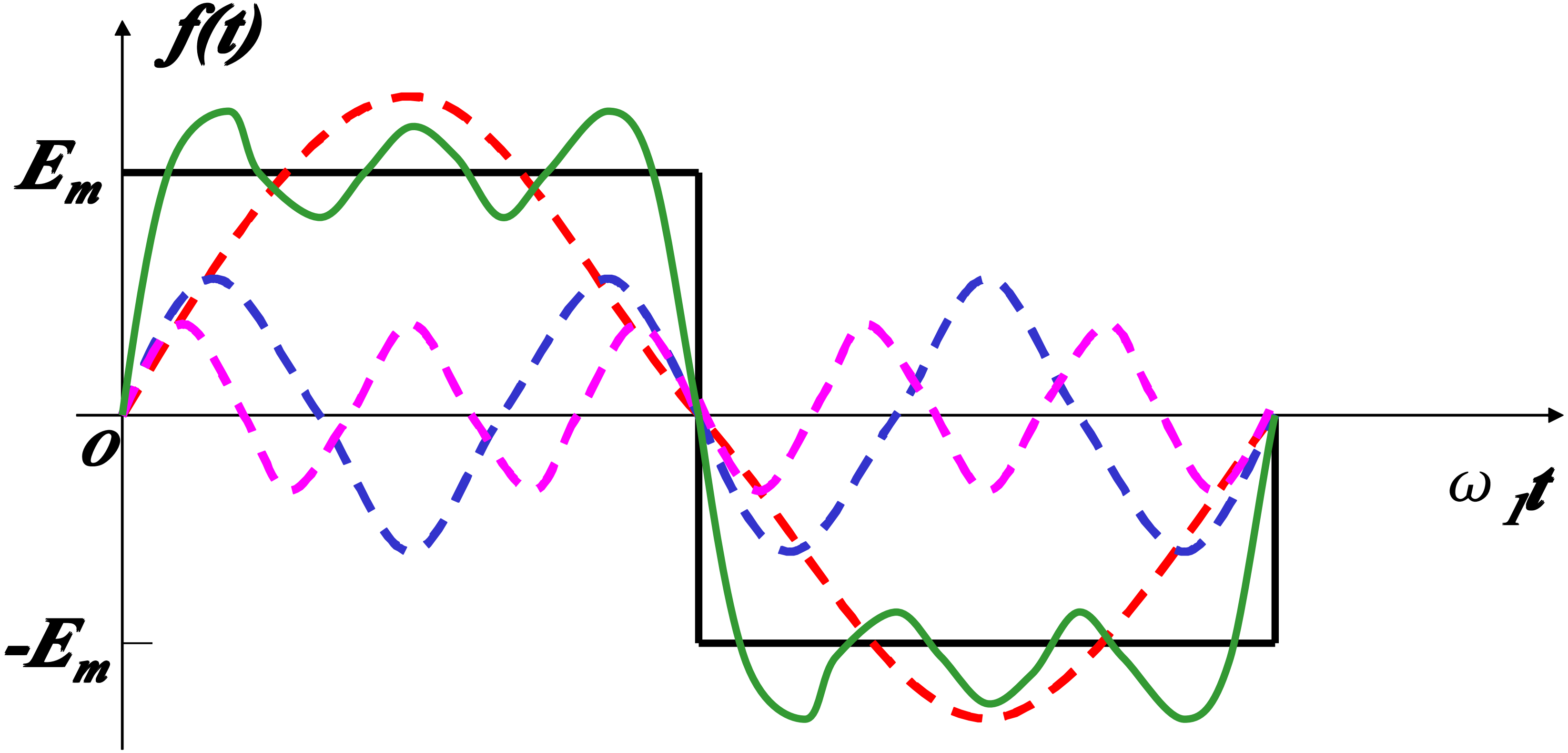
当k为奇数时：

$\cos(k\pi)=0$

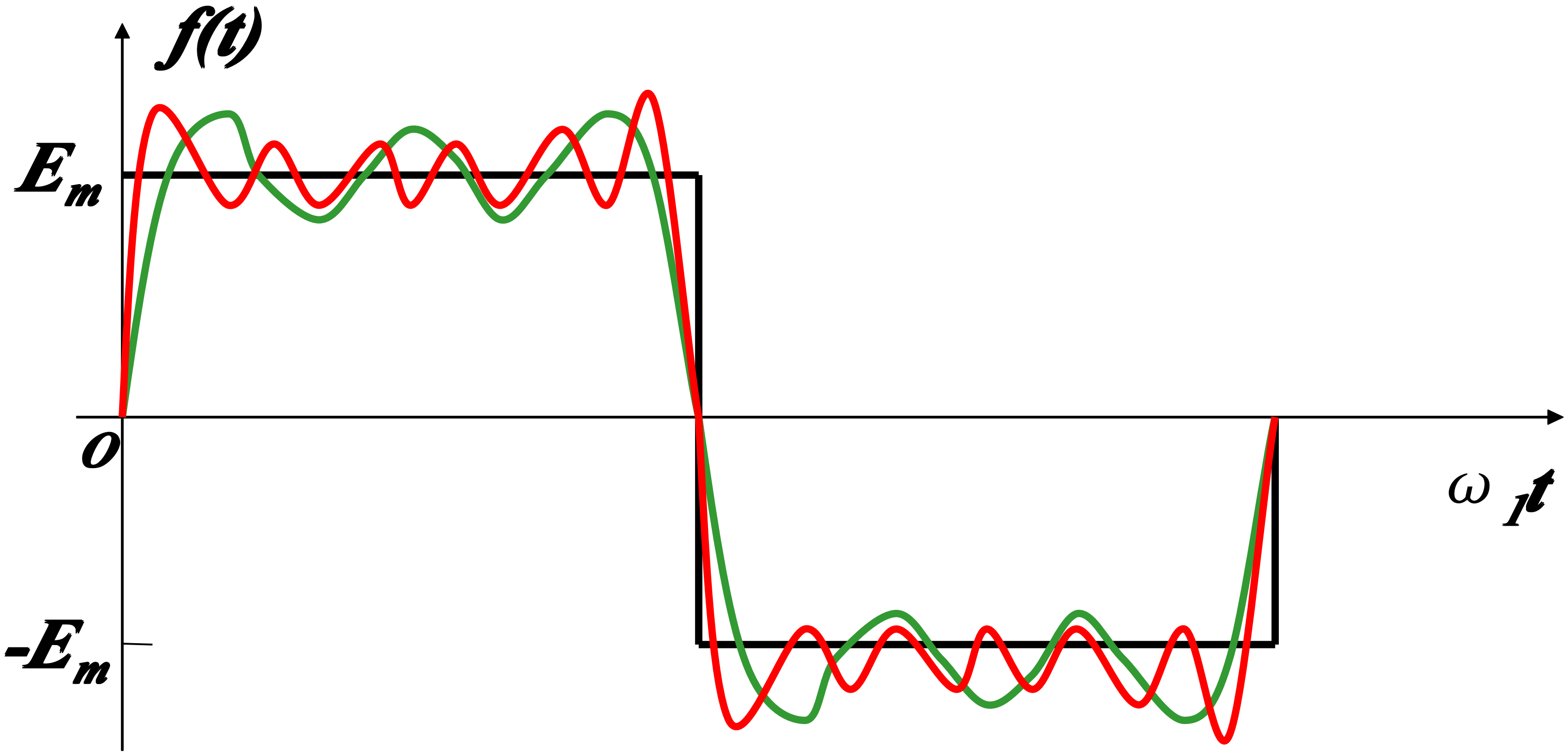
$$b_k = \frac{4E_m}{k\pi}$$

由此求得

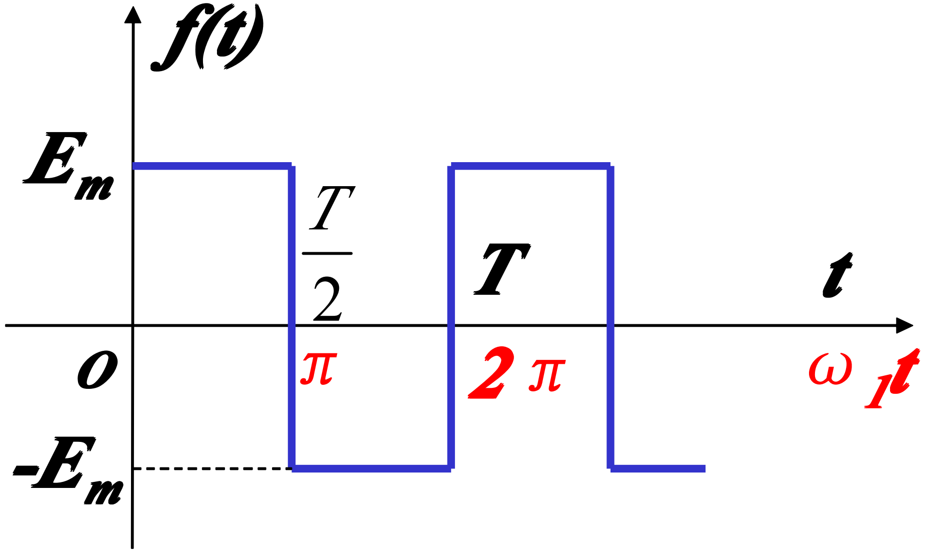
$$f(t)=\frac{4Em}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\cdots\right]$$



取到11次谐波时合成的曲线



比较两个图可见，谐波项数取得越多，合成曲线就越接近于原来的波形。



$$f(t)=\begin{cases} E_m & 0\le t\le \frac{T}{2} \\ -E_m & \frac{T}{2}\le t\le T \end{cases}$$

$$f(t)=\frac{4Em}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\cdots\right]$$

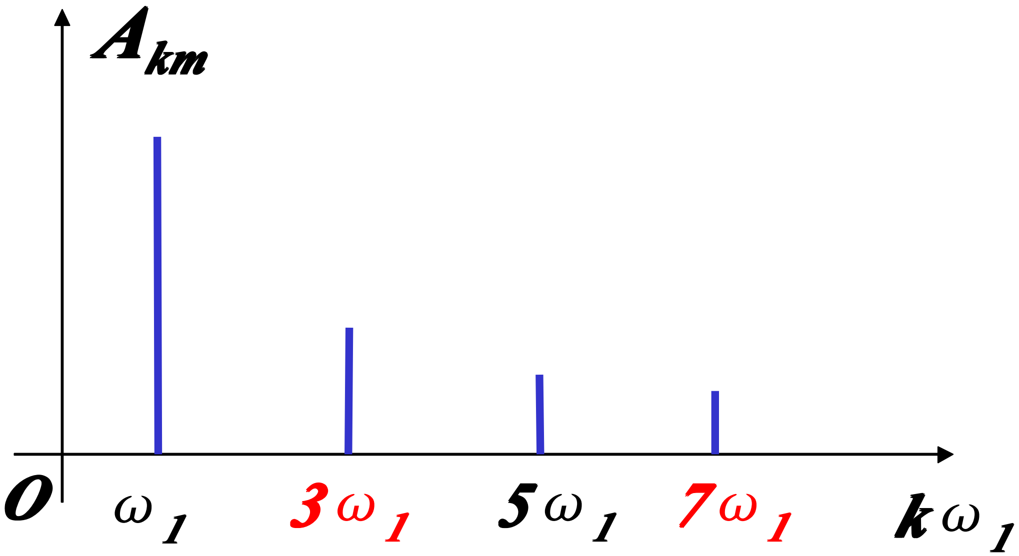
令 $E_m=1$，
$\omega_1 t=\pi/2$

$$1=\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right]$$

$$\pi=4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right]$$

矩形信号*f(t)*的频谱

$$f(t)=\frac{4Em}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\cdots\right]$$



3、频谱与非正弦信号特征的关系

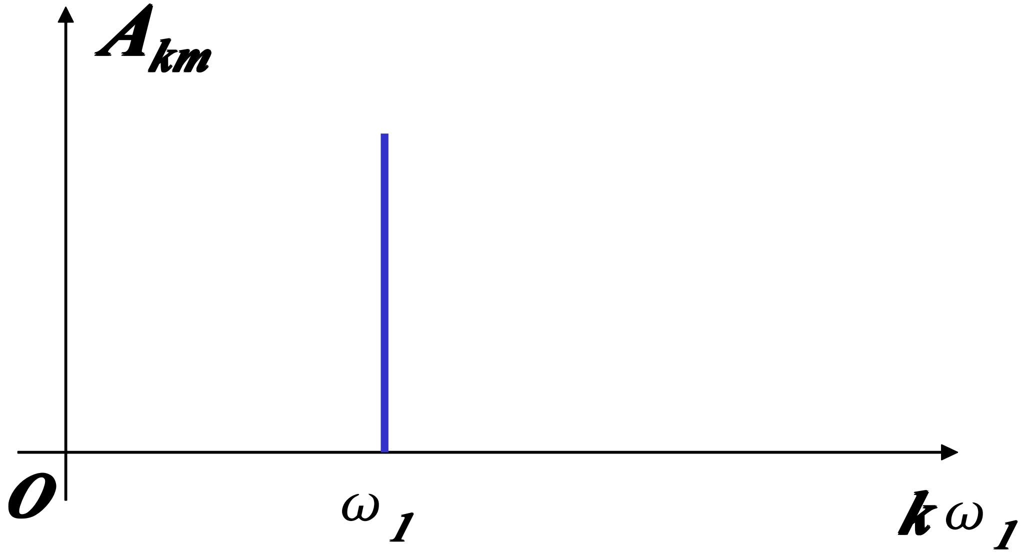
波形越接近正弦波，

谐波成分越少；

波形突变点越小，

频谱变化越大。

$f(t)=10\cos(314t+30°)$



四、非正弦函数波形特征与展开式的系数之间的关系

1、偶函数

$f(t)=f(-t)$

纵轴对称的性质