

3.3.1 直方图均衡化

考虑连续函数并且让变量 r 代表待增强图像的灰度级。在前面的讨论中,假设 r 被归一化到区间 $[0,1]$,且 $r=0$ 表示黑色及 $r=1$ 表示白色。然后,考虑一个离散公式并允许像素值在区间 $[0, L-1]$ 内。

对于任一个满足上述条件的 r ,我们将注意力集中在变换形式上:

$$s = T(r) \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.3.1)$$

在原始图像中,对于每一个像素值 r 产生一个灰度值 s 。显然,可以假设变换函数 $T(r)$ 满足以下条件:

(a) $T(r)$ 在区间 $0 \leq r \leq 1$ 中为单值且单调递增

(b) 当 $0 \leq r \leq 1$ 时, $0 \leq T(r) \leq 1$

条件(a)中要求 $T(r)$ 为单值是为了保证反变换存在,单调条件保持输出图像从黑到白顺序增加。变换函数不单调增加将导致至少有一部分亮度范围被颠倒,从而在输出图像中产生一些反转灰度级。这也许在某些时候需要使用,但在这里我们不需要。最后,条件(b)保证输出灰度级与输入有同样的范围。图 3.16 给出了满足这两个条件的一个变换函数的例子。由 s 到 r 的反变换可以表示为:

$$r = T^{-1}(s) \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (3.3.2)$$

从例子(习题 3.8)可得出,即使 $T(r)$ 满足条件(a)和(b),相应的函数 $T^{-1}(r)$ 也可能不为单值。

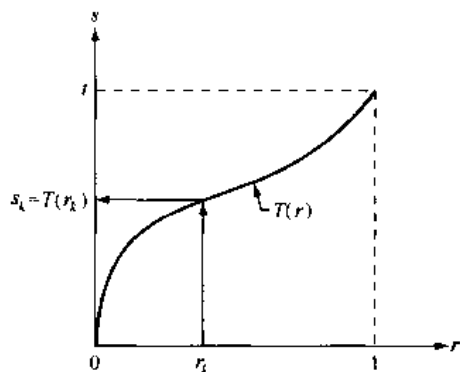


图 3.16 单值单调递增的灰度级变换函数

一幅图像的灰度级可被视为区间 $[0,1]$ 的随机变量。随机变量的一个最重要的基本描述是其概率密度函数(PDF)。令 $P_r(r)$ 和 $P_s(s)$ 分别代表随机变量 r 和 s 的概率密度函数。此处带有下标的 P_r 和 P_s 用于表示不同的函数。由基本概率理论得到一个基本结果:如果 $P_r(r)$ 和 $T(r)$ 已知,且 $T^{-1}(s)$ 满足条件(a),那么变换变量 s 的概率密度函数 $P_s(s)$ 可由以下简单公式得到:

$$P_s(s) = P_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (3.3.3)$$

因此,变换变量 s 的概率密度函数由输入图像的灰度级 PDF 和所选择的变换函数决定。

在图像处理中一个尤为重要的变换函数如下所示:

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw \quad (3.3.4)$$

其中 w 是积分变量。式(3.3.4)的右部为随机变量 r 的累积分布函数(CDF)。因为概率密度函数永远为正,并且函数积分是一个函数曲线下的面积,所以它遵循该变换函数是单值单调增加的条件,因此,满足条件(a)。类似地,区间 $[0,1]$ 上变量的概率密度函数的积分也在区间 $[0,1]$ 上,因此,也满足条件(b)。

给定变换函数 $T(r)$,通过式(3.3.3)得到 $P_s(s)$ 。从基本微积分学(莱布尼茨准则),我们知道关于上限的定积分的导数就是该上限的积分值。也就是说:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{dT(r)}{dr} \\ &= \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w)dw \right] \\ &= p_r(r) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

用这个结果代替 dr/ds ,代入式(3.3.3),取概率值为正,得到:

$$\begin{aligned} p_s(s) &= p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \\ &= p_r(r) \left| \frac{1}{p_r(r)} \right| \\ &= 1 \quad 0 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

因为 $P_s(s)$ 是概率密度函数,在这里可以得出,区间 $[0,1]$ 以外它的值为 0,这是因为它在所有 s 值上的积分等于 1。我们看到式(3.3.6)中给出的 $P_s(s)$ 形式为均匀概率密度函数。简而言之,已证明执行式(3.3.4)给出的变换函数会得到一随机变量 s ,其特征为一均匀概率密度函数。特别要注意从式(3.3.4)得到 $T(r)$ 取决于 $P_r(r)$,但是,如式(3.3.6)指出的那样, $P_s(s)$ 的结果始终是均匀的,与 $P_r(r)$ 的形式无关。

对于离散值,我们处理其概率与和,而不是概率密度函数与积分。一幅图像中灰度级 r_k 出现的概率近似为:

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3.7)$$

其中,如此节开始指出的, n 是图像中像素的总和, n_k 是灰度级为 r_k 的像素个数, L 为图像中可能的灰度级总数。式(3.3.4)中变换函数的离散形式为:

$$\begin{aligned} s_k = T(r_k) &= \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

因此,已处理的图像(即输出图像)由通过式(3.3.8),将输入图像中灰度级为 r_k 的各像素映射到输出图像中灰度级为 s_k 的对应像素得到。如前所述,作为 r_k 的函数 $P_r(r_k)$ 的曲线称做直方图。式(3.3.8)给出的变换(映射)称做直方图均衡化或直方图线性化。不难得出式(3.3.8)的变换函数满足本节前边所述的条件(a)和(b)(见习题 3.9)。

与连续形式不同,一般不能证明离散变换能产生均匀概率密度函数的离散值(为均匀直方图)。不论怎样,可以很容易地看出,式(3.3.8)的应用有展开输入图像直方图的一般趋势,以

至于直方图均衡化过的图像灰度级能跨越更大的范围。

在本节前面讨论了具有覆盖整个灰度范围的灰度级值的许多优点。除了产生有这样趋势的灰度级,刚才推导的方法还具有另一个优点,即它完全“自动化”。也就是说,已知一幅图像,直方图均衡化处理仅仅涉及执行式(3.3.8),该式基于能直接从已知图像提取的信息,不需要更多的参数说明。我们也注意到计算简单性是应用这一技术的要求。

从 s 回到 r 的反变换形式表示为:

$$r_k = T^{-1}(s_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3.9)$$

只要灰度级 $r_k (k=0, 1, 2, \dots, L-1)$ 均出现于输入图像,就可看出(见习题 3.9)式(3.3.9)的反变换满足此节前面给出的条件(a)和(b)。尽管反变换不用于直方图均衡化,但它在下节研究的直方图匹配方案中起核心作用。下节中还要详细讨论如何运用直方图处理技术。

例 3.3 直方图均衡化

图 3.17(a)显示了图 3.15 的四幅图像,图 3.17(b)显示了对这些图像中的每一个执行直方图均衡化后的结果。前三种结果(从上到下)显示了重要改进效果。如预期的那样,直方图均衡化在第四幅图像中没有在视觉上产生重要不同,这是因为这幅图像的直方图已扩展了全部灰度级范围。用于产生图 3.17(b)的变换函数被示于图 3.18。这些函数由原始图像[见图 3.15(b)]经式(3.3.8)产生。注意,变换(4)有一基本线性形状,再次表明第四幅输入图像灰度级几乎为均匀分布。如刚才所说的,我们希望直方图均衡化在这种情况下对图像表现没有影响。

均衡化后的图像直方图示于图 3.17(c)。有趣的是,当这些直方图不同时,直方图均衡化后的图像本身在视觉上很相似。但这并非不希望的,因为左侧的一系列图像之间的差异仅仅是一种简单对比,而不是内容上的。也就是说,因为图像有相同的内容,从直方图均衡化导致的对比增强足以使得结果图像中,在视觉上难以区分灰度级的差别。在左侧一系列的图像中给出了有意义的差别对比,这个例子说明了直方图均衡化作为适应性强的增强工具的强大作用。

3.3.2 直方图匹配(规定化)

如前所述,直方图均衡化能自动地确定变换函数,该函数寻求产生有均匀直方图的输出图像。当需要自动增强时,这是一个好方法,因为由这种技术得到的结果可预知,并且这种方法操作简单。我们在本节中还指出,有一些应用用均匀直方图的基本增强并不是最好的方法。尤其是,有时可以指定希望处理的图像所具有的直方图形状。这种用于产生处理后有特殊直方图的图像的方法,叫做直方图匹配或直方图规定化处理。

方法的推导

让我们回到连续灰度级 r 和 z (看做连续随机变量),令 $P_r(r)$ 和 $P_z(z)$ 为它们对应的连续概率密度函数。在这里, r 和 z 分别代表输入和输出(已处理)图像的灰度级。从输入图像估计 $P_r(r)$, 而 $P_z(z)$ 为希望输出图像具有的规定概率密度函数。

令 s 为一随机变量,且有:

$$s = T(r) = \int_0^r P_r(w) dw \quad (3.3.10)$$

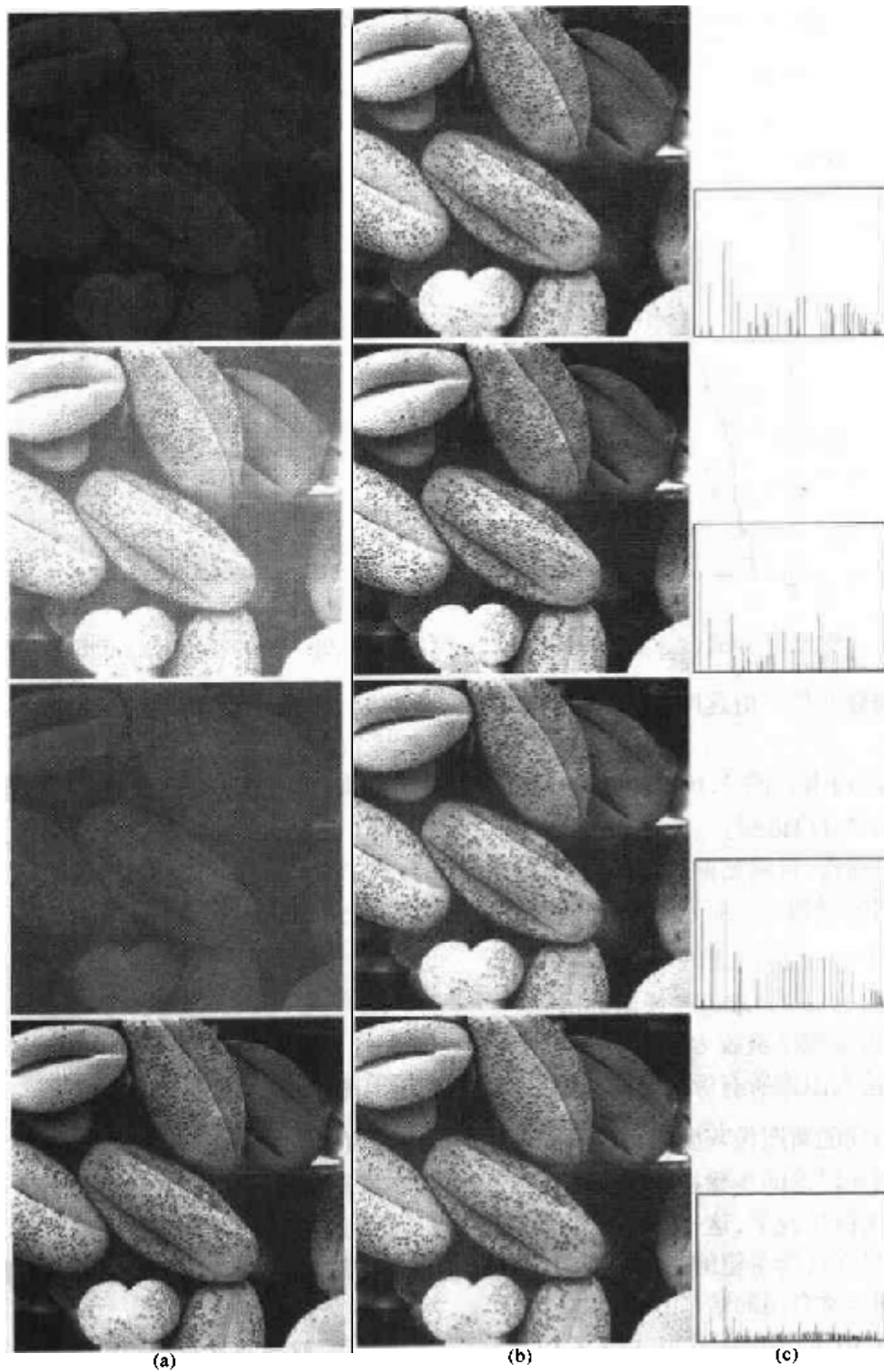


图 3.17 (a)图 3.15 的图像, (b)直方图均衡化的结果, (c)相应的直方图

其中 w 为积分变量。我们发现这个表达式为式(3.3.4)直方图均衡化的连续形式。然后假设定义随机变量 z , 且有:

$$G(z) = \int_0^z p_i(t) dt = s \quad (3.3.11)$$

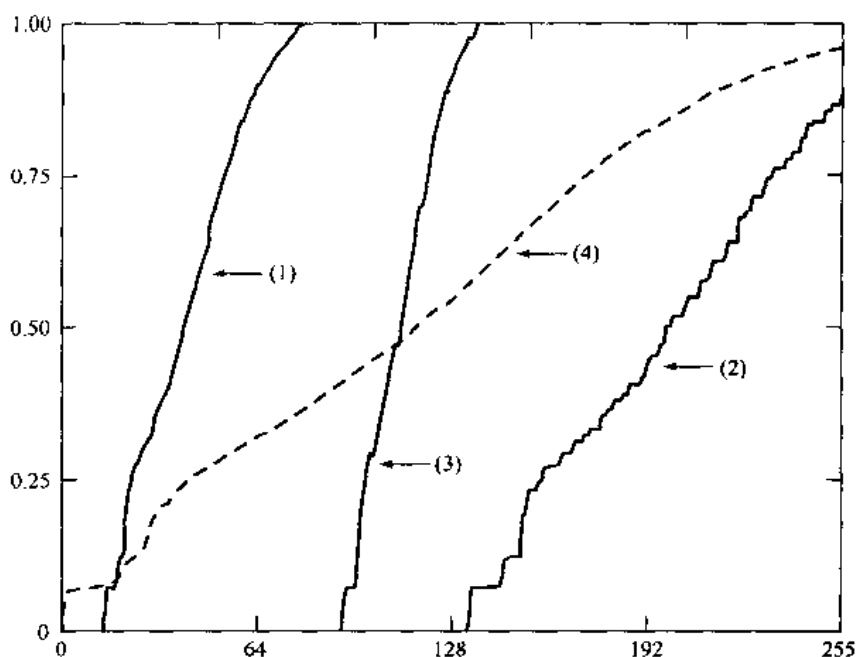


图 3.18 用式(3.3.8),从图 3.17(a)中的图像直方图得到的变换函数(1)到(4)

其中 t 为积分变量。由这两个等式可得到 $G(z) = T(r)$, 因此, z 必须满足条件:

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)] \quad (3.3.12)$$

变换函数 $T(r)$ 由式(3.3.10)得到, $p_r(r)$ 由输入图像估值。类似地, 变换函数 $G(z)$ 因 $p_z(z)$ 已知而由式(3.3.11)得到。

设 G^{-1} 存在, 且满足前一节所述条件(a)和(b), 式(3.3.10)到式(3.3.12)说明用下列步骤可由输入图像得到一个有规定概率密度函数的图像:

- (1) 由式(3.3.10)求得变换函数 $T(r)$ 。
- (2) 由式(3.3.11)求得变换函数 $G(z)$ 。
- (3) 求得反变换函数 G^{-1} 。
- (4) 对输入图像所有像素应用式(3.3.12)得到输出图像。

以上步骤得到的新图像灰度级具有事先规定的概率密度函数 $p_z(z)$ 。

尽管刚才讨论的步骤在理论上可直接进行, 但在实践中得到 $T(r)$ 和 G^{-1} 却不太可能。幸运的是, 在离散情况下, 这一问题在相当大的程度上被简化了。付出的代价与直方图均衡化是相同的, 这里仅仅所希望的直方图近似是可以获得的。然而, 尽管如此, 即使用很粗糙的近似也可以得到非常有用的结果。

式(3.3.10)的离散公式由式(3.3.8)给出, 为便于学习, 这里再次列出:

$$\begin{aligned} s_k &= T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

其中 n 为图像中像素的数量和, n_j 为灰度级为 r_j 的像素数量, L 为离散灰度级的数量。类似地, 式(3.3.11)的离散表达式由给定的直方图 $p_z(z_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, L-1$) 得到, 且有形式:

$$v_k = G(z_k) = \sum_{i=0}^k p_z(z_i) = s_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3.14)$$

如连续情况,我们寻找满足等式的 z 值。为后续讨论清楚起见,变量 v_k 附在这里。最后,式(3.3.12)的离散形式由下式给出:

$$z_k = G^{-1}[T(r_k)] \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3.15)$$

或由式(3.3.13)得到:

$$z_k = G^{-1}(s_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3.16)$$

式(3.3.13)到式(3.3.16)是数字图像直方图匹配的基本公式。式(3.3.13)是基于原始图像直方图,从原始图像灰度级到对应灰度级 s_k 的映射,该原始图像的直方图从图像的像素计算得到。式(3.3.14)从给定的直方图 $p_z(z)$ 计算变换函数 G 。最后,式(3.3.15)或等价的式(3.3.16)给出了此直方图的图像所希望的灰度级(的近似)。前两式因其量均已知而很容易实现。式(3.3.16)可直接实现,但需要附加说明。

实现

我们由以下说明开始:(1)灰度级 $\{r_j\}$, $\{s_j\}$ 和 $\{z_j\}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, L-1$) 的每一个集合为 $L \times 1$ 维的一维阵列;(2)所有从 r 到 s 和从 s 到 z 的映射都是给定像素值和这些阵列间的简单查表过程;(3)这些阵列的每个元素(如 s_k)包括两条重要信息,即下标 k 表示元素在阵列中的位置, s 表示该位置的值;(4)只关心整数像素值。例如,在一个 8 比特图像中, $L = 256$,且阵列中每个元素所涉及的范围为 0 到 255 的整数。这就是说,现在处理的灰度级在区间 $[0, L-1]$,而不是前面用于简化直方图处理技术的归一化区间 $[0, 1]$ 。

为了知道直方图匹配实际上如何进行,考虑图 3.19(a)并暂时忽略此图和图 3.19(c)的联系。图 3.19(a)显示了一假设的由给定图像得到的离散变换函数 $s = T(r)$ 。图像中第一个灰度级 r_1 映射到 s_1 ,第二个灰度级 r_2 映射到 s_2 ,第 k 个灰度级 r_k 映射到 s_k ,等等(这里最重要的一点是这些值之间的对应顺序)。阵列中的每一个值 s_j 用式(3.3.13)预先进行计算,因此,映射处理仅仅使用像素的实际值作为阵列中的索引来决定相应的 s 值。这个过程非常简单,因为我们处理的是整数。例如,对于 8 比特像素其值为 127 的映射 s ,将在阵列 $\{s_j\}$ 中可能的 256 个位置中的第 128 个位置找到(记住,我们是从 0 开始的)。如果我们现在停止,并为输入图像的每一个像素值用上述方法进行映射,根据式(3.3.8),将输出直方图均衡化了的图像。

为了执行直方图匹配,必须再进行一步操作。图 3.19(b)是一个由给定直方图 $P_z(z)$ 用式(3.3.14)得到的一个假设的变换函数 G 。对每一个 z_q ,这个变换函数得到一个对应的值 v_q 。这个映射由图 3.19(b)的箭头符示出。相反,若已知任意 v_q 值,可以由 G^{-1} 得到对应的值 z_q 。根据这幅图,我们可以倒转箭头符方向而由 v_q 映射到 z_q 。不管怎样,由式(3.3.14)的定义知道由对应的下标有 $v = s$,因此,可以确切地利用这种处理找到任意对应于 s_k 的值 z_k , z_k 是从等式 $s_k = T(r_k)$ 计算得来的。这一思想示于图 3.19(c)。

因为的确不知道 z 的值(找到这些值恰好是直方图匹配的目标),所以必须借用某种迭代方案由 s 找到 z 。事实上,由于处理的是整数使得这一过程变得尤为简便。从根本上说,因为 $v_k = s_k$,由式(3.3.14)可知,所找的 z 值必须满足等式 $G(z_k) = s_k$,或者 $G(z_k) - s_k = 0$ 。

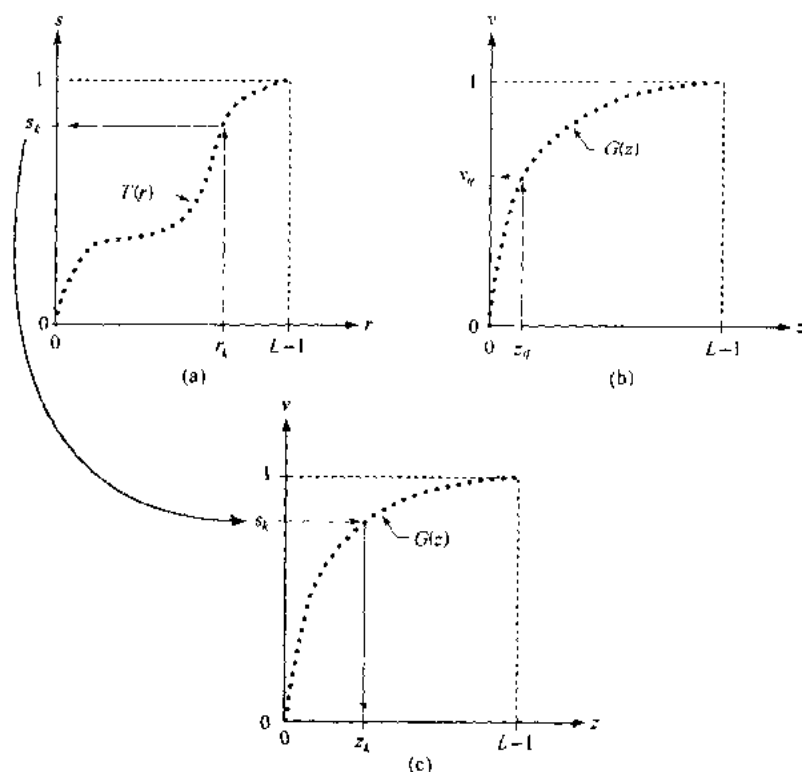


图 3.19 (a)经 $T(r)$ 从 r_k 到 s_k 映射的图解, (b)经 $G(z)$ 从 z_q 映射到其相应的值 v_q , (c)从 s_k 到其相应的值 z_k 的逆映射

因此,要找到 s_k 所对应的值 z_k ,只需在 z 值上迭代,以满足等式(此时, $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$)。式(3.3.16)也一样,除了不要求 G 的反函数,这是因为我们正对 z 迭代。因为处理的是整数,所能得到的满足等式 $(G(z_k) - s_k) = 0$ 最接近的整数,对每一个 k 值使 $z_k \approx \hat{z}$, 其中 $\hat{z}$ 是区间 $[0, L-1]$ 中最小的整数,即:

$$(G(\hat{z}) - s_k) \geq 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3.17)$$

给定一个值 s_k , 关于图 3.19(c) 概念上应从 $\hat{z} = 0$ 开始, 且以整数步长逐渐增加至满足式(3.3.17), 在该点上, 我们令 $z_k = \hat{z}$ 。重复这一过程, 每一个 k 值都得到所需要的从 s 到 z 的映射, 这就实现了式(3.3.16)。事实上, 我们不必每次都从 $\hat{z} = 0$ 开始, 因为 s_k 值已知是单调递增的。因此, 对于 $k = k+1$, 可以从 $\hat{z} = z_k$ 开始, 并以整数递增。

对刚才实现的直方图匹配的操作步骤可总结如下:

1. 求出已知图像的直方图。
2. 利用式(3.3.13)对每一灰度级 r_k 预计算映射灰度级 s_k 。
3. 利用式(3.3.14)从给定的 $P_z(z)$ 得到变换函数 G 。
4. 利用式(3.3.17)定义的迭代方案对每一个 s_k 值预计算值。
5. 对于原始图像的每个像素, 若像素值为 r_k , 将该值映射到其对应的灰度级 s_k ; 然后映射灰度级 s_k 到最终灰度级 z_k 。

利用步骤(2)和步骤(4)的预计算值进行映射。注意步骤(5)对被处理图像的每个像素进行了两次映射。第一次映射仅仅是直方图均衡化。如果经直方图均衡化了的图像不是所要求的,

显然,为了节省一次中间步骤,将两次变换结合为一次是有利的。

最后,注意到,甚至在离散情况下,都需要考虑 G^{-1} 要满足前一节中的条件(a)和(b)。不难看出(习题3.9),保证 G^{-1} 为单值且单调的惟一方法是要求 G 严格单调(也就是一直增加),这仅仅意味着规定化直方图 $P_r(z_i)$ 在式(3.3.14)中没有零值。

例 3.4 直方图均衡化和直方图匹配间的比较

图 3.20(a)显示了火星的卫星(Phobos)图像,该图像由 NASA 的表面探测器拍摄。图 3.20(b)显示了图 3.20(a)的直方图。图像主要是大片的暗区域,产生了像素集中于灰度级暗端的直方图特点。猛一看,会觉得直方图均衡化是图像增强的一个好办法,使暗区域的细节更清楚。而下面的讨论将证明事实并非如此。

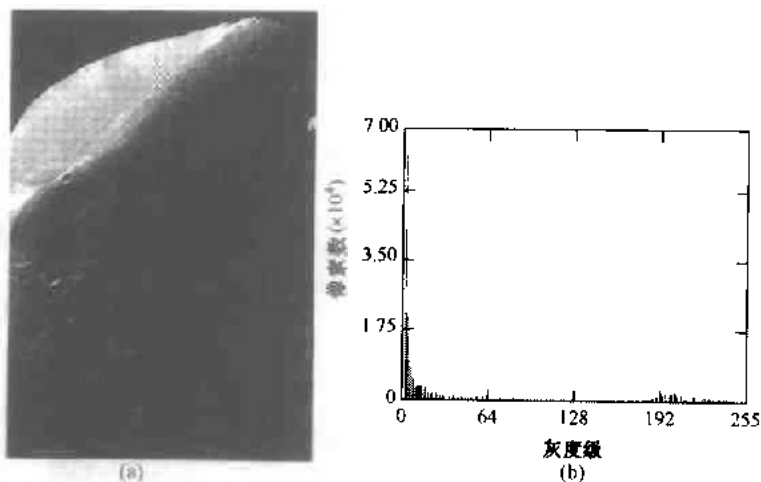


图 3.20 (a)由 NASA 表面探测器拍摄的火星卫星图像,(b)直方图(原图像由 NASA 提供)

图 3.21(a)显示了由图 3.20(b)所示的直方图得到的直方图均衡化变换[式(3.3.8)或式(3.3.13)]。这个变换函数最相关的特性是快速地从灰度 0 升到接近 190。这是因为输入直方图中有大量的像素灰度很接近 0。当这种变换应用于输入图像的灰度以获得直方图的均衡效果时,净效果是把非常窄的暗像素区间映射到输出图像灰度级的高端。因为输入图像的大量像素在此区间有精确的灰度值,我们希望图像能够有一个亮的、看起来“冲淡”了的外观。如图 3.21(b)所示,情况就是如此,这个图像的直方图示于图 3.21(c),注意,所有灰度级基本上都偏向于灰度范围的上半部。

由于图 3.21(a)中变换函数的问题是由原图中大量灰度接近于 0 的像素引起的,故以一种合理的方法修改图像的直方图,以便使其不再有这一属性。图 3.22(a)显示了一个人为指定的函数,它保持了原有直方图的形状,但在图像灰度暗区的灰度值却有一个平滑的变化。对这个函数取样为 256 个等间隔的离散值,以产生所需的规定化直方图。使用式(3.3.14)从这一直方图得到的变换函数 $G(z)$,在图 3.22(b)中标注为变换(1)。类似地,由式(3.3.16)导出的反变换函数在图 3.22(b)中标注为变换(2)[这个函数是通过讨论过的关于式(3.3.17)的迭代技术得到的]。图 3.22(c)中增强的图像是对图 3.21(b)中直方图均衡化后的像素用变换(2)得到的。比较这两幅图像可以看出,在用直方图均衡化得到的结果的基础上,对直方图规定化处理的改进是很有意义的。注意到,原始直方图适度

的改变对在图像增强中得到有效的改进是很有必要的。图 3.22(c) 的直方图示于图 3.22(d)。这个直方图最容易辨别的特征是低端如何根据需要移到较亮的右端。

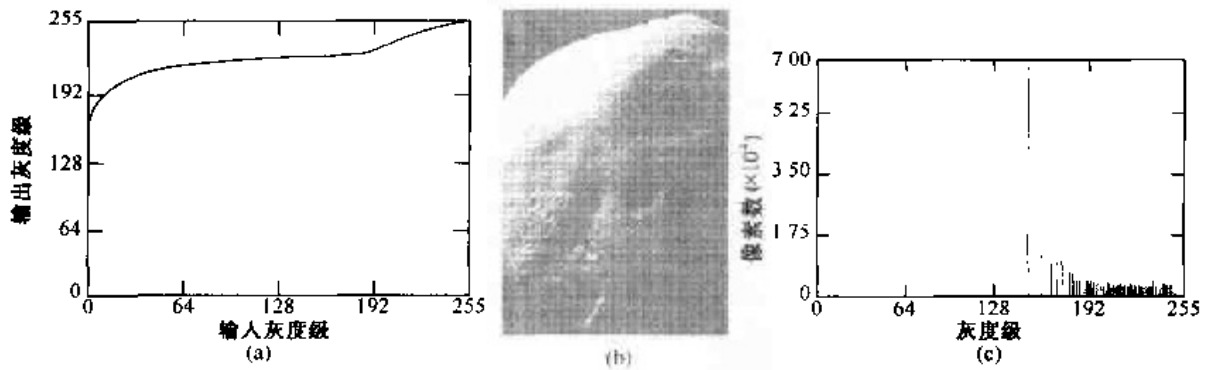


图 3.21 (a)直方图均衡化变换函数,(b)直方图均衡过的图像(注意,类似“冲洗”过的外观),(c)(b)的直方图

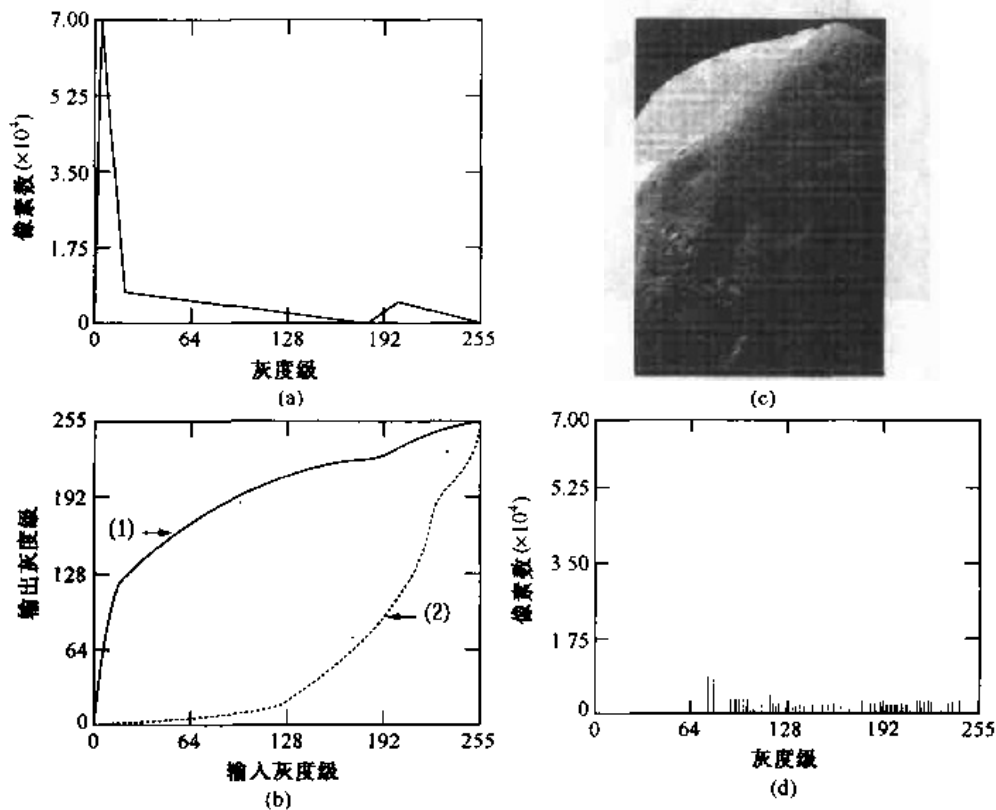


图 3.22 (a)规定的直方图,(b)曲线(1)是用(a)中直方图从式(3.3.14)得到的,曲线(2)用式(3.3.17)迭代得到,(c)用曲线(2)映射增强的图像,(d)(c)的直方图

虽然到现在为止对直方图均衡可能已很清楚了,但我们在结束这一部分之前要强调直方图规定化在大多数时候都是试凑过程。有时有可能会遇到这样的情况,即定义“平均”直方图的外观,并把它用做规定化的直方图。在这种情况下,直方图规定化变成了直接处理。不管怎样,总的来说,并没有规定化直方图的规定,对于任何一个给定的增强任务都必须借助于实际分析。

3.3.3 局部增强

前两节讨论的直方图处理方法是全局性的,在某种意义上,像素是被基于整幅图像灰度满意度的变换函数所修改的。这个全局方法适用整个图像的增强,但有时对图像小区域细节的局部增强也仍然是适用的。在这些区域中像素数在全局变换的计算中可能被忽略,因为它们没有必要确保局部增强。解决的方法就是在图像中每一个像素的邻域中,根据灰度级分布(或其他特性)设计变换函数。虽然基于邻域的处理方法是3.5节的主题,但在这里讨论局部直方图处理是为了内容的清楚和完整性。这样读者在后续讨论中不会遇到什么困难。

以前描述的直方图处理技术很容易适应局部增强,该过程定义一个方形或矩形的邻域并把该区域的中心从一像素移至另一像素。在每一个位置的邻域中该点的直方图都要被计算,并且得到的不是直方图均衡化就是规定化变换函数。这个函数最终被用来映射邻域中心像素的灰度。相邻区域的中心然后被移至相邻像素位置并重复这个处理过程。当对某区域进行逐像素转移时,由于只有邻域中新的一行或一列改变,所以可以在每一步移动中,以新数据更新前一个位置获得的直方图(习题3.11)。这种方法相比邻域每移动一个像素就对基于所有像素的直方图进行计算,有明显的优点。有时使用非重叠区域是减少计算量的另一种方法。但是这种方法通常会出现不希望的棋盘效果。

例3.5 局部直方图增强

图3.23(a)显示了一幅被轻度模糊以减少噪声的图像(参看3.6.1节关于模糊的内容)。图3.23(b)显示了全局直方图均衡化的结果。当这种技术用于平滑噪声区域时,情况经常如此,如图3.23(b)所示,对比度稍微提高,噪声就会明显地增强。可以说,这种方法没有带来新的结构性细节。然而,局部直方图均衡化使用了一个 7×7 的邻域以显示在大的暗方形中的小方形。大小方形在灰度上很接近,但小方形的尺寸太小,故对全局直方图均衡化的影响不大。也应注意图3.23(c)中有细的噪声纹理,这是在小邻域使用局部处理的结果。

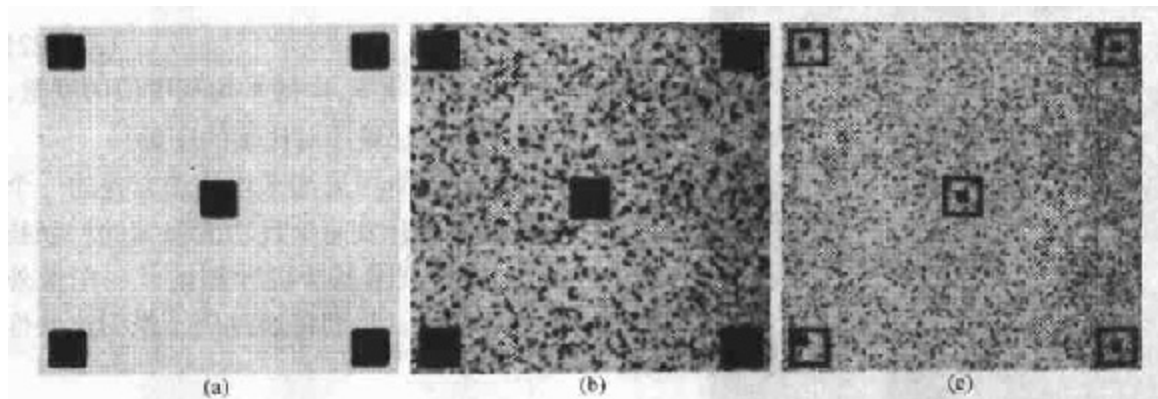


图3.23 (a)原像,(b)全局均衡化的结果,(c)对每一个像素用 7×7 邻域局部均衡化的结果

3.3.4 在图像增强中使用直方图统计学

尽管可以直接使用直方图对图像进行增强,但是我们也可以使用直接从直方图获得的统计参数。令 r 表示在区间 $[0, L-1]$ 上代表离散灰度的离散随机变量,并且令 $p(r_i)$ 代表对应于 r 的第 i 个值的归一化直方图分量。正如在本节前面指出的,可以把 $p(r_i)$ 看做灰度级 r_i 出