

现,许多情况中增强的主要目标是得到一幅较高视觉细节内容的图像。

小结

本章提供的材料是实践中空间域图像增强有代表性的常用技术。图像处理这一领域是生机勃勃的领域,其新技术和新应用经常可以在一些专业著作和新产品发布中看到。因此,本章中包含的题目都是一些基础材料,可以作为理解增强技术发展状况以及在该领域进一步学习的基础。除了图像增强之外,本章还介绍了一些概念,比如用空间掩模滤波的概念,它在本书的其他章节中还会用到。在接下来一章中,将在频率域综合讨论图像增强。通过这两章的学习,读者可以在图像处理中所使用的术语和最基础的工具方面打下一个坚实的基础。在图像增强中介绍的这些工具将有助于理解如何处理数字图像。

参考资料

3.1 节中的材料来自 Gonzalez [1986]一书。3.2 节中材料的辅助读物可以参见 Schowengerdt [1983], Poyton [1996]以及 Russ [1999]。还可以参阅 Tsujii 等人 [1998]的论文,这被认为是关于图像显示的最佳材料。直方图处理方面的早期参考书有 Hummel [1974], Gonzalez 和 Fittes [1977]以及 Woods 和 Gonzalez [1981]。Stark [2000] 对自适应对比度增强的直方图均衡处理给出了重要概括。对比度增强的其他方法由 Centeno 和 Haertel [1997] 以及 Cheng 和 Xu [2000]进行了示例说明。对于理想图像模型的增强处理可见 Highnam 和 Brady [1997]的著作。作为局部直方图均衡化处理方法的补充可以参考 Caselles 等人 [1999]以及 Zhu 等人 [1999]的材料。对于图像增强的局部统计实现和应用可以参考 Narendra 和 Fitch [1981]的著述。Kim 等人 [1997] 介绍了梯度处理与局部统计处理相结合的图像增强技术。

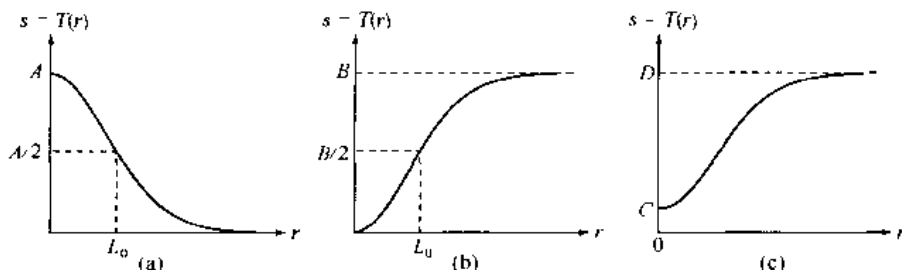
图像的减法处理(3.4.1 节)是一种广泛使用的用于变化检测的普通图像处理工具。正如在那一节中所提到的,数字图像相减处理的主要应用之一是掩模模式射线照相术。这种处理中病人移动是最大的问题,因为移动会使图像变得模糊不清。在图像相减时移动的问题近年来受到了很大的重视,正如 Meijering 等人 [1999]的综述文章中解释的那样。利用图像求平均减少噪声的方法(见 3.4.2 节)由 Kohler 和 Howell [1963]首次提出。可以参考 Peebles [1993]关于随机变量之和的方差与均值的期望值部分。

此外,对于线性空间滤波器及其实现,可以参考 Umbaugh [1998], Jain [1989], 以及 Rosenfeld 和 Kak [1982]的材料。Rank-order 滤波器在这些参考材料中也有讨论。Wilburn [1998]也概括地介绍了 Rank-order 滤波器。在 Pitas 和 Venetsanopoulos [1990]的著作中谈到了中值滤波器和其他非线性滤波器。在《IEEE 图像处理学报》[1996]的专刊中介绍了非线性图像处理的内容。有关高提升滤波的内容可以在 Schowengerdt [1983]中找到。在讨论图像复原(第 5 章)和边缘检测(第 10 章)时,我们还会遇到本章中介绍的许多空间滤波器。

习题

3.1 α 为正常数的指数式 $e^{-\alpha^2}$ 对于构造灰度平滑变换函数是非常有用的。由这个基本函

数开始,构造具有下图形状的转变函数。所示的常数是输入参数,并且提出的变换必须包含这些参数特定的形式(为了答案简单第三条曲线中的 L_0 不是所要求的参数)。



3.2 ★(a) 试求出实现示于图 3.2(a)的对比度展宽变换的连续函数。此函数不仅包含参数 m ,而且还包括参数 E ,以便于控制灰度值由低向高转化时的函数斜率。该函数应归一化,以使它的最小值和最大值分别为 0 和 1。

(b) 作为参数 E 的函数,设计一组变换, m 值固定为 $L/2$, L 是图像中灰度的级数。

(c) 为使函数如图 3.2(b)的函数那样有效地执行, s 的最小值是什么? 换句话说,你的函数与图 3.2(b)可以不同。它仅仅有“产生二值图像”这一相同的处理结果。假定用 8 比特图像进行处理,并使 $m = 128$ 。另外,令 C 为在你使用的计算机中所能表示的最小正数。

3.3 提出一组能够产生 8 比特单色图像所有单独位平面的灰度分层变换(例如,变换函数 $T(r)$,当 r 在 $[0, 127]$ 范围内时, $T(r) = 0$,而当 r 在 $[128, 255]$ 范围内时, $T(r) = 255$,此函数可以产生一幅 8 比特图像的第 7 位平面图像)。

3.4 ★(a) 通常,如果将低阶比特面设为零值,对一幅图像的直方图有何影响?

(b) 如果将高阶比特面设为零值将对直方图有何影响?

★3.5 试解释为什么离散直方图均衡化技术一般不适用于平坦的直方图?

3.6 假定我们对一幅数字图像进行直方图均衡化处理,试说明:第二次直方图均衡化处理的结果与第一次直方图均衡化处理的结果相同。

3.7 在实际应用中,将输入图像的直方图模型化为高斯概率密度函数,其概率密度函数形式为:

$$p_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 m 和 σ 分别是高斯 PDF 的平均值与标准差。具体处理方法是将 m 和 σ 看做给定图像的平均灰度级和对比度,试求出直方图均衡化的变换函数。

★3.8 假设图像的像素值是连续的,用一个例子说明,有可能存在这样的情况,即由式(3.3.4)给出的变换函数满足 3.3.1 节中的条件(a)和(b),但其反变换却不能满足单值条件。

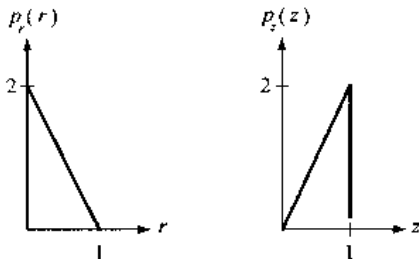
3.9 (a) 证明式(3.3.8)中给出的离散变换函数对直方图均衡化处理满足 3.3.1 节中(a)和(b)两个条件。

(b) 举例证明式(3.3.9)所表示的离散直方图反变换一般不符合上述两个条件。

★(c) 证明在灰度 r_k 不丢失的情况下($k = 0, 1, \dots, L-1$),式(3.3.9)所表示的离散直方

图反变换才符合 3.3.1 节中的条件(a)和(b)。

- 3.10** 一幅图像的灰度 PDF, $p_r(r)$ 示于下图。现对此图像进行灰度变换, 使其灰度表达式为下面右图的 $p_z(z)$ 。假设灰度值连续, 求完成这一要求的变换(r 到 z)。



- ★**3.11** 试提出一种如 3.3.3 节中讨论的局部增强技术的局部直方图修改方法。

- 3.12** 有两幅图像 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$, 其直方图分别为 h_f 和 h_g 。给出了能确定直方图的条件, 并简述在每种情况下, 如何得到直方图。

- (a) $f(x, y) + g(x, y)$
- (b) $f(x, y) - g(x, y)$
- (c) $f(x, y) \times g(x, y)$
- (d) $f(x, y) \div g(x, y)$

- 3.13** 考虑两幅 8 比特图像, 它们的灰度覆盖了整个 $[0, 255]$ 的范围。

- (a) 讨论反复将图像(b)从图像(a)中减去的最终结果。
- (b) 如果把图像的顺序颠倒会得到不同的结果吗?

- ★**3.14** 图像相减处理常用于工业中, 如在生产装配线上检测丢失的元件。这种方法首先要存入一幅“金”图像, 即组装正确的图像; 然后将相同产品的输入图像减去这幅图像。当然, 如果新产品组装正确的话, 它们的差为 0。如果产品丢失了元件, 那么差值图像在该区域与正确图像不同, 不是 0。你认为在实践中用这种方法应满足什么条件?

- 3.15** 证明式(3.4.4)和式(3.4.5)的正确性。

- 3.16** 在工业应用中, X 光摄影法用来检查组合铸件的内部结构。其目的是发现铸件内部是否有缝隙, 这些缝隙在图像中一般表现为小气泡。但是, 由于铸件材料的性质以及我们使用的 X 线能量, 较高的噪声常会导致检查困难, 所以我们决定使用图像均值处理来减小噪声和改进视觉对比度。在计算均值的过程中, 为减少时间, 在成像中保留固定分块以尽可能保持小的图像数量非常重要。经过数次实践, 发现块数为 10 时噪声的方差明显地减小了。如果成像装置每秒产生 30 幅图像, 那么在成像时保持固定块数而想达到预先要求的铸件噪声方差的减小量, 需要多少时间? 假设图像中的噪声为非相关的且其均值为 0。

- 3.17** 线性空间滤波处理要求在整幅图像中移动掩模的中心点, 在每个处理区域中, 计算掩模系数与该区域相应像素值乘积的总和(参见 3.5 节)。在低通滤波器中, 所有的系数和为 1, 我们使用所谓的盒滤波法或移动均值算法(这种方法一次只更新掩模计算的一部分, 并从一部分到另一部分顺次进行)。

- ★(a) 对一个 $n \times n$ 的滤波器公式化这样一个算法, 说明涉及的计算规律, 以及围绕图像移动掩模时所用的扫描序列。

(b) 使用大规模处理的运算量与盒式滤波算法执行的运算量的比值称为“计算优势”。在本例中求出计算优势并作为 n 的函数,其中 $n > 1$ 。由于这两种处理方法的标定系数都是 $1/n^2$,因此,在获得计算优势时,根本不用考虑它的影响。假设图像有为 0 的外部轮廓,这个轮廓足够厚,完全可以忽略它在处理过程中的影响。

3.18 讨论用一个 3×3 低通空间滤波器反复对一幅数字图像处理的结果,可以不考虑边界的影响。

3.19 ★(a) 在 3.6.2 节中谈到,分布在图像背景上的孤立的亮和暗的像素团块,当它们小于中值滤波器区域的一半时,经过中值滤波器处理后会被滤除(被其邻值同化)。假定滤波器尺寸为 $n \times n$, n 为奇数,请解释这种现象的原因?

(b) 考虑一幅有不同像素团块的图像,假设在一个团块内的所有点都比背景亮或者暗(但不是同时既比背景亮又比背景暗),并且每个团块的尺寸不大于 $n^2/2$ 。试求当 n 符合什么条件时,有一个或多个这样的团块像(a)中所说的那样被分离出来?

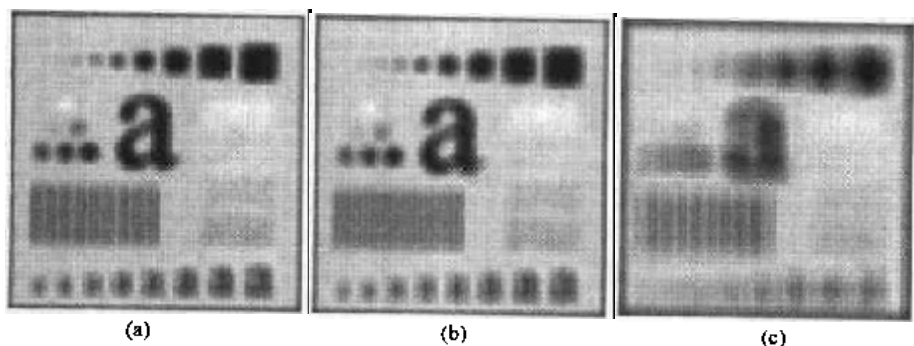
★**3.20** (a) 试提出一种过程来求一个 $n \times n$ 邻域的中值?

(b) 试提出一种技术,逐像素地移动邻域的中心来更新中值。

3.21 (a) 在识别的应用领域,文本页通过图 3.2(b)所示的阈值变换函数简化为二值图像。这遵循如下过程,即细化字符直到它们成为全“0”背景上的一串“1”。由于有噪声存在,故二值化和细化处理时,导致在连 1 处有缝隙存在,缝隙有 1 到 3 个像素宽。修复缝隙的一种方法是,对二值图像使用均值掩模来模糊它,这样会在缝隙间桥接非零像素。试求出能执行该任务的均值掩模的最小尺寸?

(b) 桥接缝隙后,为了转换回二值形式,要进行阈值处理。在(a)中得出的答案中,完成这一任务且不产生断线所要求的最小阈值是什么?

★**3.22** 以下的三幅图像是分别通过 $n = 23, 25$ 和 45 的方形均值掩模处理后的模糊图像。图(a)和(c)中左下角的垂直竖条被模糊了,但竖条与竖条之间的分割仍然很清楚。但图(b)中的竖条却已经融入了整幅图像,尽管产生这幅图像的掩模要比处理图像(c)的小得多,请解释这一现象。



3.23 考虑如图 3.36 所示的应用,即消除图像中比 $q \times q$ 像素大小的方形包围的物体小的目标。假设想要将目标的平均灰度减少为原来平均灰度的 $1/10$ 。用这种方法,那些目标可以接近背景灰度并用门限法消除。给出平均掩模的最小尺寸(奇数),该掩模仅对整幅图像处理一次就可将平均灰度级减少到所希望的程度。

3.24 在给定的应用中,一个均值掩模被用于输入图像以减少噪声,然后再用一个拉普拉斯掩模来增强图像中的小细节,如果将这两个步骤交换一下,结果是否会相同?

★**3.25** 证明如式(3.7.1)所示的拉普拉斯变换是各向同性的(旋转不变)。需要下列轴旋转 θ 角的坐标方程:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

其中 (x, y) 为非旋转坐标,而 (x', y') 为旋转坐标。

3.26 试求一个 3×3 的反锐化掩模来对一幅图像进行一次掩模处理。

★**3.27** 使用式(3.7.4)给出的拉普拉斯变换的定义,证明将一幅图像减去其相应的拉普拉斯图像等同于对图像做反锐化掩模处理。

3.28 (a) 证明式(3.7.13)给出的梯度值是一种各向同性的操作过程(见习题 3.25)。

(b) 证明如果梯度用式(3.7.14)进行计算将使其失去各向同性的性质。

3.29 CCD 电视摄像机用于每天 24 小时、每月 30 天的对同一区域进行的长期观测研究。每 5 分钟拍取一次数字图像并传送到中心位置。场景的照明,白天为自然光,晚上为入造光,没有无照明的时间,因此,总可以获得一幅图像。由于照明的范围总是在摄像机的线性工作区,因此,摄像机本身并不需要使用任何补偿装置。另外,决定使用数字技术对图像进行后处理并进行归一化,这样,图像与恒定照明是等效的。对此,设计一种方法。可以在实验室内使用希望的任何方法,但要在设计中明确列出所做的所有假设。

第4章 频率域图像增强

尽管在前一章中已着重讲述了图像增强的空间技术,但如果不了解傅里叶变换和频率域在图像处理中如何应用的基本知识,要彻底地理解这一领域也是不太可能的。你不必是一位信号处理专家就可对这些主题有深刻理解。关键在于要集中精力于原理和与数字图像处理有关的内容上。表示法——通常是初学者感到困难的根源——在此章中重点阐述,并强调图像特征与表示这些特征的数学工具之间的联系。本章主要是帮助读者建立对傅里叶变换和频率域的基本理解,以及明确如何将它们应用于图像增强上。而后,在第5章、第8章、第10章和第11章中,将讨论傅里叶变换的其他应用。

本章从傅里叶变换的起源和其应用于数学、科学及工程的多个分支的概况开始简单谈起。然后,介绍傅里叶变换及频率域,阐明表示法以及这些工具对于图像增强十分有用的原因。接下来是与在第3章中讨论的空间平滑和锐化滤波技术(除了在频率域中进行的所有滤波)相对应的部分。还要讨论傅里叶变换对于图像增强的其他应用,最后,用在图像处理中实现傅里叶变换问题的探讨总结本章内容。

4.1 背景

法国数学家傅里叶生于1768年,他被世人铭记的最大贡献记载在1807年的传记中和后来出版于1822年的“*La Théorie Analytique de la chaleur*”(热分析理论)一书中。此书由Freeman(参见Freeman[1878])在55年后翻译为英文。傅里叶在这个特殊领域的贡献是他指出任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和/或余弦和的形式,每个正弦和/或余弦乘以不同的系数(现在称这个和为傅里叶级数)。无论函数有多么复杂,只要它是周期的,并且满足某些软的数学条件,都可以用这样的和来表示。我们现在认为理所应当,但在它第一次出现的时候,这个革命性的概念被全世界的数学家“纠正”了一个世纪。在那时,在数学思想中函数的规律性是占主导的。基于这样的传统思想,复杂函数可以由简单的正弦和余弦之和来表示的概念根本不直观(如图4.1所示),所以傅里叶的想法遭到怀疑是不足为奇的。

甚至非周期的函数(但是这些领域是在曲线是有限的情况下)也可以用正弦和/或余弦乘以加权函数的积分来表示。在这种情况下公式就是傅里叶变换,它的应用在大多数实际应用中比傅里叶级数更广泛。用傅里叶级数或变换表示的函数特征可以完全通过傅里叶反过程来重建,不丢失任何信息。这是这些表示法的最重要特征之一,因为它可以使我们的工作于“频率域”,而且在转换回函数的原始域时不丢失任何信息。

总之,傅里叶级数和变换是解决实际问题的工具,它被广泛地使用并作为基础工具学习。傅里叶最初想法的应用是在热扩散领域,人们考虑用微分方程的公式表示热流动,用这种方法第一次获得了结论。在过去的一个世纪里,尤其是后50年,傅里叶的思想使整个工业和学术界都空前繁荣。在20世纪50年代后期,数字计算的出现和快速傅里叶变换算法的“发明”在信号处理领域产生了巨大变革。这两个核心技术第一次允许对人类本身的特殊信

号和工业的重要信号(从医学监视器和扫描仪到现代电子通信),进行实际处理和有意义的解释。

这里仅处理有限域内的函数(图像),所以傅里叶变换是我们感兴趣的工具。在以下各节的内容中将介绍傅里叶变换和频率域。它显示出傅里叶技术提供了一个有意义的和实际的研究及实现图像增强的主要途径。在某些情况下,这些途径与我们在第3章中阐述的方式相近。而在其他方面,它们也可以作为补充。

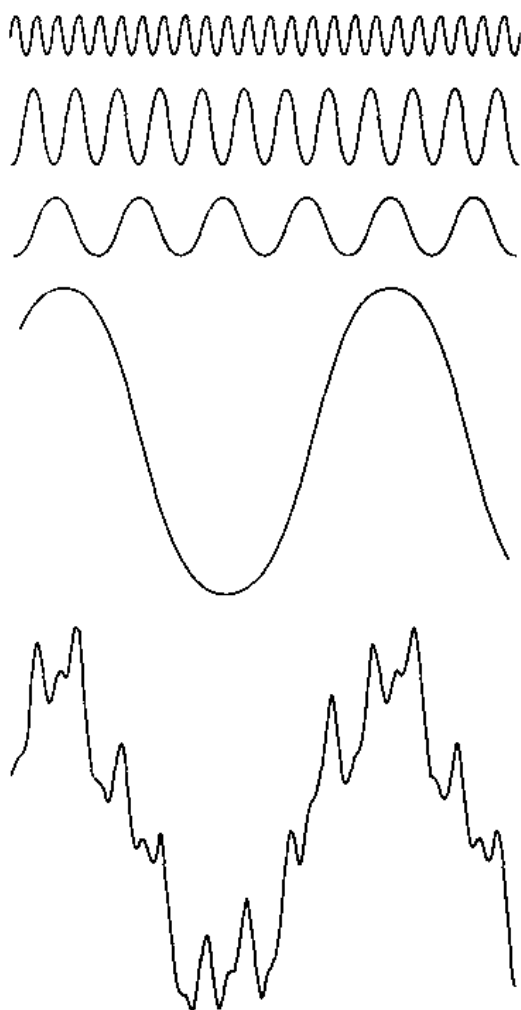


图 4.1 在最下面的函数是上面四个函数的和。在 1807 年,傅里叶的思想——周期函数可以表示为加权的正弦与余弦和的形式——遭到了怀疑

4.2 傅里叶变换和频率域的介绍

本节介绍一维和二维傅里叶变换。重点在连续变换的离散化公式和其一些性质上。

4.2.1 一维傅里叶变换及其反变换

单变量连续函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(u)$ 定义为等式:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (4.2.1)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ 。相反,给定 $F(u)$,通过傅里叶反变换可以获得 $f(x)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \quad (4.2.2)$$

这两个等式组成了傅里叶变换对。它们指出在前一节中提到的重要事实,即一个函数可以从它的反变换中重新获得。这些等式很容易扩展到两个变量 u 和 v :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4.2.3)$$

类似地,反变换为:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (4.2.4)$$

我们的兴趣在于离散函数,所以将不停留在这些等式中。然而,在某些情况下,读者会发现利用这些等式比利用它们的离散形式更容易证明二维傅里叶变换的性质。

单变量离散函数 $f(x)$ (其中 $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$) 的傅里叶变换由以下等式给出:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.2.5)$$

离散傅里叶变换(DFT)是这一章中大部分工作的基础。同样,给出 $F(u)$,能用反DFT来获得原函数:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.2.6)$$

在傅里叶变换前的 $1/M$ 乘数有时被放置在反变换前。其他时候(非经常),两个等式都乘以 $1/\sqrt{M}$ 。乘数的位置并不重要。如果使用两个乘数,仅要求必须使乘积结果为 $1/M$ 。相比它们的重要性,这些等式的确非常简单。

为了计算在式(4.2.5)中的 $F(u)$,首先在指数项中代入 $u=0$,然后,将所有 x 值相加。之后,在指数项中代入 $u=1$,重复对所有 x 的相加。对所有 M 个 u 值重复这一过程,从而可获得完整的傅里叶变换。这个过程花费了将近 M^2 个加法和乘法来计算离散傅里叶变换(减少这个运算数量是一个很重要的课题,将在4.6节中讨论)。像 $f(x)$ 一样,变换在数量上也是离散的,有着与 $f(x)$ 相同数量的分量。相似的注释同样适用于反傅里叶变换的计算。

离散变换对的一个很重要的特性是,不像连续的情形,不必关心DFT或它的反变换是否存在。离散傅里叶变换和它的反变换总是存在的。这一点可以从将式(4.2.5)或式(4.2.6)相互代入到对方式子中以及利用指数的正交特性(习题4.1)来得出。可以获得一个指明这两个函数存在的恒等式。当然,当 $f(x)$ 为无限值时,总会有些问题发生,但我们在本书中仅处理有限数值。这些注释都直接适用于二维(和更高维数)函数。因此,对于数字图像处理,离散变换或其反变换的存在不是问题。

频率域的概念在本章和第3章被多次提到,从欧拉公式中得到:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (4.2.7)$$

将此表达式代入式(4.2.5)中,使用公式 $\cos(-\theta) = \cos\theta$,得出:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) [\cos 2\pi ux/M - j\sin 2\pi ux/M] \quad (4.2.8)$$

其中, $u=0,1,2,\cdots,M-1$ 。因此,我们看到傅里叶变换的每一项[即对于每个 u 值, $F(u)$ 的值]由 $f(x)$ 函数所有值的和组成。 $f(x)$ 的值则与各种频率的正弦值和余弦值相乘。 $F(u)$ 值的范围覆盖的域(u 的值)称为频率域,因为 u 决定了变换的频率成分(x 也作用于频率,但它们相加,对每个 u 值有相同的贡献)。 $F(u)$ 的 M 项中的每一个被称为变换的频率分量。使用术语“频率域”和“频率成分”与“时间域”和“时间成分”没有差别,如果 x 是一个时间变量,可以用它来表示 $f(x)$ 的域和值。

一个恰当的比喻是将傅里叶变换比做一个玻璃棱镜。棱镜是可以将光分成不同颜色成分的物理仪器,每个成分的颜色由波长(或频率)决定。傅里叶变换可看做“数学的棱镜”,将函数基于频率分成不同的成分。当我们考虑光时,讨论它的光谱或频率谱线。同样,傅里叶变换使我们能够通过频率成分来分析一个函数。这是属于线性滤波核心的重要概念。

总之,从式(4.2.5)或式(4.2.8)中可以看出傅里叶变换的成分很复杂。正如在复数的分析中,我们发现有时在极坐标下表示 $F(u)$ 很方便:

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)} \quad (4.2.9)$$

其中

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (4.2.10)$$

上式称为傅里叶变换的幅度或频率谱,同时

$$\phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad (4.2.11)$$

上式称为变换的相角或相位谱。在式(4.1.10)和式(4.2.11)中, $R(u)$ 和 $I(u)$ 分别是 $F(u)$ 的实部和虚部。在研究图像增强时,我们主要关心频率谱的性质。在本章后面使用的另一个量是功率谱,它被定义为傅里叶变换的平方:

$$\begin{aligned} P(u) &= |F(u)|^2 \\ &= R^2(u) + I^2(u) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

术语“谱密度”也用来指功率谱。

例 4.1 两个简单一维函数的傅里叶谱

在继续下面的内容之前,先考虑一个简单的一维 DFT 例子会有些帮助。图 4.2(a)显示了一个函数,图 4.2(b)显示了它的傅里叶频率谱。 $f(x)$ 和 $F(u)$ 都是离散量,图中的点相连是为了便于观看。在此例子中, $M=1024$, $A=1$, K 仅为 8 个点。同时注意频率谱的中心在 $u=0$ 处。正如接下来一节所显示的那样,在进行变换前 $f(x)$ 被乘以 $(-1)^x$ 以完成此图。下面的两个图描述的与前边基本相同,但 K 为 16 个点。值得注意的重要特征为:(1)当曲线下的面积在 x 域加倍时,频率谱的高度也加倍;(2)当函数的长度加倍时,相同间隔下频谱中零点的数量也加倍。傅里叶变换对这个“对偶”特性在频率域下解释图像处理结果时非常有用。

在式(4.2.5)的离散傅里叶变换中,函数 $f(x)$, $x=0,1,2,\cdots,M-1$,表示从连续的公式中取 M 个样点。记住这一点很重要,这些样点不一定必须选取 x 在 $[0, M-1]$ 范围内的整数值。但在这里它们是任意选取的等间隔点。经常用 x_0 (任意定位的)表示序列中的第一个点。被抽样函数的第一个值就是 $f(x_0)$ 。下一个样点采用固定间隔 Δx ,从而得到 $f(x_0 + \Delta x)$ 。第 k 个样点为 $f(x_0 + k\Delta x)$,最后一个样点为 $f(x_0 + [M-1]\Delta x)$ 。这样,在离散情况下,当写出

$f(k)$ 时,可以理解为是 $f(x_0 + k\Delta x)$ 的缩写表示。根据这样的表示法,当处理离散变量时, $f(x)$ 被理解为:

$$f(x) \triangleq f(x_0 + x\Delta x) \quad (4.2.13)$$

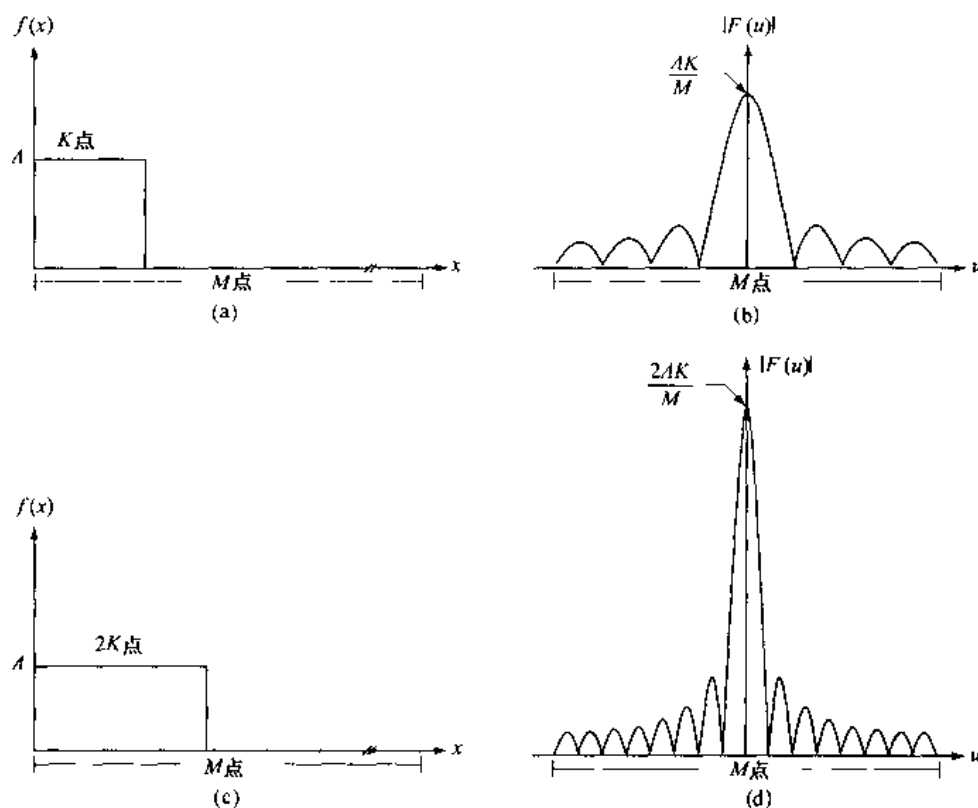


图 4.2 (a) M 点的一个离散函数, (b) 它的傅里叶频谱, (c) 两倍非零点数目的离散函数, (d) 它的傅里叶频谱

变量 u 有相似的解释,但序列通常总是从 0 频率开始。因此, u 值序列为 $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, [M-1]\Delta u$ 。 $F(u)$ 理解为:

$$F(u) \triangleq F(u\Delta u) \quad (4.2.14)$$

其中, $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。这种缩写大大简化了等式,并容易理解得多。

在图 4.2 中给出了函数和其变换之间的相反关系,显然, Δx 和 Δu 有如下关系:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad (4.2.15)$$

在图像处理中当测量是一个问题时这个关系很有用。例如,在电子显微镜下的应用,图像样品可能分开 $1\mu\text{m}$ 的间隙,在频率域中某些特性可根据实际样品的结构暗示出来。本书接下来的大部分讨论中,在不考虑特定抽样或其他测量因素的情况下,使用变量 x 和 u 。

4.2.2 二维 DFT 及其反变换

一维离散傅里叶变换及其反变换向二维扩展是简单明了的。一个图像尺寸为 $M \times N$ 的函数 $f(x, y)$ 的离散傅里叶变换由以下等式给出: