

图 4.38 对函数延拓所需的说明,(a) 没有延拓,执行二维卷积的结果,(b)合适的函数延拓,(c)正确的卷积结果

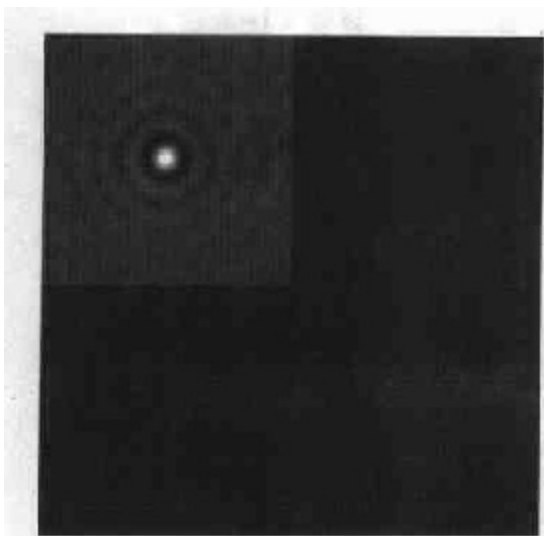


图 4.39 在空间域延拓的低通滤波器(仅显示实部)

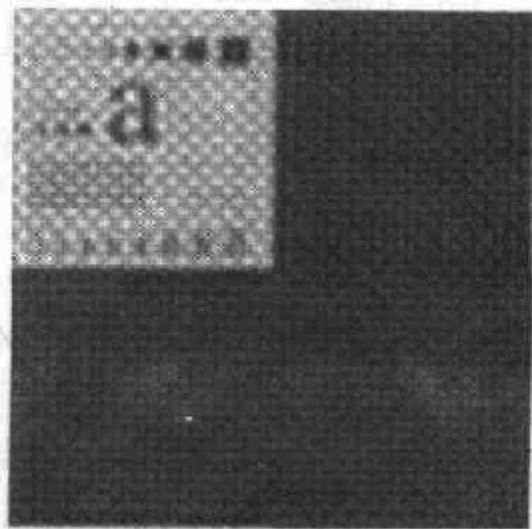


图 4.40 用延拓滤波的结果。图像通常被裁剪到原来的尺寸,因为超过图像边界没有可见信息

#### 4.6.4 卷积和相关性理论

在4.2.4节介绍了卷积,在4.6.3节讨论了实现卷积的其他细节。在这里简要地重复它是为了易于与相关这一类似过程进行比较。大小为  $M \times N$  的两个函数  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  的离散卷积表示为  $f(x, y) * h(x, y)$ , 由下面的表达式所定义:

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n) \quad (4.6.27)$$

从4.2.4节的讨论可知,卷积理论由两个函数和它们的傅里叶变换间的下述关系组成:

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v) \quad (4.6.28)$$

$$f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v) \quad (4.6.29)$$

两个函数  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  的相关性定义如下:

$$f(x, y) \circ h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x + m, y + n) \quad (4.6.30)$$

这里,  $f^*$  表示  $f$  的复共轭。一般处理的是实函数(图像),  $f^* = f$ 。除了复共轭及和式第二项中的负号换为正号外,相关函数与式(4.6.27)给出的卷积函数有着相同的形式。这意味着  $h$  并不是关于原点的镜像。实现卷积的每一步都与相关相同,包括需要延拓。

给出卷积与相关的相似性后,相关理论类似于卷积理论就不奇怪了。让  $F(u, v)$  和  $H(u, v)$  分别表示  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  的傅里叶变换。卷积理论有一半讲的是空间域的相关 [ $f(x, y) \circ h(x, y)$ ] 和频率域的乘积 [ $F^*(u, v) H(u, v)$ ], 它们组成了一个傅里叶变换对。这一结论形式上如下所示:

$$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v) \quad (4.6.31)$$

它指出空间域的相关性可由  $F^*(u, v) H(u, v)$  的傅里叶反变换得到,  $F^*$  是  $F$  的复共轭。一个类似的结果是:频率域的相关简化为空间域的相乘。即:

$$f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v) \quad (4.6.32)$$

这两个结论构成了相关理论。假定所有的函数被正确地延拓扩展了。

现在,我们知道了卷积是空间域过滤和频率域过滤之间的纽带。相关的重要用途在于匹配。在匹配中,  $f(x, y)$  是一幅包含物体或区域的图像。如果想要确定  $f$  是否包含有感兴趣的物体或区域,让  $h(x, y)$  作为那个物体或区域(通常称该图像为模板)。那么,如果匹配,两个函数的相关值会在  $h$  找到  $f$  中相应点的位置上达到最大。前期的处理,如缩放和对齐,在多数的实际应用中都是必需的,但大批量的处理工作是进行相关运算。

最后,指出术语“互相关”常常用来代替术语“相关”,为的是指明进行相关运算的图像是不同的。这是相对自相关而言的,在自相关中,两幅图像是相同的。在后面的例子中,我们将讨论自相关理论,它由式(4.6.31)直接得到:

$$f(x, y) \circ f(x, y) \Leftrightarrow |F(u, v)|^2 \quad (4.6.33)$$

在右边,利用了“复数和它的复共轭的乘积是复数模的平方”这一结论。也就是说,这一结果表明空间域自相关的傅里叶变换是式(4.2.20)定义的功率谱。类似地,

$$|f(x, y)|^2 \Leftrightarrow F(u, v) \circ F(u, v) \quad (4.6.34)$$

## 例 4.11 图像相关

图 4.41 显示了一个图像延拓和相关的简单例子。图 4.41(a)是该图像,图 4.41(b)是模板。图像和模板的大小分别是  $256 \times 256$  和  $38 \times 42$  像素。此例中,  $A = B = 256$ ,  $C = 38$  和  $D = 42$ 。这就给出了扩展函数的最小值:  $P = A + C - 1 = 293$  和  $Q = B + D - 1 = 297$ 。

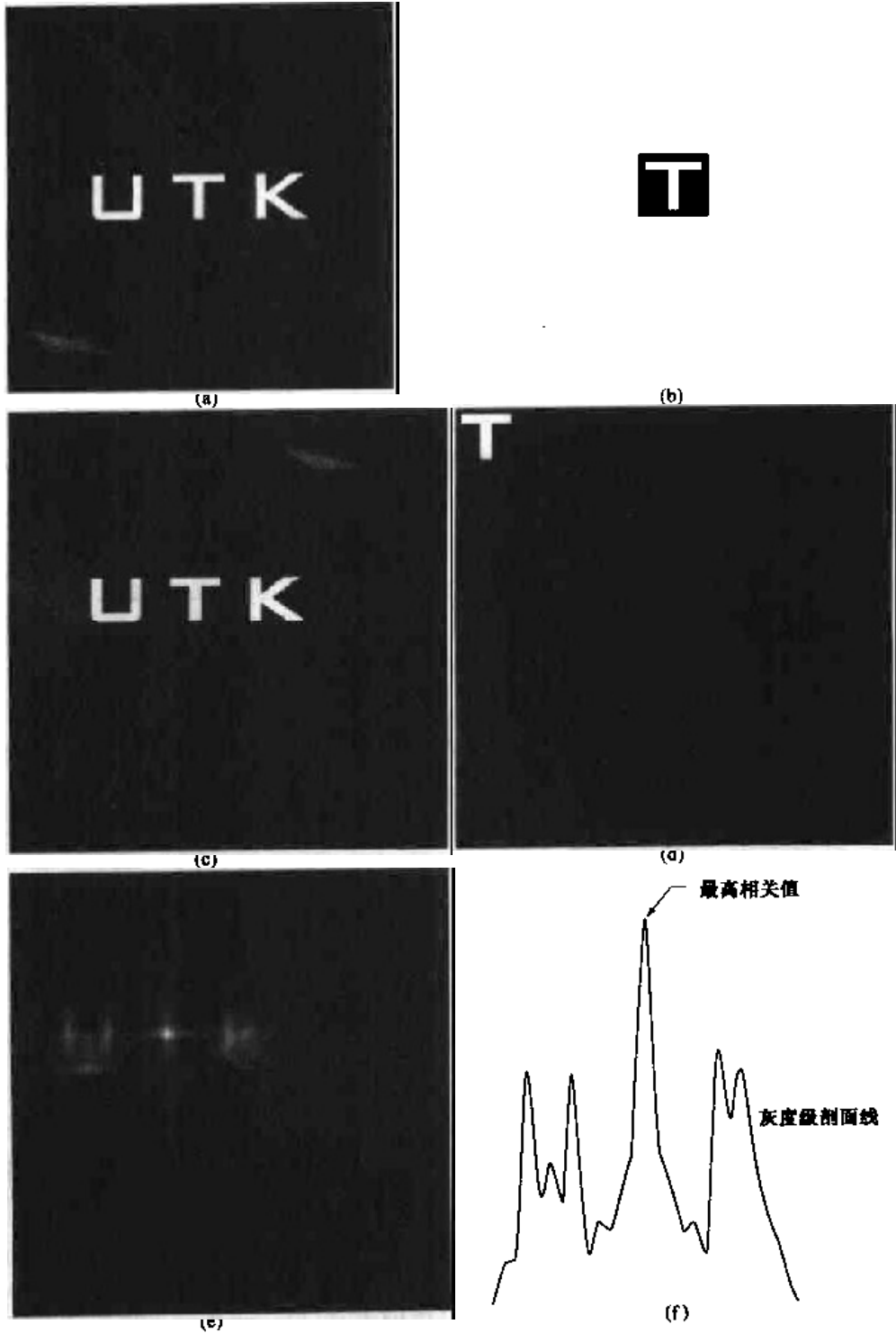


图 4.41 (a)图像,(b)模板,(c)和(d)延拓图像,(e)以图像显示的相关函数,(f)通过(e)中最高值的水平剖面线。所示的点是最佳匹配点

这里选择  $298 \times 298$  的相等延拓尺度。延拓后的图像如图 4.41(c)和(d)所示。两延拓图像的空间域相关以图像形式显示于图 4.41(e)。正如式(4.6.31)指出的那样,产生相关函数需要计算延拓图像的变换,从它们中选出一个来取复共轭(我们选择模板),将两个变换相乘再求傅里叶反变换。留下一个练习给读者(习题 4.23),讨论如果取的是另外一个变换的共轭,图 4.41(e)将会是什么样子。

如预料的那样,从图 4.41(e)看出相关函数最大值正好出现在图像中“T”的顶部——模板所在的点上。如同卷积,重要的是记住相关函数中的变量在空间域中是可移动的。例如,图 4.41(e)的左上角相当于一个函数关于另一个函数的零位移。图 4.41(e)中每个像素点的值都是相关函数在一个位移位置的值,即是式(4.6.30)中  $(x, y)$  数对的一个特殊值。还注意到,相关函数与延拓图像有着相同的尺寸。最后,图 4.41(f)显示了通过图 4.41(e)最大值的水平灰度剖面图。这张图简单地确认了相关函数的最高峰位于模板和图像发生最佳匹配的点上。

#### 4.6.5 二维傅里叶变换性质总结

表 4.1 中概括了本章讨论的所有傅里叶变换的性质。脚注标识了需要延拓函数的项,以避免不正确的结果。如前面所述,双箭头用于标明傅里叶变换对的表达形式。即双箭头右边的表达式由对左边表达式进行前向傅里叶变换得到,左侧表达式由右侧表达式进行傅里叶反变换得到。

表 4.1 二维傅里叶变换重要性质总结

性 质	表 达 式
傅里叶变换	$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(xu/M + vy/N)}$
傅里叶反变换	$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(xu/M + vy/N)}$
极坐标表示	$F(u, v) =  F(u, v)  e^{-j\phi(u, v)}$
谱	$ F(u, v)  = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}, R = \text{Real}(F)$ $I = \text{Imag}(F)$
相位角	$\phi(u, v) = \arctan \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
功率谱	$P(u, v) =  F(u, v) ^2$
均值	$\bar{f}(x, y) = F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$
平移	$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0 u/M + y_0 v/N)}$ 当 $x_0 = u_0 = M/2$ 和 $y_0 = v_0 = N/2$ 时, $f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v) (-1)^{u+v}$
共轭对称	$F(u, v) = F^*(-u, -v)$ $ F(u, v)  =  F(-u, -v) $

(续表)

性 质	表 达 式
微分	$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u, v)$ $(-jx)^n f(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial u^n}$
拉普拉斯	$\nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -(u^2 + v^2) F(u, v)$
分配性	$\mathfrak{F}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathfrak{F}[f_1(x, y)] + \mathfrak{F}[f_2(x, y)]$ $\mathfrak{F}[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \mathfrak{F}[f_1(x, y)] \cdot \mathfrak{F}[f_2(x, y)]$
比例性	$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v), f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ ab } F(u/a, v/b)$
旋转	$x = r \cos\theta \quad y = r \sin\theta \quad u = \omega \cos\varphi \quad v = \omega \sin\varphi$ $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$
周期性	$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$ $f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$
可分性	见式(4.6.14)和式(4.6.15)。可分性意指可以首先沿着图像的每一行计算一维变换,然后沿着这一中间结果的每一列计算一维变换,以此计算二维变换,得到相同的结果。
使用前向变换算法的傅里叶反变换的计算	$\frac{1}{MN} f^*(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ 这一等式指出输入一个函数 $F^*(u, v)$ 到用于计算前向变换的算法(前面等式的右边)得到 $f^*(x, y)/MN$ 。取复共轭并用 $MN$ 乘以这一结果得到希望的反变换。
卷积*	$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$
相关*	$f(x, y) \circ h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x+m, y+n)$
卷积定理*	$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v);$ $f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$
相关定理*	$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v);$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v)$
某些有用的 FT 对:	
脉冲	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
高斯	$A \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow A e^{-(u^2 + v^2)/2\sigma^2}$
矩形	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua + vb)}$
余弦	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) + \delta(u - u_0, v - v_0)]$
正弦	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{j}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) - \delta(u - u_0, v - v_0)]$

\* 假定函数已经用 0 延拓扩展了。

#### 4.6.6 快速傅里叶变换

如 4.1 节指出的那样,离散傅里叶变换成为信号处理的一种基础工具的一个主要原因是快速傅里叶变换(FFT)的发展。用式(4.2.5)计算  $M$  点一维傅里叶变换直接要求  $M^2$  次的乘法/加法运算。快速傅里叶变换完成同样任务则只需进行  $M \log_2 M$  次的运算。例如当  $M = 1024$  时,用笨拙的方法大约需要  $10^6$  次操作,而快速傅里叶变换只需要约  $10^4$  次操作即可。这是

100:1的运算优势。如果还不能看到这种优势的重要性所在,试想一下能够在一年内完成的规定工作反之却用100年完成!这就是理论的可能性与现实的不可行性。所要解决的问题越大,用快速傅里叶变换计算的优势也就越大。例如,若 $M = 8192(2^{13})$ ,计算的优势就增加到600:1。这样诱人的数字成为想要更多地了解快速傅里叶变换算法的巨大动力。这一节先了解导出快速傅里叶变换的离散傅里叶变换的基本分解如何推导。重点在单变量的快速傅里叶变换。如4.6.1节所指出的那样,二维傅里叶变换能通过相继的一维变换算法得到。

本节中推导的快速傅里叶变换算法基于“逐次倍乘法”。为表达方便,以下列形式表示式(4.2.5):

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{ux} \quad (4.6.35)$$

这里

$$W_M = e^{-j2\pi x/M} \quad (4.6.36)$$

假设 $M$ 的形式是:

$$M = 2^n \quad (4.6.37)$$

$n$ 为正整数。因此, $M$ 可以表示为:

$$M = 2K \quad (4.6.38)$$

$K$ 也是一个正整数。将式(4.6.38)代入式(4.6.35)得到:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2K} \sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{ux} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{u(2x)} + \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{u(2x+1)} \right] \end{aligned} \quad (4.6.39)$$

然而,用式(4.6.36)可得 $W_{2K}^{2ux} = W_K^{ux}$ 。因此,式(4.6.39)可表示成:

$$F(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} + \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} W_{2K}^u \right] \quad (4.6.40)$$

定义:

$$F_{\text{even}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} \quad (4.6.41)$$

$u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ , 且:

$$F_{\text{odd}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} \quad (4.6.42)$$

$u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ , 式(4.6.40)就变为:

$$F(u) = \frac{1}{2} [ F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u) W_{2K}^u ] \quad (4.6.43)$$

同样,因为 $W_M^{u+M} = W_M^u$ 和 $W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$ ,式(4.6.41)通过式(4.6.43)得到:

$$F(u+K) = \frac{1}{2} [ F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u) W_{2K}^u ] \quad (4.6.44)$$

仔细分析式(4.6.41)至式(4.6.44)可得出这些表达式的一些有趣性质。一个 $M$ 点变换可以通过把原始表达式分成两部分来计算,如式(4.6.43)和式(4.6.44)所示。计算 $F(u)$ 的前半部分要对式(4.6.41)和式(4.6.42)给出的两个 $M/2$ 点变换进行计算。 $F_{\text{even}}(u)$ 和 $F_{\text{odd}}(u)$ 的计算结果被代入式(4.6.43)中得到 $F(u)$ ,  $u = 0, 1, 2, \dots, (M/2 - 1)$ 。另外一半可直接从

式(4.6.44)得到,而无需另外的变换计算。

为了检验这个计算步骤可否实现,令  $m(n)$  和  $a(n)$  分别代表实现算法所要求的复数乘法和加法的次数。如前所述,样点的数量为  $2^n$ ,  $n$  为正整数,先假设  $n = 1$ 。两点变换要计算  $F(0)$ ;然后,  $F(1)$  由式(4.6.44)得到。为得到  $F(0)$ ,首先要计算  $F_{\text{even}}$  和  $F_{\text{odd}}$ 。此例中  $K = 1$  且式(4.6.41)和式(4.6.42)是一点变换。因为单点傅里叶变换即为取样点自身,因而,得到  $F_{\text{even}}(0)$  和  $F_{\text{odd}}(0)$  不需要任何乘法和加法运算。 $F_{\text{odd}}(0)$  乘以  $W_2^0$ ,再使用一次加法,由式(4.6.43)得到  $F(0)$ 。然后,从式(4.6.44)得到  $F(1)$  又用了一次加法(减法可以认为与加法相同)。当计算完  $F_{\text{odd}}(0)W_2^0$  后,一次两点变换所需要的总运算次数由  $m(1) = 1$  次乘法和  $a(1) = 2$  次加法构成。

$n$  的下一个值为 2。根据前面的过程,一个 4 点变换可分成两部分。 $F(u)$  的前半部分要求对两个两点变换求值,如  $K = 2$  是式(4.6.41)和式(4.6.42)给出的。一个两点变换要求  $2m(1)$  次乘法和  $2a(1)$  次加法。因此,这两个等式的计算总共要求  $2m(1)$  次乘法和  $2a(1)$  次加法。为从式(4.6.43)得到  $F(0)$  和  $F(1)$ ,进一步需要两次乘法和加法。因为  $F_{\text{odd}}(u)W_2^k$  在  $u = \{0, 1\}$  时已被计算,所以要得到  $F(2)$  和  $F(3)$  又要进行两次加法计算。这时总数是  $m(2) = 2m(1) + 2$  和  $a(2) = 2a(1) + 4$ 。

当  $n = 3$  时,两个 4 点变换用于计算  $F_{\text{even}}(u)$  和  $F_{\text{odd}}(u)$ 。它们需要  $2m(2)$  次乘法和  $2a(2)$  次加法。完成全部变换还要 4 次乘法和 8 次加法。总数为  $m(3) = 2m(2) + 4$  和  $a(3) = 2a(2) + 8$ 。

对任意正整数  $n$ ,可以推导出完成快速傅里叶变换所需的乘法和加法次数的递归表达式:

$$m(n) = 2m(n-1) + 2^{n-1} \quad n \geq 1 \quad (4.6.45)$$

和

$$a(n) = 2a(n-1) + 2^n \quad n \geq 1 \quad (4.6.46)$$

这里,  $m(0) = 0$  且  $a(0) = 0$ ,因为单点变换无需任何加法和乘法运算。

式(4.6.41)至式(4.6.44)的实现构成了逐次倍乘的快速傅里叶变换算法。名字是由计算方法(即对于任意的 2 的整数次幂  $M$ ,一个两点变换的计算来自两个单点变换,一个 4 点变换来自两个两点变换,等等)得来的。作为练习留给读者(习题 4.25),说明:

$$m(n) = \frac{1}{2} M \log_2 M \quad (4.6.47)$$

和

$$a(n) = M \log_2 M \quad (4.6.48)$$

快速傅里叶变换优于直接用一维离散傅里叶变换的计算优势定义为:

$$\begin{aligned} C(M) &= \frac{M^2}{M \log_2 M} \\ &= \frac{M}{\log_2 M} \end{aligned} \quad (4.6.49)$$

因为假设  $M = 2^n$ ,所以可以用  $n$  的形式来表示式(4.6.49):

$$C(n) = \frac{2^n}{n} \quad (4.6.50)$$

该函数的曲线参见图 4.42。如前所述,迅速增加的优势是  $n$  的函数。例如,当  $n = 15$  (32,768 点)时,FFT 对于 DFT 已有接近 2 200:1 的优势。这样,可以预料在同一台机器上,快速傅里叶

变换以比离散傅里叶变换快 2 200 倍的速度进行计算。

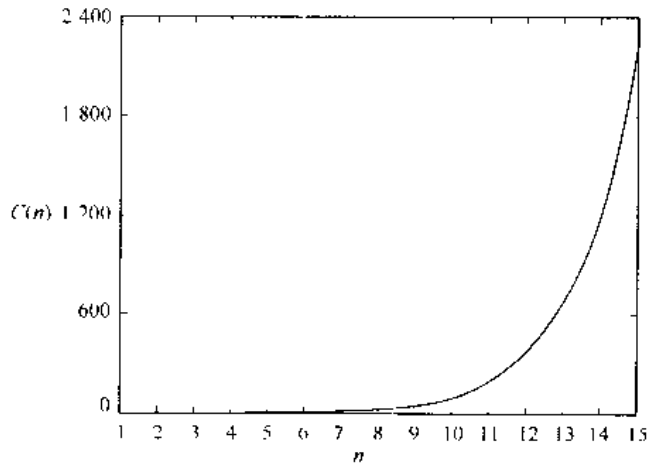


图 4.42 FFT 相对于直接实现一维 DFT 的计算优势。注意,该优势以  $n$  的函数快速增长

快速傅里叶变换优异的性质非常多,这里不再深入地讨论这个课题了(可参见 Brigham [1998])。实际上,所有综合性的信号和图像处理软件包都已包含 FFT 的实现,也能够处理点数不为 2 的整数次幂的情况(以牺牲计算效率为代价)。免费的 FFT 程序已经可以从 Internet 得到。

#### 4.6.7 关于滤波器设计的一些评论

本章讨论的所有滤波器都以公式形式来描述。为了使用这些滤波器,简单地对公式采样得到所希望的  $(u, v)$  值。这样就导出了滤波函数  $H(u, v)$ 。在所有的例子中,该函数先乘上输入图像的 DFT(中心化后),然后计算傅里叶反变换。本章中所有正向和反向的傅里叶变换都由 FFT 算法计算,计算采用图 4.35 和 4.2.6 节概括的步骤。

本章讨论的滤波方法严格围绕基本原理,重点在于尽可能清晰地解释频率域滤波的结果。可以将这里所用的滤波处理方法看做一个滤波器原型的基础。换言之,给出一个问题,为解决该问题,寻找某个滤波器,频率域处理方法对于实验、迅速而全面地控制滤波器参数是一个理想的工具。

一旦用于一个特殊应用的滤波器找到了,在空间域采用固件和/或硬件实现它通常是十分有趣的。Petrou 和 Bosdogianni [1999] 提供了在二维频率域滤波器和相应的数字滤波器之间很好的纽带。关于二维数字滤波器的设计见 Lu 和 Antonion [1992] 的论著。

## 小结

本章提供的资料与第 3 章的阐述结合起来是图像增强完整的基础内容。毫无疑问,读者现在已清楚地了解到,图像增强技术在实际应用中确实能创造出令人满意的结果。大多数工具都基于数学和统计学概念,但是,它们的用途是严格面向问题的。换言之,图像增强与其说是一门科学,其实更像一门艺术,一个正确增强图像的定义是高度主观化的。在第 5 章,将扩



展本章开发的一些数学概念,最后一章则转向图像复原领域。与增强不同,复原技术为的是改善图像,所以往往基于客观基础,而不是主观性准则。这样,图像复原技术比我们迄今为止所用的方法更结构化。

本章另一个主要目标是开发傅里叶变换。虽然这在图像增强一章中有所体现,但这种方法是非常通用的。在后续章节中,将看到离散傅里叶变换的不同应用。

## 参考资料

4.1 节的其他读物见 Hubbard[1998]的著述。由 Bracewell[2000], Bracewell[1995]所著的书籍是解释连续傅里叶变换和如何延伸到二维图像处理的入门书籍。这两本书以及 Lim[1990], Castleman[1996], Petrou 和 Bosdogianni[1999]及 Brigham[1988]的论著对 4.2 节大部分的内容提供了背景知识。

4.3 节和 4.4 节的附加读物可见 Castleman[1996], Pratt[1991]和 Hall[1997]的论著。滤波器实现的有效处理问题仍然是一个令人感兴趣的题目,如 Bakir 和 Reeves[2000]所述的例证。对于钝化模板和提升滤波可见 Schowengerdt[1983]的论著。同态滤波器(4.5 节)的资料基于 Stockham[1972]的论文;也可以参见 Oppenheim 和 Schaffer[1975], Pitas 与 Venetsanopoulos[1990]的论著。Brinkman 等[1998]将钝化模板和同态滤波相结合用于增强磁共振图像。数字滤波器的生成(4.6.7 节)是基于本章所讨论的频率域公式,见 Lu 和 Antoniou[1992]以及 Petrou 与 Bosdogianni[1999]的著述。

如 4.1 节所述,快速傅里叶变换(FFT)的发现(4.6.6 小节)是离散傅里叶变换作为数字信号处理的基本工具而普及的重要里程碑。在 4.6.6 节对 FFT 的表述是基于 Cooley 和 Tukey[1965]的论文,以及 Brigham[1988]的著作(他也讨论了几个 FFT 的实现,包括基数不为 2 的快速傅里叶变换)。快速傅里叶变换的公式通常应归功于 Cooley 和 Tukey[1965]。然而,快速傅里叶变换的有趣历史在此值得一提。为响应 Cooley 和 Tukey 的论文, Rudnick[1966]报道了他采用的一种相似技术,运算量同样为  $M \log_2 M$ ,是基于 Danielson 和 Lanczos[1942]所发表的一种算法。这些作者依次参考了 Runge[1903, 1905]的论著作为他们的技术来源。稍后的两篇论文和 Runge 与 König[1924]的讲稿包含了现代快速傅里叶变换算法的基本优点。相似的技术还由 Yates[1937], Stumpff[1939], Good[1958]和 Thomas[1963]发表过。在 1965 年,Cooley-Tukey 论文发表前,一篇 Cooley, Lewis 与 Welch[1967a]合作的论文中进行了历史性的概括和对结果有趣的对比。

## 习题

★4.1 式(4.2.5)和式(4.2.6)所示的  $F(u)$  与  $f(x)$  是一组傅里叶变换对。对于  $f(x)$ ,将式(4.2.6)代入式(4.2.5),会发现左右两边相等。再重复该过程,对于  $F(u)$ ,将式(4.2.5)代入式(4.2.6)。需要用到下面的指数正交性质:

$$\sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi rx/M} e^{-j2\pi ux/M} = \begin{cases} M & r = u \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

4.2 证明傅里叶变换和傅里叶反变换是线性过程(见 2.6 节的线性部分)。

- 4.3 令 $F(u, v)$ 表示一幅图像的DFT。由4.2.3节的讨论可知, $F(u, v)$ 乘上一个滤波器函数 $H(u, v)$ ,再进行傅里叶反变换将改变图像的外观,这依赖于滤波器的固有特性。假设 $H(u, v) = A$ , $A$ 为正常数。滤波的结果将是图像乘以这个常数。应用卷积定理,在数学上解释为什么空间域的像素表达式会乘上同一个常数。

- ★4.4 高斯型低通滤波器在频率域中的传递函数是:

$$H(u, v) = A e^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$$

证明空间域的相应滤波器形式为:

$$h(x, y) = A \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-2x^2\sigma^2/(x^2+y^2)}$$

(提示:将变量当做连续的,以简化计算。)

- 4.5 如式(4.4.1)所示,高通滤波器的传递函数为:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

这里, $H_{lp}(u, v)$ 是相应低通滤波器的传递函数。用习题4.4的结论解释什么是空间域高斯高通滤波器函数的形式。

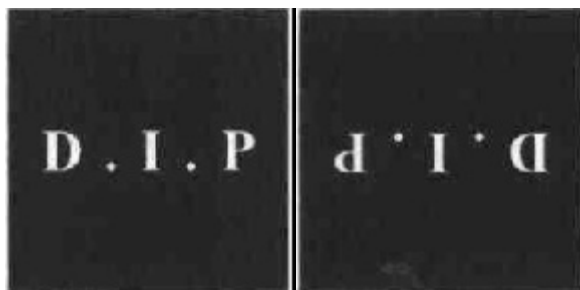
- 4.6 ★(a)证明式(4.2.21)的正确性。

(b)证明式(4.6.1)和式(4.6.2)的正确性。

- 4.7 在图4.11(b)中频率谱的横坐标轴上近似周期性出现的亮点来源是什么?

- ★4.8 图4.23所示的每一个空间域滤波器在原点有一个尖峰,解释其来源。

- 4.9 观察如下所示的图像。右边的图像这样得到:(a)在原始图像左边乘上 $(-1)^{x+y}$ ;(b)计算离散傅里叶变换(DFT);(c)对变换取复共轭;(d)计算傅里叶反变换;(e)结果的实部再乘以 $(-1)^{x+y}$ 。(用数学方法)解释为什么会产生右图的效果。



- 4.10 证明如果一个滤波器传递函数 $H(u, v)$ 是实函数且对称,那么对应的空间域滤波器 $h(x, y)$ 也是对称实函数。

- ★4.11 证明卷积定理的正确性。为了简化,只限于单变量的连续函数。

- 4.12 观察如下所示的图像。右边的图像是对左边图像用高斯型低通滤波器进行低通滤波,然后用高斯型高通滤波器对结果再进行高通滤波得到的。图像的大小为 $420 \times 344$ ,且两个滤波器的 $D_0 = 25$ 。

(a)考虑右图,解释戒指中心部分为什么明亮又是实心的。而过滤后图像的显著特性是,物体(如手指、手腕、骨骼)的外部边沿之间的区域更加黑暗,换句话说,你是不希望高通滤波器勾画戒指暗区内部的恒定区,因为高通滤波排除了直流项吗?

(b)当滤波处理的顺序相反时,你认为结果会有区别吗?