

$$V_{\infty} = \{L^2(\mathbf{R})\} \quad (7.2.17)$$

在这些条件下,子空间 V_j 的展开函数可以被表述为子空间 V_{j+1} 的展开函数的加权和。使用式(7.2.12),令

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \varphi_{j+1,n}(x)$$

其中,求和的下标被改写成 n ,以示区别。将式(7.2.10)代入 $\varphi_{j+1,n}(x)$,并将变量 α_n 改写成 $h_{\varphi}(n)$,上式变成:

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n h_{\varphi}(n) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}x - n)$$

既然 $\varphi(x) = \varphi_{0,0}(x)$, j 和 k 都可以置为 0,以得到较简单的无下标表达式:

$$\varphi(x) = \sum_n h_{\varphi}(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (7.2.18)$$

该递归等式中的系数 $h_{\varphi}(n)$ 被称为尺度函数系数; h_{φ} 为尺度矢量。其他文献中也常使用 $h(n)$ 和 $h_0(n)$,但我们希望能避免与前述子带分析滤波器发生混淆。式(7.2.18)是多分辨率分析的基础,称为改善等式、MRA 等式或扩张等式。它表示,任意子空间的展开函数都可以从它们自身的双倍分辨率拷贝中得到,即从相邻较高分辨率的空间中得到。对引用子空间 V_0 的选择是任意的。

例 7.5 哈尔尺度函数系数

对式(7.2.14)的哈尔函数的尺度函数系数是 $h_{\varphi}(0) = h_{\varphi}(1) = 1/\sqrt{2}$,即式(7.1.28)中矩阵 $\mathbf{H}_2$ 的第一行。因此,由式(7.2.18)可得:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2} \varphi(2x)] + \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2} \varphi(2x - 1)]$$

图 7.9(f)的 $\varphi_{0,0}(x)$ 很好地说明了这一分解过程,前边的表达式中用方括号括起来的项是 $\varphi_{1,0}(x)$ 和 $\varphi_{1,1}(x)$ 。附加的简化产生了 $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$ 。

7.2.3 小波函数

给定满足上述 MRA 要求的尺度函数,能够定义小波函数 $\psi(x)$ (与它的积分变换及其二进制尺度),跨越了相邻两尺度子空间 V_j 和 V_{j+1} 的差异。图 7.11 说明了这种情况。为图中跨越 W_j 空间的所有 $k \in \mathbf{Z}$ 定义小波集合 $\{\psi_{j,k}(x)\}$:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (7.2.19)$$

使用尺度函数,可得:

$$W_j = \overline{\text{Span}\{\psi_{j,k}(x)\}} \quad (7.2.20)$$

并注意,如果 $f(x) \in W_j$,

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x) \quad (7.2.21)$$

尺度和图 7.11 中的小波函数子空间由下式相关联:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (7.2.22)$$

这里, $\oplus$ 表示空间并集(类似于集合并集)。 V_{j+1} 中 V_j 的正交补集是 W_j ,且 V_j 中的所有成员对

于 W_j 中的所有成员都正交。因此,

$$\langle \varphi_{j,k}(x), \varphi_{j,l}(x) \rangle = 0 \quad (7.2.23)$$

对所有适当的 $j, k, l \in \mathbf{Z}$ 都成立。

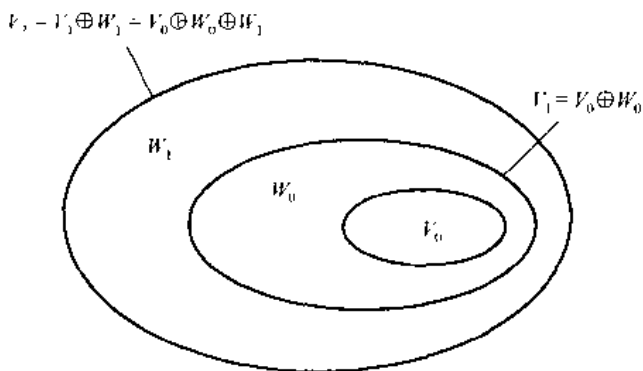


图 7.11 尺度及小波函数空间的关系

现在可以将所有可度量的、平方可积函数空间表示如下:

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (7.2.24)$$

$$L^2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (7.2.25)$$

或者

$$L^2(\mathbf{R}) = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots, \quad (7.2.26)$$

上式中不出现尺度函数, 函数仅用小波项进行表示。注意, 如果 $f(x)$ 是 V_1 而不是 V_0 的元素, 使用式(7.2.24)的展开式包含 $f(x)$ 使用 V_0 尺度函数的近似; 来自 W_0 的小波将对近似与真实函数之间的差异进行编码。由式(7.2.24)到式(7.2.26)可得:

$$L^2(\mathbf{R}) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots \quad (7.2.27)$$

其中 j_0 是任意的开始尺度。

因为小波空间存在于由相邻较高分辨率尺度函数跨越的空间中(见图 7.11), 任何小波函数——类似式(7.2.18)中其尺度函数的对应部分——可以表示成平移的双倍分辨率尺度函数的加权和。可以写成:

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (7.2.28)$$

其中, $h_\psi(n)$ 称为小波函数系数, h_ψ 称为小波向量[文献中常用 $h_1(n)$ 表示]。利用小波跨越图 7.11 中的正交补集空间且积分小波变换是正交的条件, 可以显示 $h_\psi(n)$ 和 $h_\varphi(n)$ 以下述方式相关(见 Burrus, Gopinath 和 Guo[1998] 的例子):

$$h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(1 - n) \quad (7.2.29)$$

注意该结果与式(7.1.23)的相似性, 该关系决定了正交子带编译码滤波器的冲激响应。

例 7.6 哈尔小波函数系数

在上例中, 哈尔尺度向量定义为 $h_\varphi(0) = h_\varphi(1) = 1/\sqrt{2}$ 。使用式(7.2.29), 相应的小波向量为 $h_\psi(0) = (-1)^0 h_\varphi(1 - 0) = 1/\sqrt{2}$ 和 $h_\psi(1) = (-1)^1 h_\varphi(1 - 1) = -1/\sqrt{2}$ 。注意这些系数

与式(7.1.28)中矩阵 $\mathbf{H}_2$ 的第二行相对应。将这些值代入式(7.2.28), 可得 $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$, 如图 7.12(a) 中所示。因此, 哈尔小波函数为:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (7.2.30)$$

使用式(7.2.19), 现在可产生尺度化且变换过的哈尔小波通式。图 7.12(b) 和 (c) 中分别显示了此类两个小波 $\psi_{0,2}(x)$ 和 $\psi_{1,0}(x)$ 。注意, 对于空间 W_1 , 小波 $\psi_{1,0}(x)$ 比针对 W_0 的小波 $\psi_{0,2}(x)$ 窄, 它可以用来表示更细微的细节。

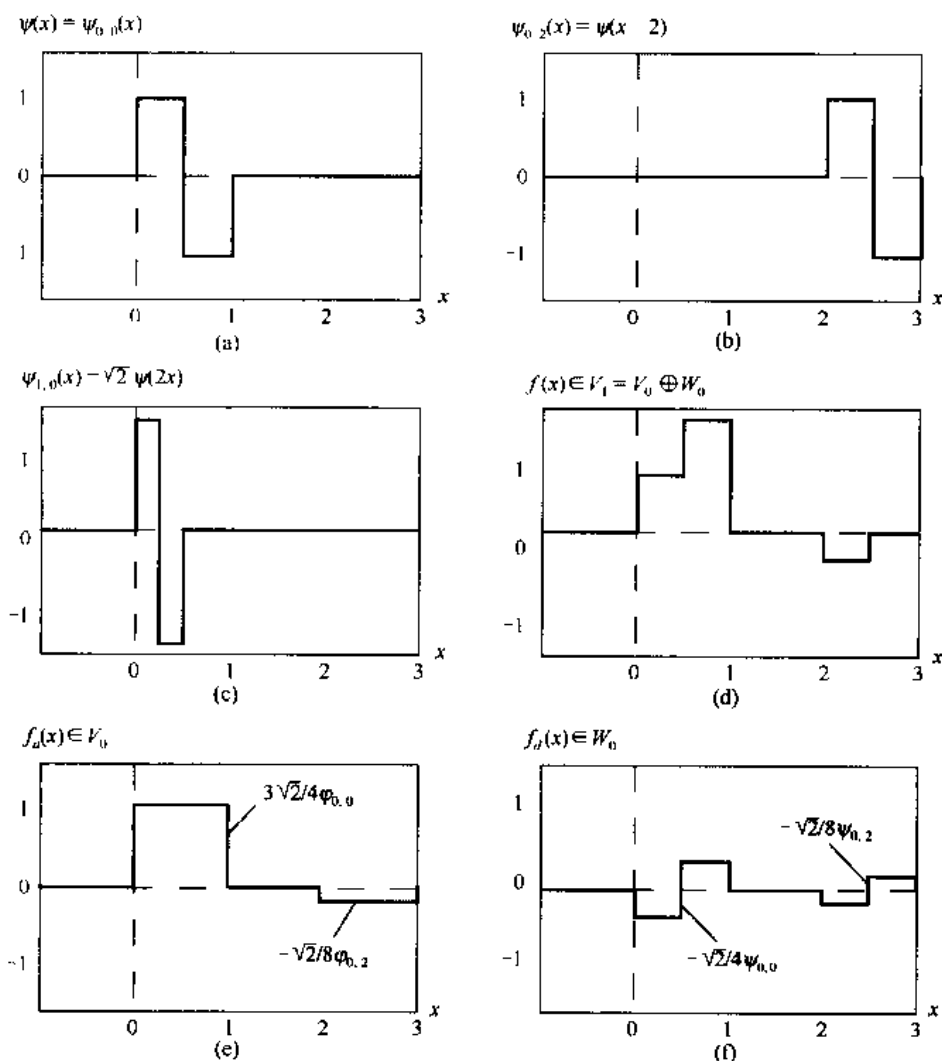


图 7.12 在 W_0 和 W_1 中的哈尔小波函数

图 7.12(d) 显示了在子空间 V_1 而不在子空间 V_0 中的函数。该函数在前述例子中曾考虑过[见图 7.9(e)]。虽然该函数不能在 V_0 中精确表示, 式(7.2.22)指出, 它可以用 V_0 和 W_0 的展开函数进行展开。展开结果如下:

$$f(x) = f_a(x) + f_d(x)$$

这里,

$$f_a(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\varphi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{8}\varphi_{0,2}(x)$$

和

$$f_d(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\psi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{8}\psi_{0,2}(x)$$

其中, $f_a(x)$ 是 $f(x)$ 使用 V_0 尺度函数的近似, 而 $f_d(x)$ 为 $f(x) - f_a(x)$ 的差, 用 W_0 小波和表示。这两个展开式, 如图 7.12(e) 和 (f) 所示, 将 $f(x)$ 用类似高通和低通滤波器的方法分成两部分。 $f(x)$ 的低频部分在 $f_a(x)$ 中得到—— $f_a(x)$ 给出了 $f(x)$ 在每个积分区间上的平均值——而高频细节则在 $f_d(x)$ 中编码。

7.3 一维小波变换

现在可以正式定义若干密切相关的小波变换: 一般小波序列展开、离散小波变换和连续小波变换。它们在傅里叶域的对应部分分别是傅里叶序列展开、离散傅里叶变换和连续傅里叶变换。在 7.4 节, 将定义一种计算效率很高的称做快速小波变换的离散小波变换。

7.3.1 小波序列展开

首先根据小波 $\psi(x)$ 和尺度函数 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 定义小波序列展开。据式(7.2.27), 可写出:

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x) \quad (7.3.1)$$

其中 j_0 是任意开始尺度, c_{j_0} 和 $d_j(k)$ 分别是式(7.2.12)和式(7.2.21)中 α_k 的改写。 $c_{j_0}(k)$ 通常称为近似值或尺度系数; $d_j(k)$ 称为细节或小波系数。这是因为式(7.3.1)的第一个和式用尺度函数提供了 $f(x)$ 在尺度 j_0 的近似[除非 $f(x) \in V_{j_0}$, 此时为其精确值]。对于第二个和式中每一个较高尺度的 $j \geq j_0$, 更细分辨率的函数(一个小波和)被添加到近似中获得细节的增加。如果展开函数形成了一个正交基或紧框架(通常情况下是这样), 基于式(7.2.5)和式(7.2.9)的展开系数计算如下:

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx \quad (7.3.2)$$

和

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (7.3.3)$$

如果展开函数是双正交基的一部分, 上式中的 φ 和 ψ 项要分别由它们的对偶函数和代替。

例 7.7 $y = x^2$ 的哈尔小波序列展开

考虑图 7.13(a) 中显示的简单函数:

$$y = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

使用哈尔小波——见式(7.2.14)和式(7.2.30)——和开始尺度 $j_0 = 0$, 式(7.3.2)和

式(7.3.3)可以被用来计算下述展开系数:

$$c_0(0) = \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx = \int_0^{0.5} x^2 dx - \int_{0.5}^1 x^2 dx = -\frac{1}{4}$$

$$d_1(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{1,0}(x) dx = \int_0^{0.25} x^2 \sqrt{2} dx - \int_{0.25}^{0.5} x^2 \sqrt{2} dx = -\frac{\sqrt{2}}{32}$$

$$d_1(1) = \int_0^1 x^2 \psi_{1,1}(x) dx = \int_0^{0.75} x^2 \sqrt{2} dx - \int_{0.75}^1 x^2 \sqrt{2} dx = -\frac{3\sqrt{2}}{32}$$

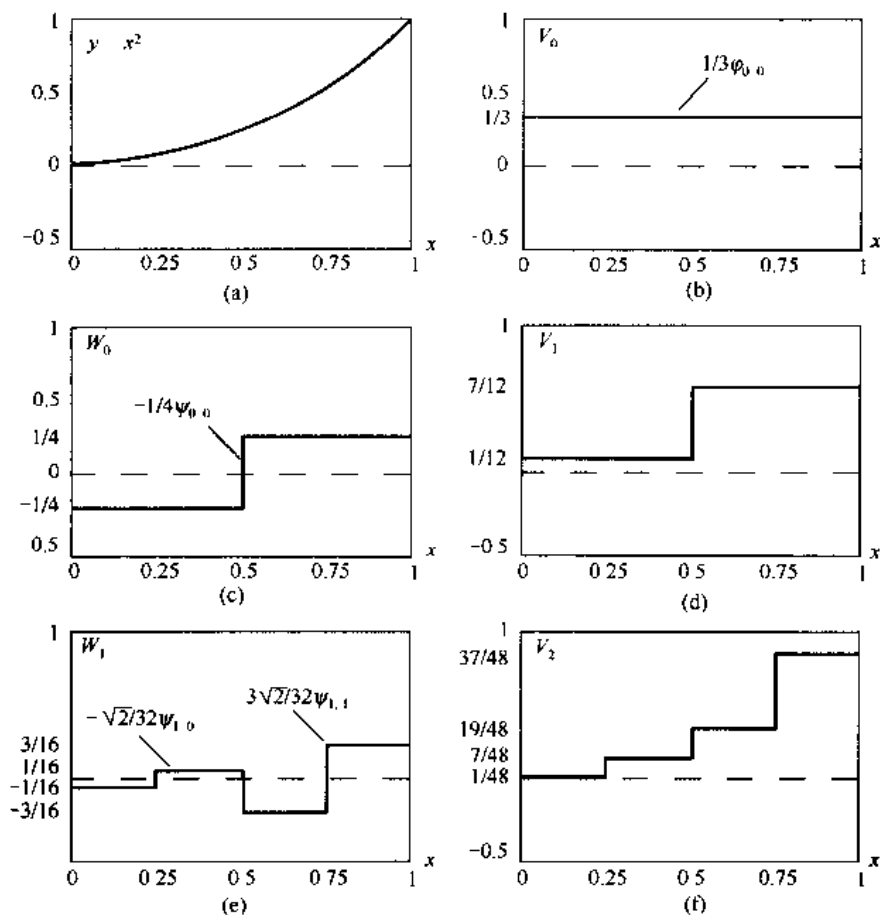


图 7.13 使用哈尔小波, $y = x^2$ 的小波序列展开

将这些值代入式(7.3.1),可以得到小波序列展开:

$$y = \underbrace{\frac{1}{3} \varphi_{0,0}(x)}_{V_0} + \underbrace{\left[-\frac{1}{4} \psi_{0,0}(x) \right]}_{W_0} + \underbrace{\left[-\frac{\sqrt{2}}{32} \psi_{1,0}(x) - \frac{3\sqrt{2}}{32} \psi_{1,1}(x) \right]}_{W_1} + \dots$$

$$\underbrace{V_1 = V_0 \oplus W_0}_{V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1}$$

上述展开中的第一项用 $c_0(0)$ 生成待展开函数的 V_0 子空间近似值。该近似值如

图 7.13(b)所示,是原始函数的平均值。第二项使用 $d_0(0)$ 通过从 W_0 子空间添加一级细节来修饰该近似值。添加的细节及 V_1 的结果近似值分别如图 7.13(c)和(d)所示。其他级别的细节由子空间 W_1 的系数 $d_1(0)$ 和 $d_1(1)$ 给出。该附加细节如图 7.13(e)所示, V_2 的结果近似值如图 7.13(f)所示。注意,展开函数现在已经接近原始函数了。越高的尺度(或细节的级别越高)被叠加,近似值越变得接近函数的精确表示,它的极限是 $j \rightarrow \infty$ 。

7.3.2 离散小波变换

与傅里叶序列展开相似,前节的小波序列展开将一个连续变量函数映射成一系数序列。如果待展开函数是一个数字序列,如连续函数 $f(x)$ 的抽样值,得到的系数就称为 $f(x)$ 的离散小波变换(DWT)。在这种情况下,式(7.3.1)到式(7.3.3)中定义的序列展开变成 DWT 变换对:

$$W_\varphi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) \varphi_{j_0, k}(x) \quad (7.3.5)$$

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) \psi_{j, k}(x) \quad (7.3.6)$$

对于 $j \geq j_0$ 还有:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\varphi(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(x) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(x) \quad (7.3.7)$$

这里, $f(x)$, $\varphi_{j_0, k}(x)$ 和 $\psi_{j, k}(x)$ 是离散变量 $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 的函数。例如,对于某个 x_0 , Δx , $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $f(x) = f(x_0 + x\Delta x)$ 。通常,令 $j_0 = 0$ 并选择 M 是 2 的幂(即 $M = 2^j$), 对 $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$ 和 $k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$ 求和。对于哈尔小波,变换中使用的离散尺度和小波函数(即基函数)与 7.1.3 节中的 $M \times M$ 哈尔变换矩阵的行相对应。变换本身由 M 个系数组成,最小尺度是 0,最大尺度是 $J-1$ 。出于 7.3.1 节和例 7.6 中解释的原因,式(7.3.5)和式(7.3.6)中定义的系数分别称为近似值和细节系数。

式(7.3.5)到式(7.3.7)中的 $W_\varphi(j_0, k)$ 和 $W_\psi(j, k)$ 对应于前节的小波序列展开中的 $c_{j_0}(k)$ 和 $d_j(k)$ (这些变量的变化并不是必须的,但它为下一节的连续小波变换中的标准符号提供了铺垫)。注意,序列展开中的积分变成了求和,而曾在 4.2.1 节的 DFT 中出现的归一化因子 $1/\sqrt{M}$ 在展开和反展开表达式中都有出现。该因子也可以在正展开和反展开表达式中以 $1/M$ 的形式出现。最后,应该记住,式(7.3.5)到式(7.3.7)只对正交基和紧框架有效。对于双正交基,式(7.3.5)和式(7.3.6)中的 φ 和 ψ 项必须由它们的对偶函数 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 代替。

例 7.8 计算一维离散小波变换

为说明式(7.3.5)到式(7.3.7)的用途,考虑四点的离散函数: $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = -3$ 和 $f(3) = 0$ 。因为 $M = 4$, $J = 2$ 且由于 $j_0 = 0$, 对 $x = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1$ (且对于 $j = 0$, $k = 0$, 或者对于 $j = 1$, $k = 0, 1$) 求和。将使用哈尔尺度和小波函数,并假定 $f(x)$ 的 4 个采样值分布在基函数的支撑区上,基函数的值为 1。将 4 个采样点代入式(7.3.5),可得:

$$\begin{aligned} W_\varphi(0, 0) &= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^3 f(x) \varphi_{0,0}(x) \\ &= \frac{1}{2} [1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1] = 1 \end{aligned}$$

因为对于 $x=0,1,2,3$, $\varphi_{0,0}(x)=1$ 。注意,这里采用的是哈尔尺度函数对于 $j=0$ 且 $k=0$ 的均匀空间采样。该值对应于 7.1.3 节的哈尔变换矩阵 $\mathbf{H}_4$ 的第一行。继续使用式(7.3.6)和相似间隔的采样点 $\psi_{j,k}(x)$ (它对应于 $\mathbf{H}_4$ 的第 2,3,4 行),可得:

$$W_\psi(0,0) = \frac{1}{2} [1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)] = 4$$

$$W_\psi(1,0) = \frac{1}{2} [1 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot (-\sqrt{2}) - 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0] = -1.5\sqrt{2}$$

$$W_\psi(1,1) = \frac{1}{2} [1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot (-\sqrt{2})] = -1.5\sqrt{2}$$

因此,这种简单的四点采样函数的离散小波变换与哈尔小波和尺度函数的关系是 $\{1, 4, -1.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}\}$ 。这里,变换系数是以它们计算的顺序安排的。

式(7.3.7)允许从变换中恢复出原始函数。重复求和,可得:

$$f(x) = \frac{1}{2} [W_\psi(0,0)\varphi_{0,0}(x) + W_\psi(0,0)\psi_{0,0}(x) + \\ W_\psi(1,0)\psi_{1,0}(x) + W_\psi(1,1)\psi_{1,1}(x)]$$

$x=0,1,2,3$ 。如果 $x=0$,

$$f(0) = \frac{1}{2} [1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1.5\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}) - 1.5\sqrt{2} \cdot 0] = 1$$

与正变换情况一样,尺度和小波函数的均匀空间采样也用于反变换的计算。

上例中的 4 点 DWT 是 $f(x)$ 的一个二尺度分解,即 $j=\{0,1\}$ 。基本的假设是开始尺度 j_0 为 0,也可以使用其他开始尺度。留给读者作为练习计算单尺度变换 $\{2.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}\}$,当开始尺度是 1 时,计算其结果(见习题 7.16)。这样,式(7.3.5)和式(7.3.6)定义了一组开始尺度与 j_0 不同的变换。

7.3.3 连续小波变换

离散小波变换的自然延伸是连续小波变换(CWT),将一个连续函数变换成两个连续变量(变换和尺度)的高冗余度函数。变换结果在时频分析上很容易解释并有很大价值。虽然我们的兴趣在离散图像上,出于完整性的考虑,也覆盖了连续变换。

连续的平方可积函数 $f(x)$ 的连续小波变换与实数值的小波 $\psi(x)$ 的关系如下:

$$W_\psi(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s,\tau}(x) dx \quad (7.3.8)$$

其中,

$$\psi_{s,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-\tau}{s}\right) \quad (7.3.9)$$

s 和 τ 分别称为尺度和变换参数。给定 $W_\psi(s, \tau)$, 可以通过反连续小波变换求得 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi(s, \tau) \frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2} d\tau ds \quad (7.3.10)$$

其中

$$C_\psi = \int_{-\infty}^\infty \frac{|\Psi(u)|^2}{|u|} du \quad (7.3.11)$$

$\Psi(u)$ 是 $\phi(x)$ 的傅里叶变换。式(7.3.8)到式(7.3.11)定义了可反变换的变换,只要满足所谓的“允许条件”, $C_\phi < \infty$ (Grossman和Morlet[1984])。大多数情况下,这表示 $\Psi(0) = 0$ 且 $u \rightarrow \infty$ 时 $\Psi(u) \rightarrow 0$,速度足够快以使 $C_\phi < \infty$ 。

上式是它们的离散对应部分[式(7.2.19)、式(7.3.1)、式(7.3.3)、式(7.3.6)和式(7.3.7)]的再现。注意下列相似性:

1. 连续变换参数 τ 取代了积分变换参数 k ;
2. 连续尺度参数 s 与二进制尺度参数 2^j 相反。这是由于 s 出现在式(7.3.9)中 $\phi((x-\tau)/s)$ 的分母上。这样,连续变换所用的小波在 $0 < s < 1$ 时被压缩或宽度减小,在 $s > 1$ 时扩大或展开。小波尺度和通常意义上的频率定义是相反的。
3. 连续变换与序列展开[见式(7.3.1)]或离散变换[见式(7.3.6)]相似,其中开始尺度 $j_0 = -\infty$ 。根据式(7.2.26),这消除了尺度函数间的明显关联,因此,函数表示只包括小波项。
4. 与离散变换类似,连续变换可以被看成是一组变换系数 $\{W_\phi(s, \tau)\}$,它给出了 $f(x)$ 与基函数集 $\{\psi_{s,\tau}(x)\}$ 的相似性。然而,在连续的情况下,两个集合都是无穷的。由于 $\psi_{s,\tau}(x)$ 具有实数值且 $\psi_{s,\tau}(x) = \psi_{s,\tau}^*(x)$,式(7.3.8)中的每个系数都是 $f(x)$ 和 $\psi_{s,\tau}(x)$ 的整数内积 $\langle f(x), \psi_{s,\tau}(x) \rangle$ 。

例 7.9 一维连续小波变换

墨西哥草帽小波:

$$\phi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \right) (1 - x^2) e^{-x^2/2} \quad (7.3.12)$$

由于波形而得名[见图 7.14(a)]。它与高斯概率函数的二阶导数成比例,均值为零,是紧支撑的($|x| \rightarrow \infty$ 时迅速衰减)。虽然满足连续可逆变换存在的容许性要求,但没有相关的尺度函数,且变换不能产生正交分析。它最显著的特性是它的对称性和式(7.3.12)的显式表达的存在性。

图 7.14(a)中的连续一维函数是两个墨西哥草帽小波的和:

$$f(x) = \psi_{1,10}(x) + \psi_{6,90}(x)$$

其傅里叶频谱,如图 7.14(b)所示,揭示了尺度化的小波和傅里叶频段之间的联系。频谱中的两个显著频段(或峰值)对应函数的两个类高斯扰动。

图 7.14(c)显示了图 7.14(a)中的函数根据墨西哥草帽小波完成的 CWT 的一部分($1 \leq s \leq 10$ 且 $\tau \leq 100$)。与图 7.14(b)中的傅里叶频谱不同,它同时给出了时域和频域的信息。注意,例如,当 $s = 1$ 时,变换在 $\tau = 10$ 时达到最大值,对应 $f(x)$ 分量 $\psi_{1,10}(x)$ 的位置。因为变换为 $f(x)$ 及其计算出的小波之间的相似性提供了客观评价,很容易了解它是如何用于特性检测的。这里只需要与我们感兴趣的特性相匹配的小波。从图 7.14(d)的灰度图也可以得出类似结论,其中,变换的绝对值 $|W_\phi(s, \tau)|$ 用黑白之间的灰度级显示。注意连续小波变换将一个一维函数变换成一个二维函数。

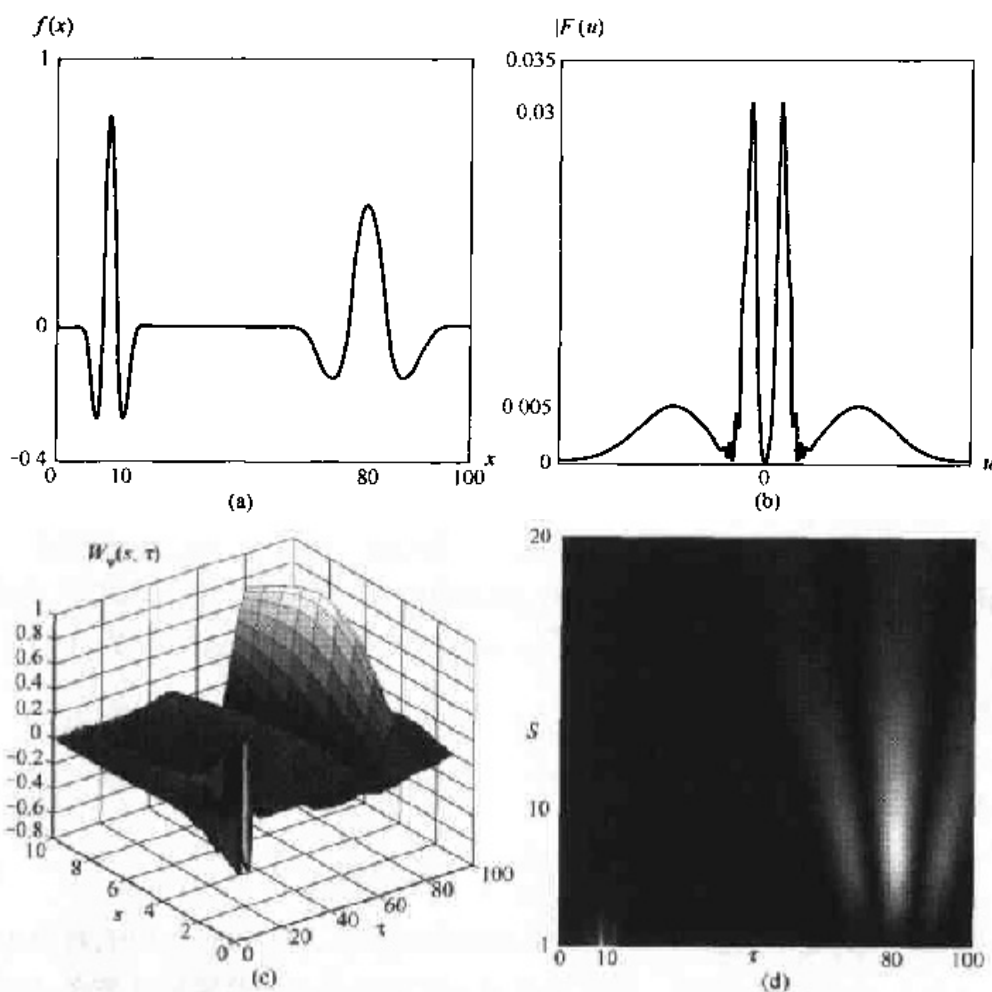


图 7.14 连续小波变换(c和d)和连续一维函数(a)的傅里叶频谱(b)

7.4 快速小波变换

快速小波变换(FWT)是一种实现离散小波变换(DWT)的高效计算,该变换找到了相邻尺度 DWT 系数间的一种令人惊喜的关系。它也称为Mallat人字形算法(Mallat[1989a,b]),FWT 类似于 7.1.2 节中的两段子带编码方案。

再次考虑多分辨率改善等式:

$$\varphi(x) = \sum_n h_p(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (7.4.1)$$

用 2^j 对 x 进行尺度化,用 k 对它进行平移,令 $m = 2k + n$,得:

$$\begin{aligned} \varphi(2^j x - k) &= \sum_n h_p(n) \sqrt{2} \varphi(2(2^j x - k) - n) \\ &= \sum_m h_p(m - 2k) \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} x - m) \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

注意,尺度向量 h_p 可以被看成是用来将 $\varphi(2^j x - k)$ 展开成尺度为 $j+1$ 的尺度函数和的“权”。从式(7.2.28)开始的一系列简单操作为 $\varphi(2^j x - k)$ 得出类似结论。即,

$$\phi(2^j x - k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m) \quad (7.4.3)$$

其中,式(7.4.2)中的尺度向量 $h_\varphi(n)$ 被式(7.4.3)中的小波向量 $h_\psi(n)$ 取代。

现在考虑 7.2.2 节中的式(7.3.5)和式(7.3.6)。它们定义了离散小波变换。将小波定义式(7.2.19)代入式(7.3.6),可得:

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (7.4.4)$$

用式(7.4.3)的右端代替 $\phi(2^j x - k)$, 变成:

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) 2^{j/2} \left[\sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \phi(2^{j+1} x - m) \right] \quad (7.4.5)$$

交换和式与整数,并重新安排,给出:

$$W_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \left[\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x f(x) 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} x - m) \right] \quad (7.4.6)$$

这里,括起来的量与式(7.3.5)在 $j_0 = j + 1$ 时相等。将式(7.2.10)代入式(7.3.5)并令 $j_0 = j + 1$, 这样可以写为:

$$W_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) W_\varphi(j + 1, m) \quad (7.4.7)$$

注意,DWT 在尺度 j 的细节系数是 DWT 在尺度 $j + 1$ 的近似值系数的函数。将式(7.4.2)和式(7.3.5)作为包含 DWT 近似值系数的近似派生的起点,类似地,有:

$$W_\varphi(j, k) = \sum_m h_\varphi(m - 2k) W_\varphi(j + 1, m) \quad (7.4.8)$$

式(7.4.7)和式(7.4.8)揭示了 DWT 相邻尺度系数间的重要关系。比较上述结果和式(7.1.7),我们看到尺度 j 的近似值和细节系数 $W_\varphi(j, k)$ 与 $W_\psi(j, k)$ 可以通过做尺度 $j + 1$ 的近似值系数 $W_\varphi(j + 1, k)$ 和时域反转的尺度与小波向量 $[h_\varphi(-n)$ 和 $h_\psi(-n)]$ 的卷积,而后对结果亚取样来计算。图 7.15 将这些操作简化成框图形式。注意,这与图 7.4 中的两段子带编码系统的分析部分相同, $h_0(n) = h_\varphi(-n)$ 且 $h_1(n) = h_\psi(-n)$ 。因此,有:

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) * W_\varphi(j + 1, n) \big|_{n=2k, k \geq 0} \quad (7.4.9)$$

和

$$W_\varphi(j, k) = h_\varphi(-n) * W_\varphi(j + 1, n) \big|_{n=2k, k \geq 0} \quad (7.4.10)$$

其中,卷积在 $n = 2k$ 时进行计算 ($k \geq 0$)。在非负偶数时刻计算卷积与以 2 为步长进行过滤和抽样的效果相同。

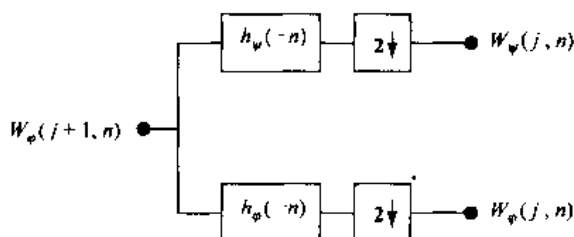


图 7.15 一个 FWT 分析滤波器族