

外。最后,熵值变化与一致性量度是反向的,因此从中也可以得到同一一致性量度相同的结论。第一个子图在灰度级上变化最小,而粗糙图像变化最大。规则纹理的灰度级变化在上述两种量度中处于两个极端之间。

仅使用直方图计算纹理的方法,由于直方图不具有像素之间相对位置的信息而受到限制。使纹理分析过程能得到这类信息的一个方法是,不仅考虑强度分布,还要考虑具有相同强度值或近似强度值的像素位置。

令 P 为位置算子并且令 A 为一个 $k \times k$ 阶矩阵,这个矩阵的元素 a_{ij} 是,出现(其位置由 P 指定)的灰度级为 z_i 的点相对于灰度级为 z_j 的点的倍数, $1 \leq i, j \leq k$ 。例如,考虑一幅具有 3 个灰度级的图像($z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 2$)如下所示:

```

0 0 0 1 2
1 1 0 1 1
2 2 1 0 0
1 1 0 2 0
0 0 1 0 1

```

将位置算子 P 定义为“在右下方的一个像素”,生成下列的 3×3 阶矩阵 A :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,比如, a_{11} (左上角)是灰度为 $z_1 = 0$ 的点出现在具有相同灰度的像素右下方的次数, a_{13} (右上角)是灰度为 $z_1 = 0$ 的点出现在灰度为 $z_3 = 2$ 的点右下位置的次数。 A 的大小由输入图像可分辨的灰度级数目决定。因此,这一节中讨论的概念在应用时一般需要将亮度重新在一个小的灰度级范围内进行量化,以便使矩阵易于处理。

令 n 为图像中满足 P 的点总数目(前述例子中 $n = 16$, 是矩阵 A 中所有值的和)。如果一个矩阵 C 是通过用 n 除 A 中的每一个元素得到的,则 c_{ij} 为概率估计,这个概率是一对满足 P 的、具有值 (z_i, z_j) 的点的联合概率。矩阵 C 称为灰度级共生矩阵。因为 C 依赖于 P , 所以要找到给出的纹理模式需要选择一个合适的位置算子。例如,用于前述例子的算子对于沿 -45° 分布的恒等强度区域很灵敏(注意 A 中的最大值为 $a_{11} = 4$, 部分是由于一条强度为 0 的点组成的条纹为 -45° 走向)。更一般的问题是,为了分类计算 C 的区域纹理而分析给定的 C 矩阵。为了实现这个目的,有用处的一些描绘子如下所示:

1. 最大概率:

$$\max_{i,j} (c_{ij})$$

2. 元素差异的 k 阶矩:

$$\sum_i \sum_j (i - j)^k c_{ij}$$

3. 逆元素差异的 k 阶矩:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} / (i - j)^k, i \neq j$$

4. 一致性:

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^2$$

5. 熵:

$$- \sum_i \sum_j c_{ij} \log_2 c_{ij}$$

基本思想是想通过这些描绘子描述 $\mathbf{C}$ 的“内容”特性。例如,第一条性质表示对 P 的最强响应。第二个描绘子当 $\mathbf{C}$ 中的大值接近主对角线时具有相对低的值,因为 $(i-j)$ 的差在此处较小。第三个描绘子有相反的效果。第四个描绘子当 c_{ij} 都相等时有最大值。如前面注意到的,第五个描绘子是一个随机性的度量,当 $\mathbf{C}$ 的所有元素有最大的随机性时,此描绘子具有最大值。

使用这些描绘子的一个方法是,“教授”一个系统有代表性的描绘子对不同的纹理集进行赋值。然后,未知区域有什么样的纹理就由它的描绘子是否与系统存储的纹理相匹配决定。将在第 12 章中更详细地讨论匹配。

结构性方法

如在本节开始时提到的,纹理描述的第二个主要范畴是基于结构的概念。假设我们有形如 $S \rightarrow aS$ 的规则,这种形式的规则表明字符 S 可以被重写为 aS (例如,三次应用此规则可生成字符串 $aaaS$)。如果 a 表示一个圆[图 11.23(a)],并且赋予形如 $aaa\cdots$ 的串以“向右排布的圆”的意义,则规则 $S \rightarrow aS$ 可以生成如图 11.23(b)所示的纹理模式。

假设下一步给这个方案增加一些新的规则: $S \rightarrow bA$, $A \rightarrow cA$, $A \rightarrow c$, $A \rightarrow bS$, $S \rightarrow a$, 这里 b 的存在表示“向下排布的圆”, c 的存在表示“向左排布的圆”。现在可以生成一个形如 $aaabc-cbaa$ 的串。这个串对应一个圆的 3×3 阶矩阵。更大的纹理模式,如图 11.23(c)所示,用相同的方式可以很容易地生成(然而注意,这些规则也可能生成非矩形的结构)。

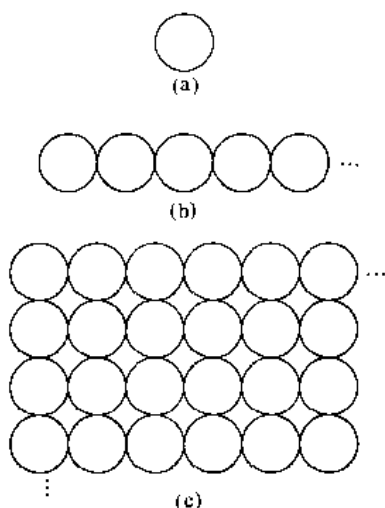


图 11.23 (a)纹理图元,(b)由规则 $S \rightarrow aS$ 生成的模式,
(c)由 $S \rightarrow aS$ 和其他规则生成的二维纹理模式

上述讨论的基本思想是:一个简单的“纹理图元”可以借助一些限制图元可能的排列数规则组成更为复杂的纹理模式。这些概念是关系描绘子的核心,将在 11.5 节中详细讨论。

频谱方法

如 5.4 节中提到的,傅里叶频谱完全适合于描述图像中循环的方向性或循环的二维模式。这些整体的纹理模式,尽管作为频谱中高能脉冲的集中区域是易于区别的,但一般来讲,这些纹理模式由于处理技术的局部性,使用空间检测方法是十分困难的。

这里,考虑对纹理描述有用的傅里叶频谱的 3 个特征:(1)频谱中突起的尖峰给出了纹理模式的主要方向;(2)在频率平面中尖峰的位置给出了模式的基本空间周期;(3)通过过滤除去所有周期性的部分,而留下非周期性的图像元素,然后,这些留下的元素可以通过统计技术进行描述。回想一下,频谱对于原点对称的,所以只需考虑半面频率平面即可。因此,为了进行分析,每个周期性模式都只与频谱中的一个尖峰相联系,而不是两个。

刚才提到的频谱特征的检测 and 解释通常使用函数 $S(r, \theta)$ 的极坐标表达比较简单。这里 S 是频谱函数, r 和 θ 是坐标系中的变量。对于每个方向 θ , $S(r, \theta)$ 可以看做一维函数 $S_\theta(r)$ 。类似地,对每个频率 r , $S_r(\theta)$ 也是一个一维函数。对固定的 θ 值分析 $S_\theta(r)$, 可得到沿着自原点的辐射方向上的频谱所表现的特性(比如存在的尖峰)。反之,分析固定 r 值的 $S_r(\theta)$, 可得到沿着以原点为圆心的圆形上的特性。

一种更具有整体性的描述通过对下列函数进行积分(对于离散变量为求和)得到:

$$S(r) = \sum_{\theta=0}^{\pi} S_\theta(r) \quad (11.3.10)$$

和

$$S(\theta) = \sum_{r=1}^{R_0} S_r(\theta) \quad (11.3.11)$$

这里 R_0 是以原点为圆心的圆半径。

式(11.3.10)和式(11.3.11)的结果为每对坐标 (r, θ) 组成一对值 $[S(r), S(\theta)]$ 。通过变换这些坐标,可以生成两个一维函数 $S(r)$ 和 $S(\theta)$, 从而对研究的整幅图像或所考虑的区域纹理构成一种频谱-能量描述。再有,这些描绘子本身可以计算以便定量地描述它们自身的状态。典型的用于这种目的的描绘子是最高值的位置、均值、振幅和轴向偏差两者的方差,还有函数的均值和最高值之间的距离。

例 11.7 频谱纹理

图 11.24 说明了式(11.3.10)和式(11.3.11)对于整体纹理描述的用处。图 11.24(a)显示了一幅带有周期性纹理的图像,图 11.24(b)显示了此图像的频谱。图 11.24(c)和图 11.24(d)分别显示了 $S(r)$ 和 $S(\theta)$ 的曲线。 $S(r)$ 的曲线具有典型的结构,在在原点附近有高能含量,及对于更高频率的渐进较低的值。 $S(\theta)$ 的曲线显示出以 45° 为间隔的突出尖峰,明显与图像中纹理内容的周期性相对应。

作为 $S(\theta)$ 的曲线如何用于区别两个纹理模式的说明,图 11.24(e)显示了另一幅在水平和垂直方向上具有较为突出的纹理模式的图像。图 11.24(f)显示了这一图像频谱 $S(\theta)$ 的

曲线。正如我们希望的,此曲线显示了以 90° 为间隔的尖峰。通过分析它们对应的 $S(\theta)$ 波形可以很容易地区分两个纹理模式。

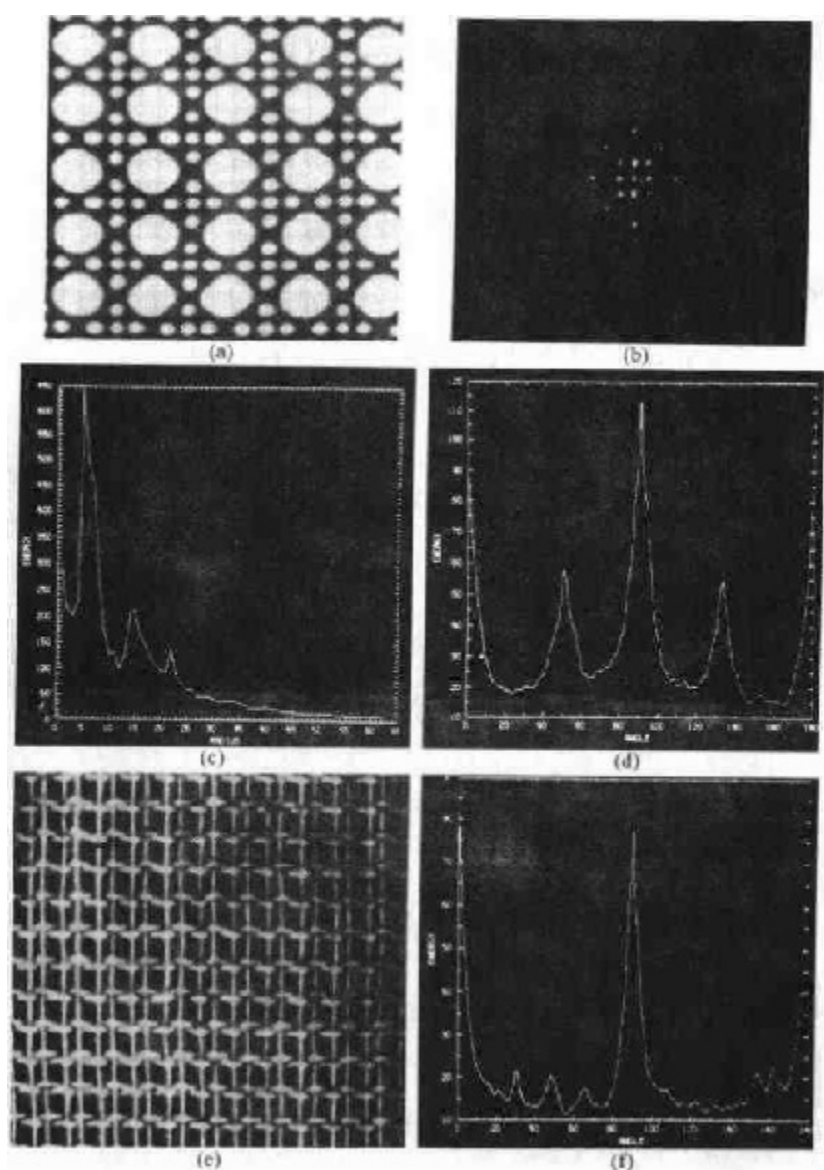


图 11.24 (a)显示了周期纹理的图像,(b)频谱,(c) $S(r)$ 的曲线,(d) $S(\theta)$ 的曲线,(e)具有不同类型的周期性纹理的另一幅图像,(f) $S(\theta)$ 的曲线(由田纳西大学的Dragana Brzakovic博士提供)

11.3.4 二维函数的矩

对于二维连续函数 $f(x, y)$, $(p+q)$ 阶矩定义为:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad (11.3.12)$$

$p, q = 0, 1, 2, \dots$ 。由单值性定理(Papoulis[1991])说明:如果 $f(x, y)$ 是分段连续的并且仅在 xy 平面内有限的部分具有非零值,则存在各阶矩,并且矩的序列 (m_{pq}) 由 $f(x, y)$ 惟一决定。相

反, (m_{pq}) 也惟一地决定 $f(x, y)$ 。

中心矩定义为:

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) dx dy \quad (11.3.13)$$

这里,

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \text{和} \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

如果 $f(x, y)$ 是数字图像, 则式(11.3.13)变成:

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) \quad (11.3.14)$$

总之,

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^0 f(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y f(x, y) \\ &= m_{00} \\ \mu_{10} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^0 f(x, y) \\ &= m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}} (m_{00}) \\ &= 0 \\ \mu_{01} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^1 f(x, y) \\ &= m_{01} - \frac{m_{01}}{m_{00}} (m_{00}) \\ &= 0 \\ \mu_{11} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^1 f(x, y) \\ &= m_{11} - \frac{m_{10} m_{01}}{m_{00}} \\ &= m_{11} - \bar{x} m_{01} = m_{11} - \bar{y} m_{10} \\ \mu_{20} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^2 (y - \bar{y})^0 f(x, y) \\ &= m_{20} - \frac{2m_{10}^2}{m_{00}} + \frac{m_{10}^2}{m_{00}} \\ &= m_{20} - \frac{m_{10}^2}{m_{00}} \\ &= m_{20} - \bar{x} m_{10} \\ \mu_{02} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^2 f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_{02} - \frac{m_{01}^2}{m_{00}} \\
&= m_{02} - \bar{y}m_{01} \\
\mu_{21} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^2 (y - \bar{y})^1 f(x, y) \\
&= m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01} \\
\mu_{12} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^2 f(x, y) \\
&= m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10} \\
\mu_{30} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^3 (y - \bar{y})^0 f(x, y) \\
&= m_{30} - 3\bar{x}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10} \\
\mu_{03} &= \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^3 f(x, y) \\
&= m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}
\end{aligned}$$

三阶中心矩为:

$$\begin{aligned}
\mu_{00} &= m_{00} & \mu_{02} &= m_{02} - \bar{y}m_{01} \\
\mu_{10} &= 0 & \mu_{30} &= m_{30} - 3\bar{x}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10} \\
\mu_{01} &= 0 & \mu_{03} &= m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01} \\
\mu_{11} &= m_{11} - \bar{y}m_{10} & \mu_{21} &= m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01} \\
\mu_{20} &= m_{20} - \bar{x}m_{10} & \mu_{12} &= m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}
\end{aligned}$$

归一化中心矩, 由 η_{pq} 表示, 定义为:

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\gamma}} \quad (11.3.15)$$

这里,

$$\gamma = \frac{p+q}{2} + 1 \quad (11.3.16)$$

$p+q=2, 3, \dots$

一组 7 个不变矩来自于二阶和三阶矩^①。

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02} \quad (11.3.17)$$

$$\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2 \quad (11.3.18)$$

$$\phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2 \quad (11.3.19)$$

$$\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \quad (11.3.20)$$

$$\begin{aligned}
\phi_5 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 \\
&\quad - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})
\end{aligned} \quad (11.3.21)$$

^① 这些结果的推导涉及的概念超出本节讨论的范畴。Bell[1965]著的书和 Hu[1962]写的论文中包含了这些概念的详细讨论。矩的不变式可以推广到 n 维空间(Mamistvalov[1998])。

$$\begin{aligned} & [3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ \phi_6 = & (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ & + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03}) \end{aligned} \quad (11.3.22)$$

$$\begin{aligned} \phi_7 = & (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 \\ & - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + (3\eta_{12} - \eta_{30})(\eta_{21} + \eta_{03}) \\ & [3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \end{aligned} \quad (11.3.23)$$

这些矩组对于平移、旋转和比例缩放是不变的。

例 11.8 二维不变矩

图 11.25(a)中显示的图像变为图 11.25(b)中的一半大小,图 11.25(c)中的是镜像图,图 11.25(d)中是旋转了 2° 和 45° 的图像。从式(11.3.17)到式(11.3.23)给出的 7 个不变矩都用于对这些图像进行计算,对其结果取对数是为了减小动态范围。如表 11.3 所示,图 11.25(b)到图 11.25(e)所得结果和对原图计算得到的不变矩有较好的一致性。产生误差的主要原因可归结为数据的数字化本质,特别是对于旋转的图像更是如此。

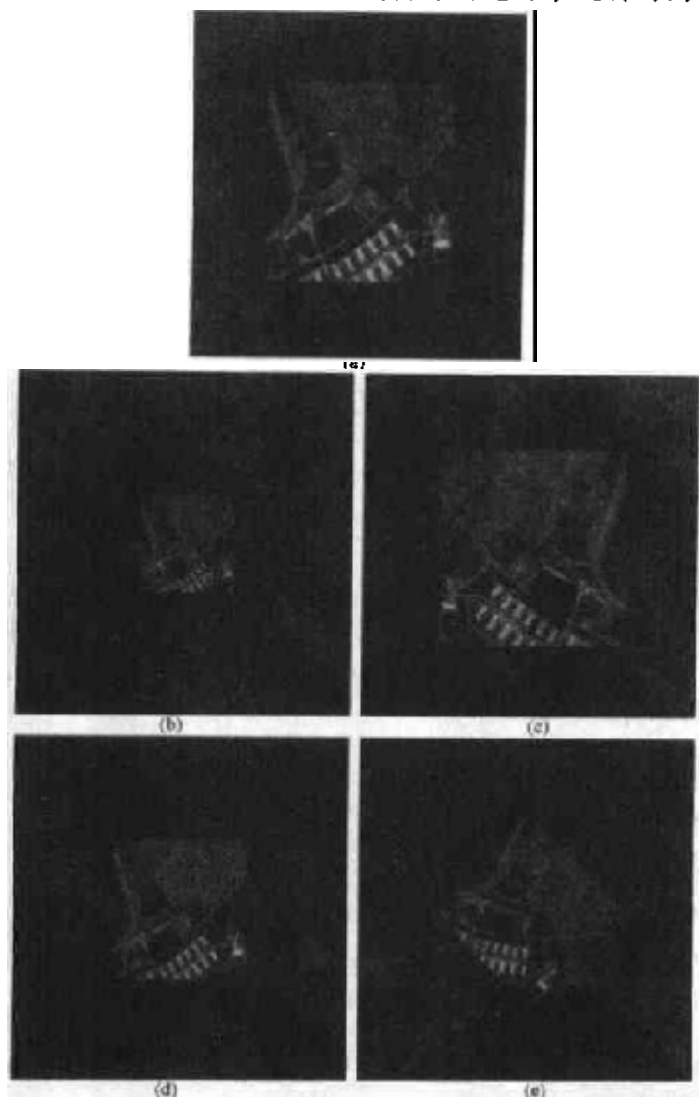


图 11.25 用于证明矩不变性质的图像(见表 11.3)

表 11.3 图 11.25(a) ~ (e) 中图像的矩不变量

不变量 (Log)	原值	一半尺寸	镜像	旋转 2°	旋转 45°
ϕ_1	6.249	6.226	6.919	6.253	6.318
ϕ_2	17.180	16.954	19.955	17.270	16.803
ϕ_3	22.655	23.531	26.689	22.836	19.724
ϕ_4	22.919	24.236	26.901	23.130	20.437
ϕ_5	45.749	48.349	53.724	46.136	40.525
ϕ_6	31.830	32.916	37.134	32.068	29.315
ϕ_7	45.589	48.343	53.590	46.017	40.470

11.4 运用主分量进行描绘

本节中提到的资料适用于边界和区域。另外,这些资料也可用做图像组描述的基础,这些图像已做过空间配准,但是这个集合对应的像素值是不同的(比如彩色 RGB 图像的 3 个分量图像)。假设得到了这样一幅彩色图像的 3 个分量图像。这 3 幅图像可以通过将每组 3 个对应的像素表示成一个向量而看做一个单元。例如,令 x_1, x_2 和 x_3 分别为这 3 幅图像的第 1 个像素的值。这 3 个元素可以用三维列向量 $\mathbf{x}$ 的形式表示,这里有:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

这个向量表示在所有 3 幅图像中的一个普通像素。如果图像大小为 $M \times N$,将所有像素用这种方式表示后,将有总数为 $K = MN$ 的三维向量。如果有 n 个配准了的图像,向量将是 n 维的:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (11.4.1)$$

纵观这一节,我们假定所有的向量都是列向量(即 $n \times 1$ 阶矩阵)。可以把它们写成一行文本,即 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的形式,这里“ T ”表示转置。

可以把向量当做随机量,就像我们构造灰度级直方图时做的那样。仅有的不同点是,现在谈论的是随机向量的均值向量和方差矩阵,而不是随机变量的均值和方差。总体的均值向量定义为:

$$\mathbf{m}_x = E\{\mathbf{x}\} \quad (11.4.2)$$

这里 $E\{\cdot\}$ 是变量的期望值,脚标表示 $\mathbf{m}$ 与向量 $\mathbf{x}$ 的总体相联系。向量或矩阵的期望值是通过取每个元素的期望值得到的。

总体向量的方差矩阵定义为:

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\} \quad (11.4.3)$$

因为 $\mathbf{x}$ 是 n 维的, $\mathbf{C}_x$ 和 $(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T$ 是 $n \times n$ 阶矩阵。 $\mathbf{C}_x$ 的元素 c_{ii} 是总体向量中 $\mathbf{x}$ 向量的第 i 个分量 x_i 的方差, 而且 $\mathbf{C}_x$ 的元素 c_{ij} 是这些向量元素 x_i 和 x_j 的协方差。^① 矩阵 $\mathbf{C}_x$ 是实对称的。如果元素 x_i 和 x_j 无关, 它们的协方差为零, 且有 $c_{ij} = c_{ji} = 0$ 。注意, 当 $n = 1$ 时, 所有这些定义都降为常见的一维对应量。

对于从随机总体中取样的 K 向量, 均值向量可以通过使用常见的求平均值的表达式由样本来近似得到。

$$\mathbf{m}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \quad (11.4.4)$$

同样, 通过扩展乘积 $(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T$ 并使用式(11.4.2)和式(11.4.4), 会发现协方差矩阵可以以如下方式用样本近似得到:

$$\mathbf{C}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T \quad (11.4.5)$$

例 11.9 均值向量和协方差矩阵的计算

为了说明式(11.4.4)和式(11.4.5)的机制, 考虑 4 个向量 $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 0)^T$ 和 $\mathbf{x}_4 = (1, 0, 1)^T$, 这里使用转置以便列向量可以像前面注释的一样方便地写成横向文本。应用式(11.4.4)得到下列均值向量:

$$\mathbf{m}_x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样, 使用式(11.4.5)得到下列协方差矩阵:

$$\mathbf{C}_x = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

所有沿着主对角线的元素都相等, 这表示总体向量中向量的 3 个分量有同样的方差。元素 x_1 和 x_2 , x_1 和 x_3 必定相关; 元素 x_2 和 x_3 必定不相关。

因为 $\mathbf{C}_x$ 是实对称的, 找到一组 n 个标准正交特征向量总是可能的(见 Noble 和 Daniel [1988] 的著作)。令 $\mathbf{e}_i$ 和 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 为特征向量和对应的 $\mathbf{C}_x$ 特征值, 以降序排布(为了方便)使 $\lambda_i \geq \lambda_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ 。^② 令 $\mathbf{A}$ 为一个由 $\mathbf{C}_x$ 的特征向量组成其行元素的矩阵, 并进行排序, 使 $\mathbf{A}$ 的第一行为对应最大特征值的特征向量, 而最后一行为对应最小特征值的特征向量。

假设将 $\mathbf{A}$ 作为将 $\mathbf{x}$ 的向量映射到用 $\mathbf{y}$ 代表的向量的变换矩阵, 如下所示:

- ① 回顾具有均值为 m 的随机变量 x 的方差定义为 $E\{(x - m)^2\}$, 两个随机变量 x_i 和 x_j 的协方差定义为 $E\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)\}$ 。如果变量不相关, 它们的协方差为 0。
- ② 根据定义, $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{C}$ 的特征向量和特征值满足 $\mathbf{C}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \quad (11.4.6)$$

则这个表达式称为霍特林(Hotelling)变换,这个变换就像将在下面简要说明的那样,具有某些有趣的和有用的性质。

不难说明从这一变换得到的 $\mathbf{y}$ 向量的均值是 0,即:

$$\mathbf{m}_y = E\{\mathbf{y}\} = 0 \quad (11.4.7)$$

这一结论是依据基本矩阵理论:关于 $\mathbf{y}$ 向量的协方差矩阵是由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}_x$ 用下列表达式得到的。

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{A}\mathbf{C}_x\mathbf{A}^T \quad (11.4.8)$$

再有,因为 $\mathbf{A}$ 的构成方式, $\mathbf{C}_y$ 是一个对角矩阵,其主对角线上的元素是 $\mathbf{C}_x$ 的特征值;即:

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (11.4.9)$$

这个协方差矩阵的非对角线上的元素为 0,所以向量组 $\mathbf{y}$ 的元素是不相关的。记住, λ_j 是 $\mathbf{C}_x$ 的特征值,并且沿着对角矩阵主对角线的元素是 $\mathbf{C}_x$ 的特征值(见 Noble 和 Daniel[1988]的著述)。因此, $\mathbf{C}_x$ 和 $\mathbf{C}_y$ 有相同的特征值。实际上,它们的特征向量也是相同的。

霍特林变换的另外一个重要性质是处理由 $\mathbf{y}$ 重构 $\mathbf{x}$ 的问题。因为 $\mathbf{A}$ 的各行是正交向量,具有 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ 的性质,任何向量 $\mathbf{x}$ 能够通过相应的 $\mathbf{y}$ 使用下列表达式恢复回来:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{m}_x \quad (11.4.10)$$

然而,假设不使用 $\mathbf{C}_x$ 的特征向量,而从 k 个特征向量对应的 k 个最大特征值得到一个 $k \times n$ 转换矩阵,从而构成矩阵 $\mathbf{A}_k$ 。向量组 $\mathbf{y}$ 则成为 k 维的,并且也不再需要式(11.4.10)的重构方法(这与我们在 11.2.3 节中应用的使用少量傅里叶系数描述一个边界的过程有些相似)。

使用 $\mathbf{A}_k$ 重构向量的方法如下:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_k^T \mathbf{y} + \mathbf{m}_x \quad (11.4.11)$$

$\mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 之间的均方误差可以由下列表达式给出:

$$\begin{aligned} e_{ms} &= \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^k \lambda_j \\ &= \sum_{j=k+1}^n \lambda_j \end{aligned} \quad (11.4.12)$$

式(11.4.12)的第一行表明,如果 $k = n$ (即,如果所有的特征向量都用于变换),则误差为零。因为 λ_j 单调减少,式(11.4.12)也说明误差可以通过选择 k 个具有最大特征值的特征向量而降至最小。因此,从可以将向量 $\mathbf{x}$ 和它的近似值 $\hat{\mathbf{x}}$ 之间的均方误差降至最小这方面来说,霍特林变换是最佳的。由于这种使用特征向量对应的最大特征值的思想,霍特林变换也称为主分量变换。