复习思考题

R2.2.1 你能各举出一个现实生活中存在的与、或、非逻辑关系的事例吗?

R2.2.2 两个变量的异或运算和同或运算之间是什么关系?

2.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

2.3.1 基本公式

表 2.3.1 给出了逻辑代数的基本公式。这些公式也称为布尔恒等式。

表 2.3.1 逻辑代数的基本公式

序号	公式	序号	公式
1	$\mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$	10	$\mathbf{1}' = \mathbf{0}; \mathbf{0}' = \mathbf{1}$
2	$\mathbf{1} \cdot A = A$	11	$\mathbf{1} + A = \mathbf{1}$
3	$A \cdot A = A$	12	$\mathbf{0} + A = A$
4	$A \cdot A' = \mathbf{0}$	13	$A + A = A$
5	$A \cdot B = B \cdot A$	14	$A + A' = \mathbf{1}$
6	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	15	$A + B = B + A$
7	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
8	$(A \cdot B)' = A' + B'$	17	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
9	$(A')' = A$	18	$(A + B)' = A' \cdot B'$

式(1)、(2)、(11)和(12)给出了变量与常量间的运算规则。

式(3)和(13)是同一变量的运算规律,也称为重叠律。

式(4)和(14)表示变量与它的反变量之间的运算规律,也称为互补律。

式(5)和(15)为交换律,式(6)和(16)为结合律,式(7)和(17)为分配律。

式(8)和(18)是著名的德·摩根(De. Morgan)定理,亦称反演律。在逻辑函数的化简和变换中经常要用到这一对公式。

式(9)表明,一个变量经过两次求反运算之后还原为其本身,所以该式又称为还原律。

式(10)是对 **0** 和 **1** 求反运算的规则,它说明 **0** 和 **1** 互为求反的结果。

这些公式的正确性可以用列真值表的方法加以验证。如果等式成立,那么将任何一组变量的取值代入公式两边所得的结果应该相等。因此,等式两边所

对应的真值表也必然相同。

【例 2.3.1】 用真值表证明表 2.3.1 中式(17)的正确性。

解： 已知表 2.3.1 中的式(17)为

$$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$$

将 A、B、C 所有可能的取值组合逐一代入上式的两边，算出相应的结果，即得到表 2.3.2 所示的真值表。可见，等式两边对应的真值表相同，故等式成立。

表 2.3.2 式(17)的真值表

$A\ B\ C$	$B\cdot C$	$A+B\cdot C$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)\cdot(A+C)$
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

2.3.2 若干常用公式

表 2.3.3 中列出了几个常用公式。这些公式是利用基本公式导出的。直接运用这些导出公式可以给化简逻辑函数的工作带来很大方便。

现将表 2.3.3 中的各式证明如下。

1. 式(21) $A+A\cdot B=A$

证明： $A+A\cdot B=A\cdot(1+B)=A\cdot 1=A$

上式说明，在两个乘积项相加时，若其中一项以另一项为因子，则该项是多余的，可以删去。

表 2.3.3 若干常用公式

序 号	公 式
21	$A+A\cdot B=A$
22	$A+A'\cdot B=A+B$
23	$A\cdot B+A\cdot B'=A$
24	$A\cdot(A+B)=A$
25	$A\cdot B+A'\cdot C+B\cdot C=A\cdot B+A'\cdot C$ $A\cdot B+A'\cdot C+BCD=A\cdot B+A'\cdot C$
26	$A\cdot(A\cdot B)'=A\cdot B';A'\cdot(AB)'=A'$

2. 式(22) $A+A'\cdot B=A+B$

证明： $A+A'\cdot B=(A+A')\cdot(A+B)=1\cdot(A+B)=A+B$

这一结果表明，两个乘积项相加时，如果一项取反后是另一项的因子，则此因子是多余的，可以消去。

3. 式(23) $A \cdot B + A \cdot B' = A$

证明： $A \cdot B + A \cdot B' = A(B + B') = A \cdot \mathbf{1} = A$

这个公式的含义是，当两个乘积项相加时，若它们分别包含 B 和 B' 两个因子而其他因子相同，则两项定能合并，且可将 B 和 B' 两个因子消去。

4. 式(24) $A \cdot (A + B) = A$

证明： $A \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B = A + A \cdot B$

$$= A \cdot (\mathbf{1} + B) = A \cdot \mathbf{1} = A$$

该式说明，变量 A 和包含 A 的和相乘时，其结果等于 A，即可以将和消掉。

5. 式(25) $A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A' \cdot C$

证明：
$$\begin{aligned} A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C &= A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C(A + A') \\ &= A \cdot B + A' \cdot C + A \cdot B \cdot C + A' \cdot B \cdot C \\ &= A \cdot B \cdot (\mathbf{1} + C) + A' \cdot C \cdot (\mathbf{1} + B) \\ &= A \cdot B + A' \cdot C \end{aligned}$$

这个公式说明，若两个乘积项中分别包含 A 和 A' 两个因子，而这两个乘积项的其余因子组成第三个乘积项时，则第三个乘积项是多余的，可以消去。

从上式不难进一步导出

$$A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C \cdot D = A \cdot B + A' \cdot C$$

6. 式(26) $A \cdot (A \cdot B)' = A \cdot B'; A' \cdot (A \cdot B)' = A'$

证明： $A \cdot (A \cdot B)' = A \cdot (A' + B') = A \cdot A' + A \cdot B' = A \cdot B'$

上式说明，当 A 和一个乘积项的非相乘，且 A 为乘积项的因子时，则 A 这个因子可以消去。

$$\begin{aligned} A' \cdot (A \cdot B)' &= A' \cdot (A' + B') = A' \cdot A' + A' \cdot B' = A' \cdot (\mathbf{1} + B') \\ &= A' \end{aligned}$$

此式表明，当 A' 和一个乘积项的非相乘，且 A 为乘积项的因子时，其结果就等于 A'。

从以上的证明可以看到，这些常用公式都是从基本公式导出的结果。当然，还可以推导出更多的常用公式。

复习思考题

R2.3.1 在逻辑代数的基本公式当中哪些公式的运算规则和普通代数的运算规则是相同的？哪些是不同的、需要特别记住的？

2.4 逻辑代数的基本定理

2.4.1 代入定理

在任何一个包含变量 A 的逻辑等式中,若以另外一个逻辑式代入式中所有 A 的位置,则等式仍然成立。这就是所谓的代入定理。

因为变量 A 仅有 **0** 和 **1** 两种可能的状态,所以无论将 $A=\mathbf{0}$ 还是 $A=\mathbf{1}$ 代入逻辑等式,等式都一定成立。而任何一个逻辑式的取值也不外 **0** 和 **1** 两种,所以用它取代式中的 A 时,等式自然也成立。因此,可以将代入定理看作无需证明的公理。

利用代入定理很容易把表 2.3.1 中的基本公式和表 2.3.3 中的常用公式推广为多变量的形式。

【例 2.4.1】 用代入定理证明德 · 摩根定理也适用于多变量的情况。

解: 已知二变量的德 · 摩根定理为

$$(A+B)'=A'\cdot B' \quad 及 \quad (A\cdot B)'=A'+B'$$

今以 $(B+C)$ 代入左边等式中 B 的位置,同时以 $(B\cdot C)$ 代入右边等式中 B 的位置,于是得到

$$(A+(B+C))'=A'\cdot(B+C)'=A'\cdot B'\cdot C'$$

$$(A\cdot(B\cdot C))'=A'+(B\cdot C)'=A'+B'+C'$$

对一个乘积项或逻辑式求反时,应在乘积项或逻辑式外边加括号,然后对括号内的整个内容求反。

此外,在对复杂的逻辑式进行运算时,仍需遵守与普通代数一样的运算优先顺序,即先算括号里的内容,其次算乘法,最后算加法。

2.4.2 反演定理

对于任意一个逻辑式 Y,若将其中所有的“ · ”换成“ + ”,“ + ”换成“ · ”,**0** 换成 **1**,**1** 换成 **0**,原变量换成反变量,反变量换成原变量,则得到的结果就是 Y'。这个规律称为反演定理。

反演定理为求取已知逻辑式的反逻辑式提供了方便。

在使用反演定理时,还需注意遵守以下两个规则:

① 仍需遵守“先括号、然后乘、最后加”的运算优先次序。

② 不属于单个变量上的反号应保留不变。

回顾一下 3.3.1 节中讲过的德 · 摩根定理便可发现,它只不过是反演定理

的一个特例而已。正是由于这个原因，才将它称为反演律。

【例 2.4.2】 已知 $Y=A(B+C)+CD$，求 Y'。

解： 根据反演定理可写出

$$\begin{aligned}Y'&=(A'+B'C')(C'+D')\\&=A'C'+B'C'+A'D'+B'C'D'\\&=A'C'+B'C'+A'D'\end{aligned}$$

如果利用基本公式和常用公式进行运算，也能得到同样的结果，但是要麻烦得多。

【例 2.4.3】 若 $Y=((AB'+C)'+D)'+C$，求 Y'。

解： 依据反演定理可直接写出

$$Y'=(((A'+B)C')'D')'C'$$

2.4.3 对偶定理

若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等，这就是对偶定理。

所谓对偶式是这样定义的：对于任何一个逻辑式 Y，若将其中的“·”换成“+”，“+”换成“·”，**0** 换成 **1**，**1** 换成 **0**，则得到一个新的逻辑式 Y^D，这个 Y^D 就称为 Y 的对偶式，或者说 Y 和 Y^D 互为对偶式。

例如，若 $Y=A(B+C)$， 则 $Y^D=A+BC$

若 $Y=(AB+CD)'$， 则 $Y^D=((A+B)(C+D))'$

若 $Y=AB+(C+D)'$， 则 $Y^D=(A+B)(CD)'$

为了证明两个逻辑式相等，也可以通过证明它们的对偶式相等来完成，因为有些情况下证明它们的对偶式相等更加容易。

【例 2.4.4】 试证明表 2.3.1 中的式(17)，即

$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

解： 首先写出等式两边的对偶式，得到

$$A(B+C) \quad 和 \quad AB+AC$$

根据乘法分配律可知，这两个对偶式是相等的，亦即 $A(B+C)=AB+AC$。由对偶定理即可确定原来的两式也一定相等，于是式(17)得到证明。

如果仔细分析一下表 2.3.1 就能够发现，其中的公式(1)和(11)、(2)和(12)、(3)和(13)、(4)和(14)、(5)和(15)、(6)和(16)、(7)和(17)、(8)和(18)皆互为对偶式。因此，只要能证明公式(1)～(8)成立，则公式(11)～(18)已无需另做证明。

复习思考题

R2.4.1 代入定理中对代入逻辑式的形式和复杂程度有无限制？

R2.4.2 利用反演定理对给定逻辑式求反时，应如何处理变换的优先顺序和式中所有的非运算符号？

2.5 逻辑函数及其表示方法

2.5.1 逻辑函数

从上面讲过的各种逻辑关系中可以看到，如果以逻辑变量作为输入，以运算结果作为输出，那么当输入变量的取值确定之后，输出的取值便随之而定。因此，输出与输入之间乃是一种函数关系。这种函数关系称为逻辑函数（logic function），写作

$$Y=F(A,B,C,\cdots)$$

由于变量和输出（函数）的取值只有 **0** 和 **1** 两种状态，所以我们所讨论的都是二值逻辑函数。

任何一件具体的因果关系都可以用一个逻辑函数来描述。例如，图 2.5.1 所示是一个举重裁判电路，可以用一个逻辑函数描述它的逻辑功能。

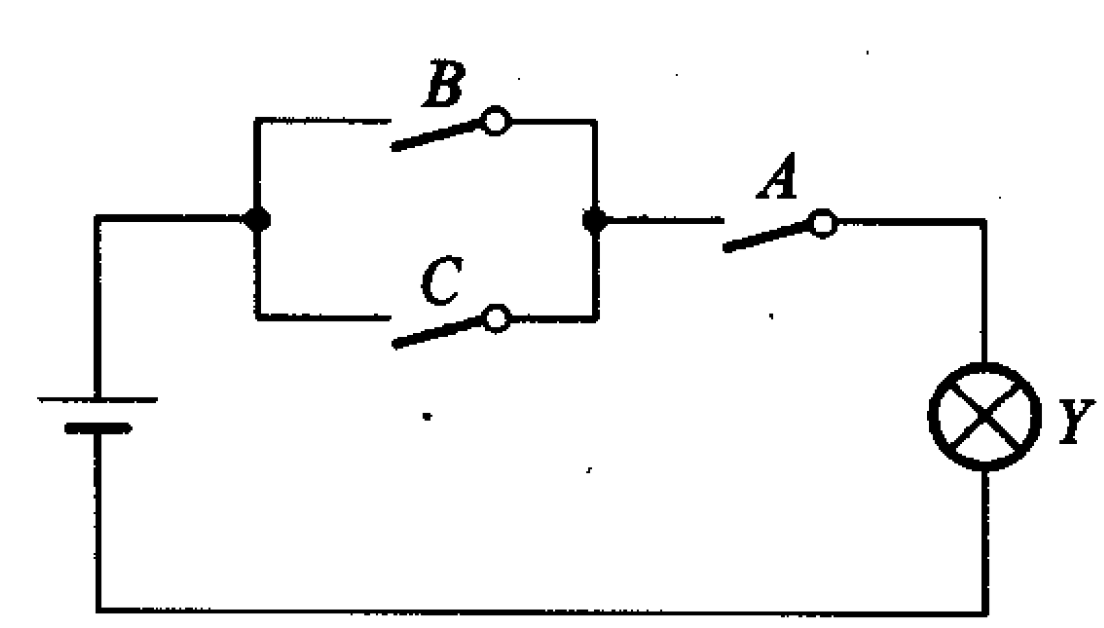

图 2.5.1 举重裁判电路

比赛规则规定，在一名主裁判和两名副裁判中，必须有两人以上（而且必须包括主裁判）认定运动员的动作合格，试举才算成功。比赛时主裁判掌握着开关 A，两名副裁判分别掌握着开关 B 和 C。当运动员举起杠铃时，裁判认为动作合格了就合上开关，否则不合。显然，指示灯 Y 的状态（亮与暗）是开关 A、B、C 状态（合上与断开）的函数。

若以 **1** 表示开关闭合，**0** 表示开关断开；以 **1** 表示灯亮，以 **0** 表示灯暗，则指示灯 Y 是开关 A、B、C 的二值逻辑函数，即

$$Y=F(A,B,C)$$

2.5.2 逻辑函数的表示方法

常用的逻辑函数表示方法有逻辑真值表、逻辑函数式(简称逻辑式或函数式)、逻辑图、波形图、卡诺图和硬件描述语言等。这一节只介绍前面四种方法,用卡诺图和硬件描述语言表示逻辑函数的方法将在后面做专门介绍。

一、逻辑真值表

将输入变量所有的取值下对应的输出值找出来,列成表格,即可得到真值表。

仍以图 2.5.1 所示的举重裁判电路为例,根据电路的工作原理不难看出,只有 $A=\mathbf{1}$,同时 B、C 至少有一个为 **1** 时 Y 才等于 **1**,于是可列出图 2.5.1 所示电路的真值表,见表 2.5.1。

表 2.5.1 图 2.5.1 所示电路的真值表

输入			输出
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

二、逻辑函数式

将输出与输入之间的逻辑关系写成**与**、**或**、**非**等运算的组合式,即逻辑代数式,就得到了所需的逻辑函数式。

在图 2.5.1 所示的电路中,根据对电路功能的要求和**与**、**或**的逻辑定义,“B 和 C 中至少有一个合上”可以表示为$(B+C)$,“同时还要求合上 A”,则应写作 $A\cdot(B+C)$。因此得到输出的逻辑函数式为

$$Y=A(B+C) \tag{2.5.1}$$

三、逻辑图

将逻辑函数式中各变量之间的**与**、**或**、**非**等逻辑关系用图形符号表示出来,就可以画出表示函数关系的逻辑图(logic diagram)。

为了画出表示图 2.5.1 电路功能的逻辑图,只要用逻辑运算的图形符号代替式(2.5.1)中的代数运算符号便可得到图 2.5.2 所示的逻辑图。

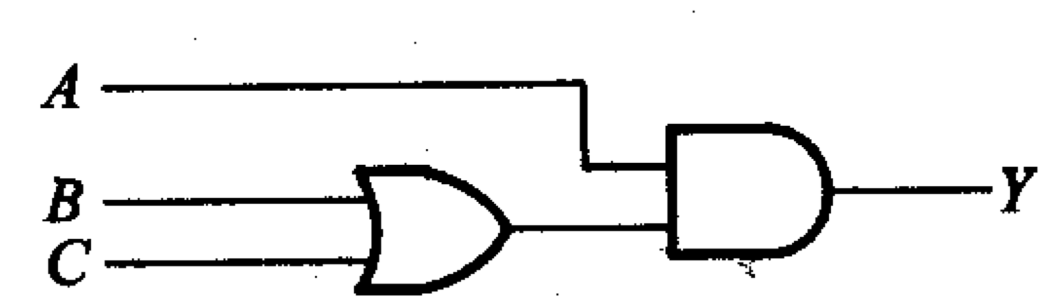

图 2.5.2 表示图 2.5.1 电路逻辑功能的逻辑图

四、波形图

如果将逻辑函数输入变量每一种可能出现的取值与对应的输出值按时间顺序依次排列起来,就得到了表示该逻辑函数的波形图。这种波形图(waveform)也称为时序图(timing diagram)。在逻辑分析仪和一些计算机仿真工具中,经常以这种波形图的形式给出分析结果。此外,也可以通过实验观察这些波形图,以检验实际逻辑电路的功能是否正确。

如果用波形图来描述式(2.5.1)的逻辑函数,则只需将表2.5.1给出的输入变量与对应的输出变量取值依时间顺序排列起来,就可以得到所要的波形图了(如图2.5.3所示)。

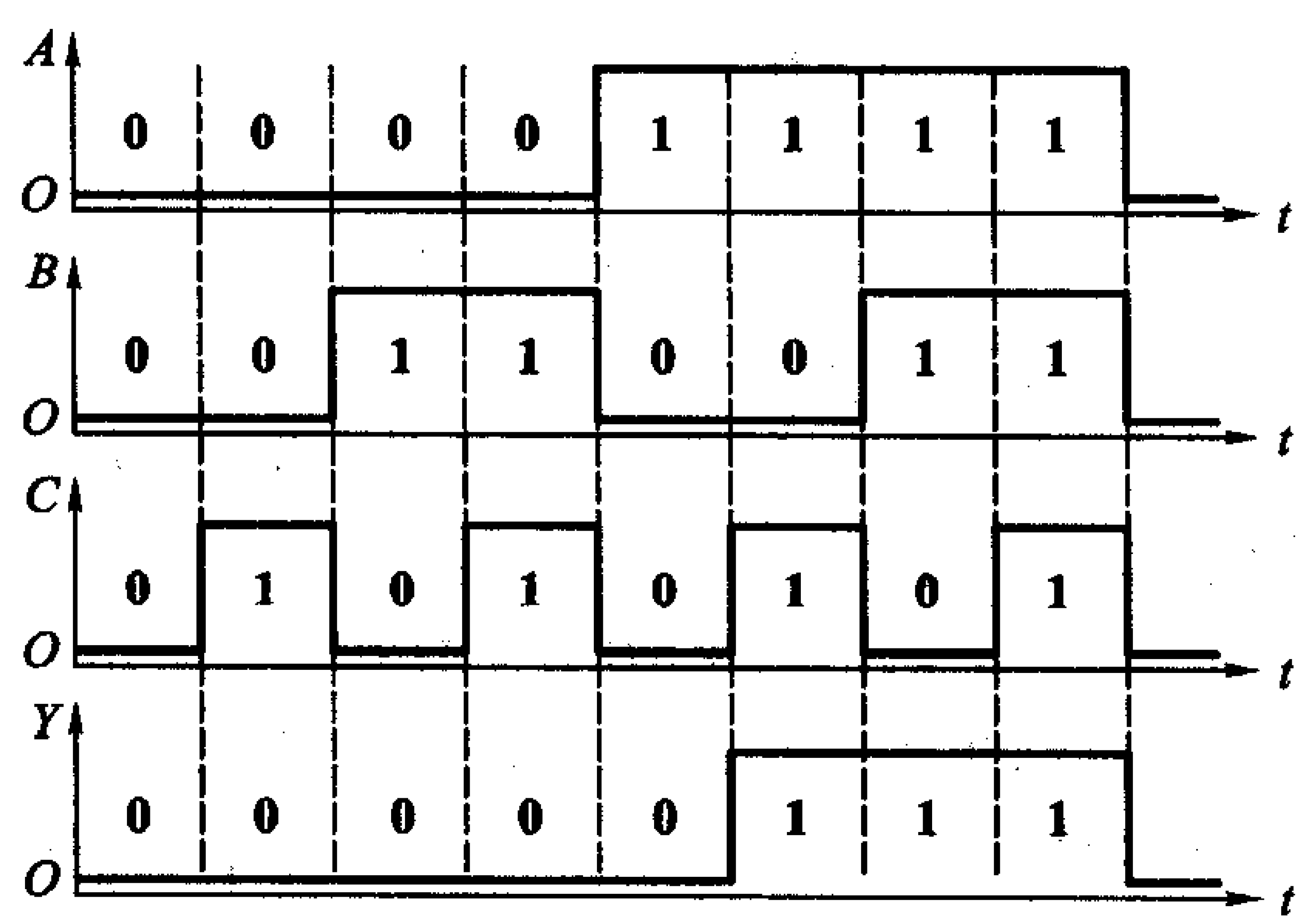

图2.5.3 表示图2.5.1电路逻辑功能的波形图

五、各种表示方法间的相互转换

既然同一个逻辑函数可以用多种不同的方法描述,那么这几种方法之间必能相互转换。

1. 真值表与逻辑函数式的相互转换

首先讨论从真值表得到逻辑函数式的方法。为了便于理解转换的原理,先来讨论下面一个具体的例子。

【例2.5.1】 已知一个奇偶判别函数的真值表如表2.5.2所示,试写出它的逻辑函数式。

表2.5.2 例2.5.1的函数真值表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

续表

A	B	C	Y
0	1	1	1……→$A'BC=1$
1	0	0	0
1	0	1	1……→$AB'C=1$
1	1	0	1……→$ABC'=1$
1	1	1	0

解： 由真值表可见，只有当A、B、C三个输入变量中两个同时为1时，Y才为1。因此，在输入变量取值为以下三种情况时，Y将等于1：

$$A=0、B=1、C=1$$

$$A=1、B=0、C=1$$

$$A=1、B=1、C=0$$

而当$A=0$、$B=1$、$C=1$时，必然使乘积项$A'BC=1$；当$A=1$、$B=0$、$C=1$时，必然使乘积项$AB'C=1$；当$A=1$、$B=1$、$C=0$时，必然使$ABC'=1$，因此Y的逻辑函数应当等于这三个乘积项之和，即

$$Y=A'BC+AB'C+ABC'$$

通过例2.5.1可以总结出由真值表写出逻辑函数式的一般方法，这就是：

① 找出真值表中使逻辑函数$Y=1$的那些输入变量取值的组合。

② 每组输入变量取值的组合对应一个乘积项，其中取值为1的写入原变量，取值为0的写入反变量。

③ 将这些乘积项相加，即得Y的逻辑函数式。

由逻辑式列出真值表就更简单了。这时只需将输入变量取值的所有组合状态逐一代入逻辑式求出函数值，列成表，即可得到真值表。

【例2.5.2】 已知逻辑函数$Y=A+B'C+A'BC'$，求它对应的真值表。

解： 将A、B、C的各种取值逐一代入Y式中计算，将计算结果列表，即得表2.5.3所示的真值表。初学时为避免差错，可先将$B'C$、$A'BC'$两项算出，然后将A、$B'C$和$A'BC'$相加求出Y的值。

表2.5.3 例2.5.2的真值表

A	B	C	$B'C$	$A'BC'$	Y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0

续表

A	B	C	$B'C$	$A'BC'$	Y
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

2. 逻辑函数式与逻辑图的相互转换

从给定的逻辑函数式转换为相应的逻辑图时，只要用逻辑图形符号代替逻辑函数式中的逻辑运算符号并按运算优先顺序将它们连接起来，就可以得到所求的逻辑图了。

而在从给定的逻辑图转换为对应的逻辑函数式时，只要从逻辑图的输入端到输出端逐级写出每个图形符号的输出逻辑式，就可以在输出端得到所求的逻辑函数式了。

【例 2.5.3】 已知逻辑函数为 $Y=(A+B'C)'+A'BC'+C$，画出其对应的逻辑图。

解： 将式中所有的**与**、**或**、**非**运算符号用图形符号代替，并依据运算优先顺序将这些图形符号连接起来，就得到了图 2.5.4 所示的逻辑图。

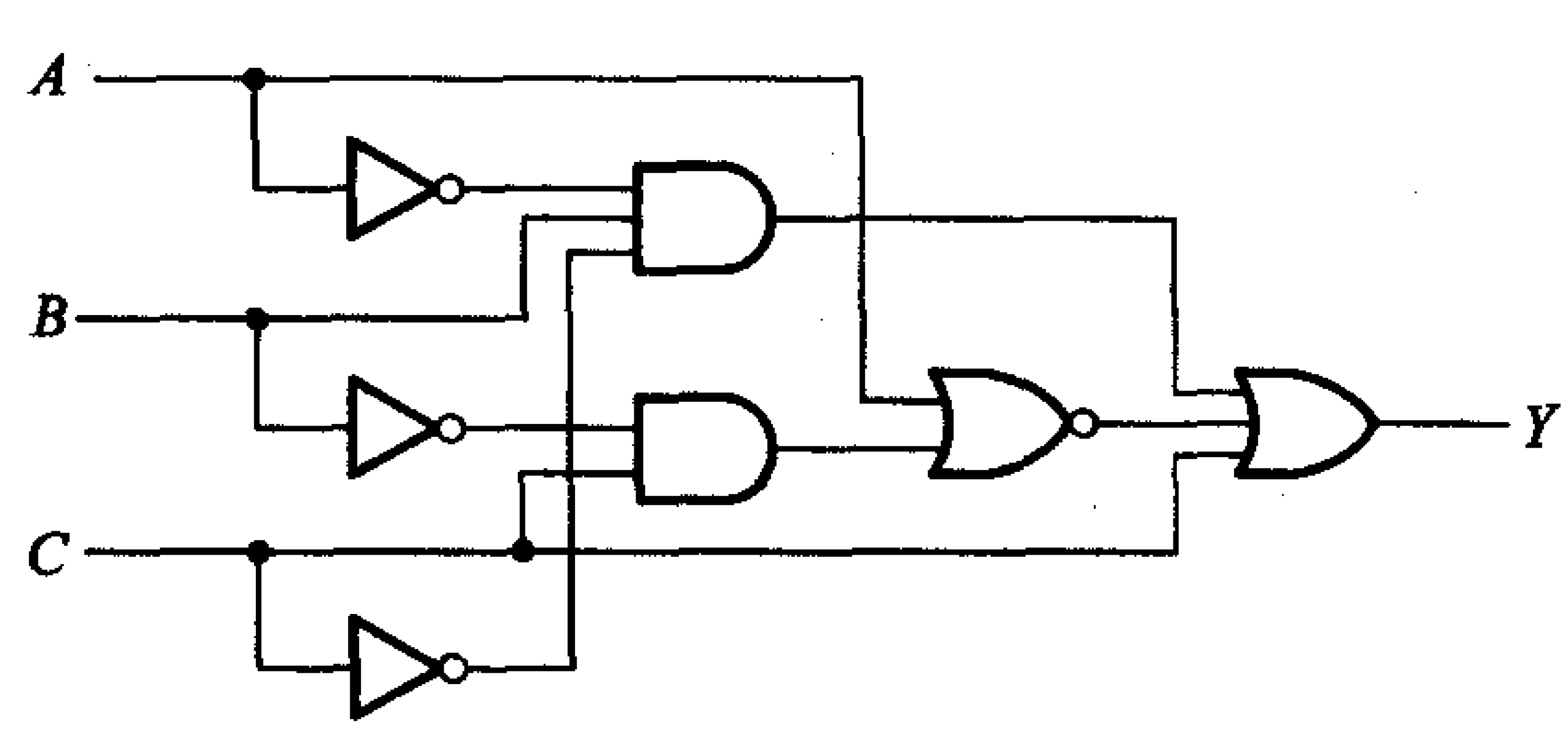

图 2.5.4 例 2.5.3 的逻辑图

【例 2.5.4】 已知函数的逻辑图如图 2.5.5 所示，试求它的逻辑函数式。

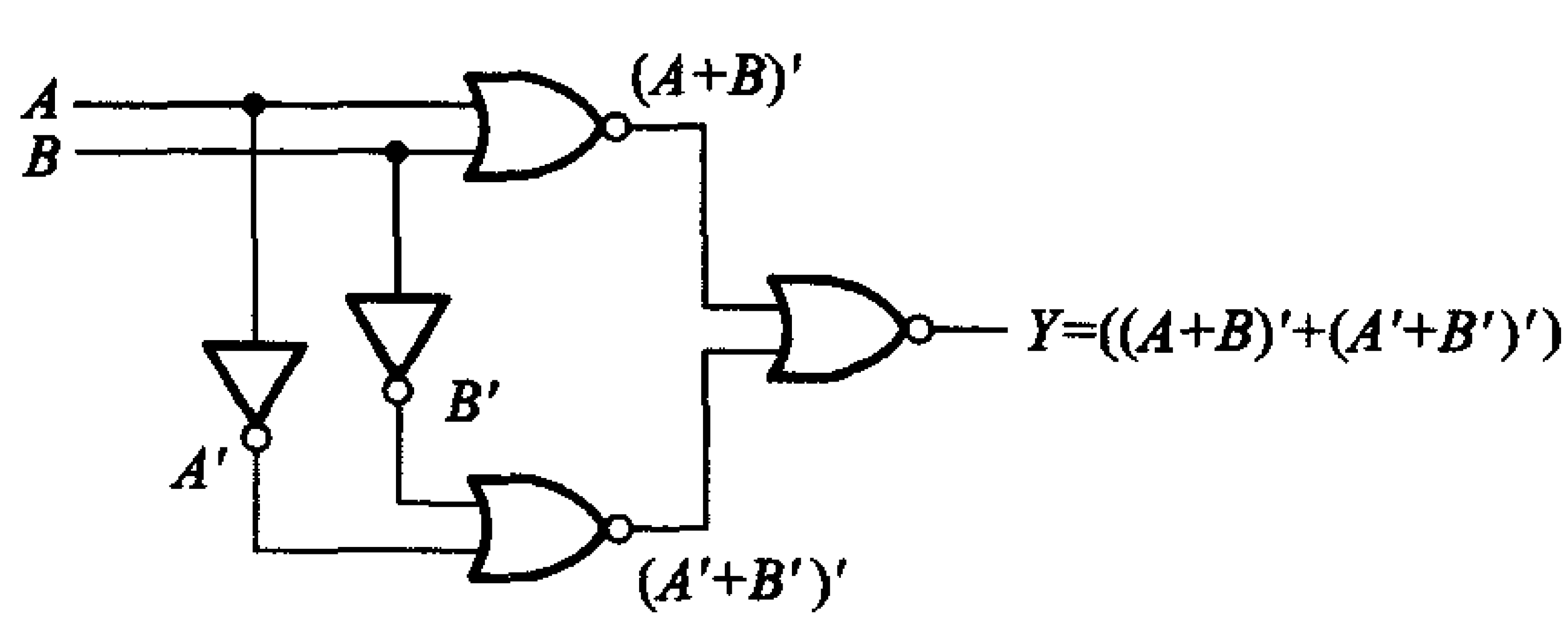

图 2.5.5 例 2.5.4 的逻辑图