

将式 (3.6.56) 代入自相关函数匹配公式 (3.6.49a), 立即有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(\sum_{k=-M}^M c_k e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega m} d\omega = \hat{R}_x(m), \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M \quad (3.6.57)$$

这是一非线性方程组。利用 Newton-Raphson 方法, 即可根据给定的 $2M+1$ 个样本自相关函数从非线性方程组 (3.6.57) 中求出复倒谱系数 c_k 。MEM2 的最大缺陷就在于它的非线性计算。

Nadeu 等人^[136]利用仿真实验观察到, 对极点不靠近单位圆的 ARMA 模型, MEM2 的谱估计性能优于 MEM1, 但当极点靠近单位圆时, MEM1 比 MEM2 优越。文献 [226] 对这一观察结果从理论上进行了解释。

总结本节内容, 我们看到, 对功率谱熵采用不同的定义, 得到的是两种不同的最大熵功率谱估计方法; 而在采用谱熵定义的情况下, 使用不同的约束条件, 得到的是与 AR 谱估计和 ARMA 谱估计分别等价的两种不同谱估计子。

3.7 Pisarenko 谐波分解法

谐波过程在很多信号处理应用中会经常遇到, 并需要确定这些谐波的频率和功率 (合称谐波恢复)。谐波恢复的关键任务是谐波个数及频率的估计。本节介绍谐波频率估计的 Pisarenko 谐波分解法, 它奠定了谐波恢复的理论基础。

3.7.1 Pisarenko 谐波分解

在 Pisarenko 谐波分解法中, 考虑的是由 p 个实正弦波组成的过程:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p A_i \sin(2\pi f_i n + \theta_i) \quad (3.7.1)$$

当相位 θ_i 为常数时, 上述谐波过程是一确定性过程, 它是非平稳的。为了保证谐波过程的平稳性, 通常假定相位 θ_i 是在 $[-\pi, \pi]$ 内均匀分布的随机数。此时, 谐波过程是一随机过程。

谐波过程可以用差分方程描述。考虑单个正弦波的情况, 为简单计, 令 $x(n) = \sin(2\pi f n + \theta)$ 。由三角函数恒等式

$$\sin(2\pi f n + \theta) + \sin[2\pi f(n-2) + \theta] = 2 \cos(2\pi f) \sin[2\pi f(n-1) + \theta]$$

若将 $x(n) = \sin(2\pi fn + \theta)$ 代入上式, 便得到二阶差分方程

$$x(n) - 2\cos(2\pi f)x(n-1) + x(n-2) = 0$$

对上式作 Z 变换, 得

$$[1 - 2\cos(2\pi f)z^{-1} + z^{-2}]X(z) = 0$$

于是, 得到特征多项式

$$1 - 2\cos(2\pi f)z^{-1} + z^{-2} = 0$$

它有一对共轭复数根, 即

$$z = \cos(2\pi f) \pm j\sin(2\pi f) = e^{\pm j2\pi f}$$

注意, 共轭根的模为 1, 即 $|z_1| = |z_2| = 1$, 由它们可决定正弦波的频率, 即有

$$f_i = \arctan[\operatorname{Im}(z_i)/\operatorname{Re}(z_i)]/2\pi \quad (3.7.2)$$

通常, 只取正的频率。显然, 如果 p 个实的正弦波信号没有重复频率的话, 则这 p 个频率应该由特征多项式

$$\prod_{i=1}^p (z - z_i)(z - z_i^*) = \sum_{i=0}^{2p} a_i z^{2p-i} = 0$$

或

$$1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{2p-1} z^{-(2p-1)} + z^{-2p} = 0 \quad (3.7.3)$$

的根决定。易知, 这些根的模全部等于 1。由于所有根都是以共轭对的形式出现, 所以特征多项式 (3.7.3) 的系数存在对称性

$$a_i = a_{2p-i}, \quad i = 0, 1, \cdots, p \quad (3.7.4)$$

与式 (3.7.3) 对应的差分方程为

$$x(n) + \sum_{i=1}^{2p} a_i x(n-i) = 0 \quad (3.7.5)$$

它是一种无激励的 AR 过程, 与 3.3 节介绍的可预测过程的差分方程具有完全相同的形式。

正弦波过程一般是在加性白噪声中被观测的, 设加性白噪声为 $w(n)$, 即观测过程

$$y(n) = x(n) + w(n) = \sum_{i=1}^p A_i \sin(2\pi f_i n + \theta_i) + w(n) \quad (3.7.6)$$

式中 $w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ 为高斯白噪声, 它与正弦波信号 $x(n)$ 统计独立。将 $x(n) = y(n) - w(n)$ 代入式 (3.7.5), 立即得到白噪声中的正弦波过程所满足的差分方程

$$y(n) + \sum_{i=1}^{2p} a_i y(n-i) = w(n) + \sum_{i=1}^{2p} a_i w(n-i) \quad (3.7.7)$$

这是一个特殊的 ARMA 过程, 不仅 AR 阶数与 MA 阶数相等, 而且 AR 参数也与 MA 参数完全相同。

现在推导这一特殊 ARMA 过程的 AR 参数满足的法方程。为此, 定义向量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= [y(n), y(n-1), \dots, y(n-2p)]^T \\ \mathbf{a} &= [1, a_1, \dots, a_{2p}]^T \\ \mathbf{w} &= [w(n), w(n-1), \dots, w(n-2p)]^T \end{aligned} \right\} \quad (3.7.8)$$

于是, 式 (3.7.7) 可写成

$$\mathbf{y}^T \mathbf{a} = \mathbf{w}^T \mathbf{a} \quad (3.7.9)$$

用向量 $\mathbf{y}$ 左乘式 (3.7.9), 并取数学期望, 即得

$$\mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} \mathbf{a} = \mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{w}^T\} \mathbf{a} \quad (3.7.10)$$

令 $R_y(k) = \mathbb{E}\{y(n+k)y(n)\}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\} &= \begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(-1) & \cdots & R_y(-2p) \\ R_y(1) & R_y(0) & \cdots & R_y(-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(2p) & R_y(2p-1) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_y \\ \mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{w}^T\} &= \mathbb{E}\{(x + \mathbf{w})\mathbf{w}^T\} = \mathbb{E}\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} \\ &= \sigma_w^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

其中使用了 $x(n)$ 与 $w(n)$ 统计独立的假设。将以上两个关系式代入式 (3.7.10), 便得到一个重要的法方程

$$\mathbf{R}_y \mathbf{a} = \sigma_w^2 \mathbf{a} \quad (3.7.11)$$

这表明, σ_w^2 是观测过程 $\{y(n)\}$ 的自相关矩阵 R_y 的特征值, 而特征多项式的系数向量 α 是对应于该特征值的特征向量。这就是 Pisarenko 谐波分解方法的理论基础, 它启迪我们, 谐波恢复问题可以转化为自相关矩阵 R_y 的特征值分解来求解。

在运行 Pisarenko 分解法的时候, 通常从一个 $m \times m$ (其中 $m > 2p$) 维自相关矩阵 R 开始, 如果自相关矩阵的最小特征值具有多重度, 则系数向量 α 将有多解。解决的方法是对自相关矩阵进行降维, 直至它恰好只有一个最小特征值。问题是, 这时的自相关矩阵的维数小, 所使用的样本自相关函数少, 会严重影响系数向量的估计精度。虽然 Pisarenko 谐波分解在理论上首次建立了特征多项式的系数向量与自相关矩阵特征向量之间的关系, 但从实际效果看, 它并不是一种有效的谐波恢复算法。相比之下, 下面介绍的 ARMA 建模法却是一种非常有效的谐波恢复算法。

3.7.2 谐波恢复的 ARMA 建模法

如前所述, 当谐波信号在加性白噪声中被观测时, 观测过程是一个特殊的 ARMA 随机过程, 它的 AR 参数与 MA 参数完全相同。由于 $A(z)$ 和 $B(z) = A(z)$ 存在着共同的因子, 所以修正 Yule-Walker 方程不能直接搬用。现在, 我们从另外一个角度出发, 建立这一特殊 ARMA 过程的法方程。

在无激励的 AR 模型差分方程式 (3.7.5) 的两边同乘 $x(n-k)$, 并取数学期望, 则有

$$R_x(k) + \sum_{i=1}^{2p} a_i R_x(k-i) = 0, \quad \forall k \quad (3.7.12)$$

由于谐波过程 $x(n)$ 与加性白噪声 $w(n)$ 统计独立, 所以 $R_y(k) = R_x(k) + R_w(k) = R_x(k) + \sigma_w^2 \delta(k)$ 。将这一关系式代入式 (3.7.12), 即可得到

$$R_y(k) + \sum_{i=1}^{2p} a_i R_y(k-i) = \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{2p} a_i \delta(k-i)$$

显然, 当 $k > 2p$ 时上该式右边求和项中的冲激函数 $\delta(\cdot)$ 恒等于零, 故上式可简化为

$$R_y(k) + \sum_{i=1}^{2p} a_i R_y(k-i) = 0, \quad k > 2p \quad (3.7.13)$$

这就是特殊 ARMA 过程 (3.7.7) 所服从的法方程, 它与 ARMA(2p, 2p) 过程的修正 Yule-Walker 方程在形式上是一致的。

与修正 Yule-Walker 方程类似, 法方程 (3.7.13) 也可构造成超定的方程组, 并可使用 SVD-TLS 算法求解。

算法 3.7.1 (谐波恢复的 ARMA 建模算法)

步骤 1 利用观测数据的样本自相关函数 $\hat{R}_y(k)$ 构造法方程 (3.7.13) 的扩展阶自相关矩阵

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \hat{R}_y(p_c + 1) & \hat{R}_y(p_c - 1) & \cdots & \hat{R}_y(1) \\ \hat{R}_y(p_c + 2) & \hat{R}_y(p_c) & \cdots & \hat{R}_y(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_y(p_c + M) & \hat{R}_y(p_c + M - 1) & \cdots & \hat{R}_y(M) \end{bmatrix} \quad (3.7.14)$$

式中 $p_c > 2p$, 并且 $M \gg p$;

步骤 2 将矩阵 $\mathbf{R}_e$ 当作增广矩阵 $\mathbf{B}$, 并利用算法 3.4.1 (SVD-TLS) 确定 AR 阶数 $2p$ 和系数向量 $\mathbf{a}$ 的总体最小二乘估计;

步骤 3 计算特征多项式

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{2p} a_i z^{-i} \quad (3.7.15)$$

的共轭根对 (z_i, z_i^*) , 其中 $i = 1, \dots, p$;

步骤 4 利用公式 (3.7.2) 计算各个谐波的频率。

上述算法由于使用了奇异值分解和总体最小二乘方法, 整个计算具有非常好的数值稳定性, 而且 AR 阶数和参数的估计也都具有非常高的精确度, 确实是谐波恢复的一种有效算法。大量的仿真实验结果也证实了这一点, 例如可参考文献 [31], [212], [213] 等。

最后指出, 当谐波信号为复谐波时, 以上结果仍然适用, 不同的只是差分方程的阶数不再是 $2p$ 而是 p , 特征多项式的根也不再是共轭根对。

3.8 扩展 Prony 方法

早在 1795 年, Prony 就提出了使用指数函数的线性组合来描述等间距采样数据的数学模型。因此, 传统的 Prony 方法并不是一般意义下的功率谱估计技术。

经过适当的扩展后, Prony 方法可用来估计有理式功率谱密度。本节介绍这种扩展 Prony 方法 [101]。

扩展 Prony 方法采用的数学模型为一组 p 个具有任意幅值、相位、频率与衰减因子的指数函数, 其离散时间的函数形式为

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p b_i z_i^n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8.1)$$

并使用 $\hat{x}(n)$ 作为 $x(n)$ 的近似。式 (3.8.1) 中, b_i 和 z_i 假定为复数, 即

$$b_i = A_i \exp(j\theta_i) \quad (3.8.2a)$$

$$z_i = \exp[(\alpha_i + j2\pi f_i)\Delta t] \quad (3.8.2b)$$

式中, A_i 为幅值; θ_i 为相位 (单位: 弧度); α_i 为衰减因子; f_i 表示振荡频率; Δt 代表采样间隔。为方便计, 此后令 $\Delta t = 1$ 。

构造代价函数

$$\epsilon = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - \hat{x}(n)|^2 \quad (3.8.3)$$

若使误差平方和 ϵ 为最小, 则可求出参数四元组 $(A_i, \theta_i, \alpha_i, f_i)$ 。但是, 这要求解非线性方程组。通常, 这种非线性求解是一种迭代过程, 例如参见文献 [130]。这里, 仅讨论参数四元组的线性估计问题。

Prony 方法的关键是认识到式 (3.8.1) 的拟合是一常系数线性差分方程的齐次解。为了推导该线性差分方程, 定义特征多项式

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^p (z - z_i) = \sum_{i=0}^p a_i z^{p-i} \quad (3.8.4)$$

式中 $a_0 = 1$ 。由式 (3.8.1) 知

$$\hat{x}(n-k) = \sum_{i=1}^p b_i z_i^{n-k}, \quad 0 \leq n-k \leq N-1$$

两边同乘 a_k , 并求和, 则

$$\sum_{k=0}^p a_k \hat{x}(n-k) = \sum_{i=1}^p b_i \sum_{k=0}^p a_k z_i^{n-k}, \quad p \leq n \leq N-1$$

在上式中代入 $z_i^{n-k} = z_i^{n-p} z_i^{p-k}$, 即有

$$\sum_{k=0}^p a_k \hat{x}(n-k) = \sum_{i=1}^p b_i z_i^{n-p} \sum_{k=0}^p a_k z_i^{p-k} = 0 \quad (3.8.5)$$

式 (3.8.5) 等于零是因为第二个求和项恰好是式 (3.8.4) 位于根 z_i 处的特征多项式 $\psi(z_i) = 0$ 。

式 (3.8.5) 意味着, $\hat{x}(n)$ 满足递推的差分方程式

$$\hat{x}(n) = - \sum_{i=1}^p a_i \hat{x}(n-i), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8.6)$$

为了建立 Prony 方法, 定义实际测量数据 $x(n)$ 与其近似值 $\hat{x}(n)$ 之间的误差为 $e(n)$, 即

$$x(n) = \hat{x}(n) + e(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8.7)$$

将式 (3.8.6) 代入式 (3.8.7) 得到

$$\begin{aligned} x(n) &= -\sum_{i=1}^p a_i \hat{x}(n-i) + e(n) \\ &= -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \sum_{i=0}^p a_i e(n-i), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

差分方程式 (3.8.8) 表明, 白噪声中的指数过程是一个特殊的 ARMA(p, p) 过程, 它具有相同的 AR 和 MA 参数, 且激励噪声就是原加性白噪声 $e(n)$ 。这与 Pisarenko 谐波分解方法中的复 ARMA(p, p) 过程非常相似, 不同之处在于: 扩展 Prony 方法中的特征多项式 $\psi(z)$ 的根不受单位模根 (即无衰减谐波) 的约束。

现在, 参数 $a_1, \dots, a_p$ 的最小二乘估计的准则是使误差平方和 $\sum_{n=p}^{N-1} |e(n)|^2$ 为最小。但是, 这将导致一组非线性方程。估计 $a_1, \dots, a_p$ 的线性方法是定义

$$\epsilon(n) = \sum_{i=0}^p a_i e(n-i), \quad n = p, \dots, N-1 \quad (3.8.9)$$

并将式 (3.8.8) 变成

$$x(n) = -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \epsilon(n) \quad (3.8.10)$$

如果使 $\sum_{n=p}^{N-1} |\epsilon(n)|^2$ 最小化, 而不是让 $\sum_{n=p}^{N-1} |e(n)|^2$ 最小化, 则可得到一组线性的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} x(p) & x(p-1) & \cdots & x(0) \\ x(p+1) & x(p) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(N-p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon(0) \\ \epsilon(1) \\ \vdots \\ \epsilon(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.8.11a)$$

或简写作

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.8.11b)$$

求解方程式 (3.8.11) 的线性最小二乘方法称为扩展 Prony 方法。

为了使代价函数

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{n=p}^{N-1} |\epsilon(n)|^2 = \sum_{n=p}^{N-1} \left| \sum_{j=0}^p a_j x(n-j) \right|^2 \quad (3.8.12)$$

最小化, 令 $\frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial a_i} = 0, i = 1, \dots, p$, 则有

$$\sum_{j=0}^p a_j \left[\sum_{n=p}^{N-1} x(n-j)x^*(n-i) \right] = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.8.13)$$

对应的最小误差能量为

$$\epsilon_p = \sum_{j=0}^p a_j \left[\sum_{n=p}^{N-1} x(n-j)x^*(n) \right] \quad (3.8.14)$$

定义

$$r(i, j) = \sum_{n=p}^{N-1} x(n-j)x^*(n-i), \quad i, j = 0, 1, \dots, p \quad (3.8.15)$$

则式 (3.8.13) 与式 (3.8.14) 可合并写作 Prony 方法的法方程形式:

$$\begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & \cdots & r(0,p) \\ r(1,0) & r(1,1) & \cdots & r(1,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p,0) & r(p,1) & \cdots & r(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8.16)$$

求解此法方程, 即可得到系数 $a_1, \dots, a_p$ 和最小误差能量 ϵ_p 的估计值。

一旦 $a_1, \dots, a_p$ 得到后, 即可求出特征多项式

$$1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p} = 0 \quad (3.8.17)$$

的根 $z_i, i = 1, \dots, p$, 有时称 z_i 为 Prony 极点。于是, 指数模型式 (3.8.1) 简化为未知参数 b_k 的线性方程。用矩阵形式表示之, 即为

$$\mathbf{Z}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} \quad (3.8.18)$$

式中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.8.19a)$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_p]^T \quad (3.8.19b)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}(0), \hat{x}(1), \cdots, \hat{x}(N-1)]^T \quad (3.8.19c)$$

这里, $\mathbf{Z}$ 是一个 $N \times p$ 维 Vandermonde 矩阵。由于 z_i 各不相同, 故 Vandermonde 矩阵 $\mathbf{Z}$ 的各列线性独立, 即它是满列秩的。于是, 式 (3.8.18) 的最小二乘解为

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \hat{\mathbf{x}} \quad (3.8.20)$$

容易证明

$$\mathbf{Z}^H \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.8.21)$$

式中

$$\gamma_{ij} = \frac{(z_i^* z_j)^N - 1}{(z_i^* z_j) - 1} \quad (3.8.22)$$

总结以上讨论, 扩展 Prony 方法可以叙述如下。

算法 3.8.1 (谐波恢复的扩展 Prony 算法)

步骤 1 利用式 (3.8.15) 计算样本函数 $r(i, j)$, 并构造扩展阶的矩阵

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} r(1, 0) & r(1, 1) & \cdots & r(1, p_e) \\ r(2, 0) & r(2, 1) & \cdots & r(2, p_e) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p_e, 0) & r(p_e, 1) & \cdots & r(p_e, p_e) \end{bmatrix}, \quad p_e \gg p \quad (3.8.23)$$

步骤 2 用算法 3.4.1 (SVD-TLS 算法) 确定矩阵 $\mathbf{R}_e$ 的有效秩 p 以及系数 $a_1, \cdots, a_p$ 的总体最小二乘估计。

步骤 3 求特征多项式 (3.8.17) 的根 $z_1, \cdots, z_p$, 并利用公式 (3.8.6) 计算出 $\hat{x}(n)$, $n = 1, \cdots, N-1$, 其中 $\hat{x}(0) = x(0)$ 。

步骤 4 利用式 (3.8.20) ~ 式 (3.8.22) 计算参数 $b_1, \cdots, b_p$ 。

步骤5 用下式计算幅值 A_i 、相位 θ_i 、频率 f_i 和衰减因子 α_i :

$$\left. \begin{aligned} A_i &= |b_i| \\ \theta_i &= \arctan[\operatorname{Im}(b_i)/\operatorname{Re}(b_i)]/(2\pi\Delta t) \\ \alpha_i &= \ln|z_i|/\Delta t \\ f_i &= \arctan[\operatorname{Im}(z_i)/\operatorname{Re}(z_i)]/(2\pi\Delta t) \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.8.24)$$

稍加推广, 扩展 Prony 方法又可用作功率谱估计。由步骤3 计算得到的 $\hat{x}(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 可以得到频谱

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= \mathcal{F}[\hat{x}(n)] \\ &= \sum_{i=1}^p A_i \exp(j\theta_i) \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + [2\pi(f - f_i)]^2} \end{aligned} \quad (3.8.25)$$

式中 $\mathcal{F}[\hat{x}(n)]$ 表示 $\hat{x}(n)$ 的 Fourier 变换。于是, Prony 功率谱可计算为

$$P_{\text{Prony}}(f) = |\hat{X}(f)|^2 \quad (3.8.26)$$

需要注意的是, 在某些情况下, 加性噪声会严重影响 Prony 极点 z_i 的估计的精度, 噪声还会使衰减因子的计算具有比较大的误差。

在下面几个方面, Prony 谐波分解法比 Pisarenko 谐波分解法优越:

- (1) Prony 方法无须估计样本自相关函数;
- (2) Prony 方法给出的频率与功率 (或幅值) 的估计方差比较小;
- (3) Prony 方法只需求解两组齐次线性方程和一次因式分解, 而 Pisarenko 方法却需求解特征方程。

若 p 个正弦波信号是实的、无衰减的, 并且在噪声中被观测, 则 Prony 方法存在一种特殊的变型^[88, Ch.9]。此时, 信号模型式 (3.8.1) 变为

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p (b_i z_i^n + b_i^* z_i^{*n}) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi f_i n + \theta_i) \quad (3.8.27)$$

式中 $b_i = 0.5A_i e^{j\theta_i}$; $z_i = e^{j2\pi f_i}$ 。相对应的特征多项式变为

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^p (z - z_i)(z - z_i)^* = \sum_{i=0}^{2p} a_i z^{2p-i} = 0 \quad (3.8.28)$$

式中 $a_0 = 1$, 且 a_i 为实系数。由于 z_i 是单位模根, 故以共轭对形式出现。因此, 式