

(3.8.28) 中的 z_i 用 z_i^{-1} 代替后仍然成立, 即

$$z^{2p}v(z^{-1}) = z^{2p} \sum_{i=0}^{2p} a_i z^{i-2p} = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^k = 0 \quad (3.8.29)$$

比较式 (3.8.28) 与式 (3.8.29), 可以得出结论: $a_i = a_{2p-i}, i = 0, 1, \dots, p$, 且 $a_0 = a_{2p} = 1$.

在这种情况下, 式 (3.8.10) 的对应形式为

$$\epsilon(n) = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i [x(n+i) + x(n-i)] \quad (3.8.30)$$

式中 $\bar{a}_i = a_i, i = 0, 1, \dots, p-1$, 但 $\bar{a}_p = \frac{1}{2}a_p$. 系数 $\bar{a}_p$ 减半是因为在式 (3.8.30) 中, 系数 $\bar{a}_p$ 计算了两次. 令

$$\sum_{n=p}^{N-1} |\epsilon(n)|^2 = \sum_{n=p}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^p [x(n+i) + x(n-i)] \right|^2 \quad (3.8.31)$$

使上式的误差平方和最小化, 便得到类似于式 (3.8.16) 的法方程

$$\sum_{i=0}^p \bar{a}_i r(i, j) = 0 \quad (3.8.32)$$

但函数 $r(i, j)$ 取与式 (3.8.15) 不同的形式, 即

$$r(i, j) = \sum_{n=p}^{N-1} [x(n+j) + x(n-j)][x^*(n+i) + x^*(n-i)] \quad (3.8.33)$$

上述估计系数 $\bar{a}_i$ 的方法称为 Prony 谱线估计.

算法 3.8.2 (Prony 谱线估计算法)

步骤 1 利用式 (3.8.33) 计算函数 $r(i, j), i, j = 0, 1, \dots, p_e$, 其中 $p_e \gg p$; 并用式 (3.8.23) 构造矩阵 $\mathbf{R}_e$.

步骤 2 利用算法 3.4.1 (SVD-TLS 算法) 确定 $\mathbf{R}_e$ 的有效秩 p 和系数 $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p$. 令 $a_{2p-i} = \bar{a}_i, i = 1, \dots, p-1$ 和 $a_p = 2\bar{a}_p$.

步骤 3 求特征多项式 $1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{2p} z^{-2p} = 0$ 的共轭根对 $(z_i, z_i^*), i = 1, \dots, p$.

步骤 4 计算 p 个谐波的频率

$$f_i = \arctan[\operatorname{Im}(z_i)/\operatorname{Re}(z_i)]/(2\pi\Delta t)$$

3.9 多重信号分类 (MUSIC)

当空间存在多个信号源时,常常需要对这些空间信号进行分离,以便跟踪或检测我们感兴趣的信号,抑制那些被认为是干扰的信号。为此,需要使用天线阵列对多个空间信号进行接收。对天线阵列接收的空间信号所进行的分析与处理统称为阵列信号处理。

功率谱密度描述信号功率随频率的分布,是信号的一种频域表示。由于阵列信号处理的主要任务是信号空间参数如波达方向(角)等的估计,所以将功率谱密度的概念在空域加以延伸及推广,就显得十分重要。这种广义的功率谱常简称为空间谱。空间谱描述信号的空间参数的分布。

近 20 年来,阵列信号处理已成为信号处理的一个重要分支,在通信、雷达、声纳、地震勘探、射电天文等领域获得了广泛应用与迅速发展。阵列信号处理的主要问题包括^{[85], [104]}: 波束形成技术——使阵列方向图的主瓣指向所需的方向; 零点形成技术——使天线的零点对准所有的干扰方向; 空间谱估计——对空间信号的波达方向的分布进行超分辨估计。

3.9.1 波束形成器

考查在空间传播的多个信号源,它们均为窄带信号。现在利用一天线阵列对这些信号进行接收。每根天线称为一个阵元,它们都是全向天线,即无任何方向性。通常,阵元常沿直线或圆周排列。为方便计,这里假定各个阵元等间距地直线排列。这种阵列简称等距线阵,如图 3.9.1 所示。

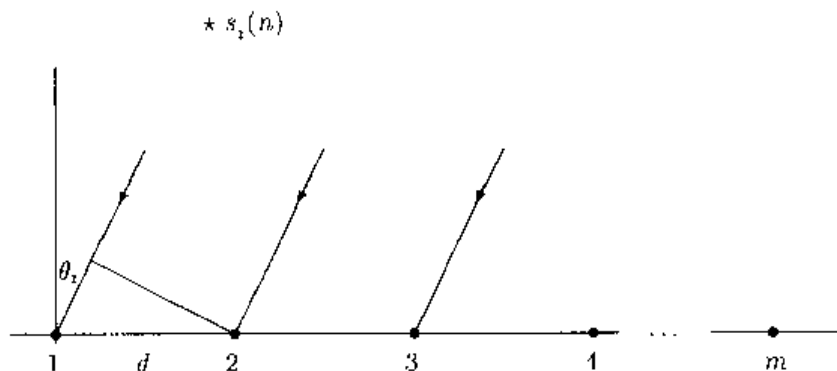


图 3.9.1 等距线阵与远场信号 $s_i(n)$

由于窄带信号的包络变化缓慢, 因此等距线阵各阵元接收到的同一信号的包络相同。令空间信号 $s_i(n)$ 与阵元的距离足够远, 以致于其电波到达各阵元的波前为平面波, 这样的信号称为远场信号。远场信号 $s_i(n)$ 到达各阵元的方向角相同, 用 θ_i 表示, 称为波达方向 (角), 定义为信号 $s_i(n)$ 到达阵元的直射线与阵列法线方向之间的夹角。以阵元 1 作为基准点 (简称参考阵元), 即空间信号 $s_i(n)$ 在参考阵元上的接收信号等于 $s_i(n)$, 这一信号到达其他阵元的时间相对于参考阵元存在延迟 (或超前), 令信号 $s_i(n)$ 电波传播延迟在第 2 个阵元引起的相位差为 ω_i , 则由图 3.9.1 易知, 波达方向 θ_i 与相位差 ω_i 之间存在关系

$$\omega_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i \quad (3.9.1)$$

式中 d 是两个相邻阵元之间的距离, λ 为信号波长。阵元距离 d 应满足“半波长”条件 $d \leq \lambda/2$, 否则相位差 ω_i 有可能大于 π , 而产生所谓的方向模糊, 即 θ_i 和 $\pi + \theta_i$ 都可以是信号 $s_i(t)$ 的波达方向。很显然, 由于是等距线阵, 所以信号 $s_i(n)$ 到达第 k 个阵元的电波与到达参考阵元的电波之间的相位差为 $(k-1)\omega_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} (k-1) \sin \theta_i$ 。因此, 信号 $s_i(n)$ 在第 k 个阵元上的接收信号为 $s_i(n)e^{-j(k-1)\omega_i}$ 。

若阵列由 m 个阵元组成, 则信号 $s_i(t)$ 到达各阵元的相位差所组成的向量

$$\mathbf{a}(\theta_i) \triangleq [1, e^{-j\omega_i}, \dots, e^{-j(m-1)\omega_i}]^T \quad (3.9.2a)$$

$$= [a_1(\theta_i), \dots, a_m(\theta_i)]^T \quad (3.9.2b)$$

称为信号 $s_i(n)$ 的方向向量或响应向量。如果总共有 p 个信号位于远场 (其中 $p \leq m$), 则在第 k 个阵元上的观测或接收信号 $x_k(n)$ 为

$$x_k(n) = \sum_{i=1}^p a_k(\omega_i) s_i(n) + e_k(n), \quad k = 1, \dots, m \quad (3.9.3)$$

式中 $e_k(n)$ 表示第 k 个阵元上的加性观测噪声。将 m 个阵元上的观测数据组成 $m \times 1$ 维观测数据向量

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n), \dots, x_m(n)]^T \quad (3.9.4a)$$

类似地, 可以定义 $m \times 1$ 维观测噪声向量

$$\mathbf{e}(n) = [e_1(n), \dots, e_m(n)]^T \quad (3.9.4b)$$

这样一来, 式 (3.9.3) 就可以用向量形式写作

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{i=1}^p \mathbf{a}(\omega_i) s_i(n) + \mathbf{e}(n) = \mathbf{A}(\omega) \mathbf{s}(n) + \mathbf{e}(n) \quad (3.9.5)$$

式中

$$\begin{aligned} A(\omega) &= [a(\omega_1), \dots, a(\omega_p)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\omega_1} & e^{-j\omega_2} & \dots & e^{-j\omega_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(m-1)\omega_1} & e^{-j(m-1)\omega_2} & \dots & e^{-j(m-1)\omega_p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

$$s(n) = [s_1(n), \dots, s_p(n)]^T \quad (3.9.7)$$

分别为 $m \times p$ 维方向矩阵 (或称传输矩阵、阵列响应矩阵) 和 $p \times 1$ 维信号向量。具有式 (3.9.6) 所示结构的矩阵称为 Vandermonde 矩阵。Vandermonde 矩阵的特点是: 若 $\omega_1, \dots, \omega_p$ 互不相同, 则它的列相互独立, 即 Vandermonde 矩阵是满列秩的。

在阵列信号处理中, 一次采样称为一次快拍。假定在每个阵元上共观测到 N 次快拍的接收信号 $x_k(1), \dots, x_k(N)$, 其中 $k = 1, \dots, m$ 。波束形成问题的提法是: 仅利用这些观测值, 求出某个期望信号 $s_d(n)$ 的波达方向 θ_d 。

为了求解上述波束形成问题, 我们假定信号 $s_i(n)$ 与各阵元上的观测噪声 $e_k(n)$ 统计独立, 并且各观测噪声具有相同的方差 σ^2 。在这一假设条件下, 考虑第 k 个信号的接收。此时, 其他信号为干扰信号, 应予以抑制。为此, 设计一权向量 $w = [w_1, \dots, w_m]^T$, 并对阵元接收信号 $x_1(n), \dots, x_m(n)$ 进行加权求和, 得到输出信号 $z(n) = \sum_{i=1}^m w_i^* x_i(n) = w^H x(n)$ 。

考虑使 N 次快拍的输出能量的平均值为最小, 即

$$\min_w \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |z(n)|^2 = \min_w \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |w^H x(n)|^2 \quad (3.9.8)$$

设计权向量 w 的这一准则称为最小输出能量 (minimum output energy, MOE) 准则, 它在通信信号处理、雷达信号处理等中具有重要的应用。令

$$R_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x^H(n) \quad (3.9.9)$$

是观测信号向量 $x(n)$ 的样本自相关矩阵, 则式 (3.9.8) 所示的 MOE 准则可以写作

$$\begin{aligned} \min_w \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |z(n)|^2 &= \min_w w^H \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x^H(n) \right) w \\ &= \min_w w^H \hat{R}_{xx} w \end{aligned} \quad (3.9.10)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 上式变作

$$E\{|z(n)|^2\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |z(n)|^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \quad (3.9.11)$$

注意到阵列观测信号向量

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{a}(\omega_k) s_k(n) + \sum_{i=1, i \neq k}^p \mathbf{a}(\omega_i) s_i(n) + \mathbf{e}(n) \quad (3.9.12)$$

式中第一项是希望抽取的信号即期望信号, 第二项表示希望拒绝的其他信号 (统称干扰信号) 之和; 第三项为加性噪声项。将式 (3.9.12) 代入式 (3.9.11), 即有

$$E\{|z(n)|^2\} = E\{|s_k(n)|^2\} |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_k)|^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^p E\{|s_i(n)|^2\} |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_i)|^2 + \sigma^2 |\mathbf{w}|^2 \quad (3.9.13)$$

这里使用了加性噪声 $e_1(n), \dots, e_m(n)$ 具有相同方差的假设条件。

由式 (3.9.13) 容易看出, 若权向量 $\mathbf{w}$ 满足约束条件

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_k) = \mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{w} = 1 \quad (\text{波束形成条件}) \quad (3.9.14a)$$

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_i) = 0, \quad \omega_i \neq \omega_k \quad (\text{零点形成条件}) \quad (3.9.14b)$$

则权向量将起到只抽取期望信号, 而拒绝所有其他干扰信号之目的。此时, 式 (3.9.13) 简化为

$$E\{|z(n)|^2\} = E\{|s_k(n)|^2\} + \sigma^2 |\mathbf{w}|^2$$

值得指出的是, 只需要在波束形成条件的约束下, 使输出能量 $E\{|z(n)|^2\}$ 最小化, 波束形成器的输出信号的平均能量就仍然和上式相同, 即能够使零点形成条件自动成立。因此, 最佳波束形成器的设计变成了在约束条件 (3.9.14a) 下使输出能量 $E\{|z(n)|^2\}$ 最小化。

下面用 Lagrange 乘子法求解这一优化问题。为此, 根据式 (3.9.11) 和式 (3.9.14a) 构造目标函数

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \lambda [1 - \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega_k)] \quad (3.9.15)$$

由 $\partial J(\mathbf{w}) / \partial \mathbf{w}^H = 0$ 得 $\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{a}(\omega_k) = 0$, 从中得到使输出能量最小化的最佳波束形成器

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \lambda \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k) \quad (3.9.16)$$

将这一波束形成器代入约束条件 (3.9.14a), 可知

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)} \quad (3.9.17)$$

因为 Lagrange 乘子 λ 是个实数。

将式 (3.9.17) 代入式 (3.9.16) 立即知, 使输出能量最小化的最佳波束形成器为

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)}{\mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)} \quad (3.9.18)$$

这一波束形成器是 Capon 于 1969 年提出的^[34], 称为最小方差无畸变响应 (minimum variance distortionless response, MVDR) 波束形成器。它的基本原理是使来自非期望波达方向的任何干扰所贡献的功率最小, 但又能保持“在观测方向上的信号功率”不变。因此, 它可以看作是一个尖锐的空间带通滤波器。

式 (3.9.18) 表明, 第 k 个信号源的最佳波束形成器的设计决定于该信号波达方向 ω_k 的估计。为了确定 p 个信号的波达方向 $\omega_1, \dots, \omega_p$, Capon^[34] 定义“空间谱”

$$P_{\text{Capon}}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_k)} \quad (3.9.19)$$

并将峰值对应的 $\omega_1, \dots, \omega_p$ 定为 p 个信号的波达方向。由于在这种方法中所使用的最佳滤波器类似于高斯随机噪声中估计已知频率正弦波幅值的最大似然估计的形式, 所以式 (3.9.19) 常被误称为“最大似然谱估计”。现在, 在不少文献中, 仍然沿用这一流行的称呼。

3.9.2 信号子空间与噪声子空间

考虑由式 (3.9.5) 描述的阵列信号观测模型。对此模型, 我们作以下假设:

假设 1: 对于不同的 ω_i 值, 向量 $\mathbf{a}(\omega_i)$ 相互线性独立;

假设 2: 加性噪声向量 $\mathbf{e}(t)$ 的每个元素都是零均值的复白噪声, 它们不相关, 并且具有相同的方差 σ^2 ;

假设 3: 矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{E}\{\mathbf{s}(n)\mathbf{s}^H(n)\}$ 非奇异, 即 $\text{rank}(\mathbf{P}) = p$ 。

对于等距线阵, 假设 1 自动满足。假设 2 意味着加性白噪声向量 $\mathbf{e}(n)$ 满足以下条件 (参见习题 3.17):

$$\mathbf{E}\{\mathbf{e}(n)\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^H(n)\} = \sigma^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^H(n')\} = \mathbf{O} \quad (3.9.20)$$

式中 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{O}$ 分别表示零向量和零矩阵。如果信号源相互独立, 则假设 3 满足。因此, 上述三个假设条件只是一般的假设, 在实际中容易得到满足。

在假设 1 ~ 3 的条件下, 由式 (3.9.5) 容易得到

$$\begin{aligned} R_{xx} &\stackrel{\text{def}}{=} E\{x(n)x^H(n)\} \\ &= A(\omega)E\{s(n)s^H(n)\}A^H(\omega) + \sigma^2 I \\ &= APA^H + \sigma^2 I \end{aligned} \quad (3.9.21)$$

式中 $A = A(\omega)$ 。可见, R_{xx} 是一个对称矩阵, 令其特征值分解为

$$R_{xx} = U \Sigma U^H \quad (3.9.22)$$

式中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)$ 。

由于 A 满列秩, 故 $\text{rank}(APA^H) = \text{rank}(P) = p$, 这里假定 $p < m$ 。于是, 我们有

$$U^H APA^H U = \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2, 0, \dots, 0) \quad (3.9.23)$$

式中 $\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2$ 是无加性噪声时的观测信号 $Ax(n)$ 的自相关矩阵 APA^H 的特征值。

同时用 U^H 左乘和 U 右乘式 (3.9.21), 则得

$$\begin{aligned} U^H R_{xx} U &= U^H APA^H U + \sigma^2 U^H U \\ &= \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2, 0, \dots, 0) + \sigma^2 I \end{aligned}$$

这表明, 自相关矩阵 R_{xx} 的特征值为

$$\lambda_i = \sigma_i^2 = \begin{cases} \alpha_i^2 + \sigma^2, & i = 1, \dots, p \\ \sigma^2, & i = p + 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.9.24)$$

即是说, 当存在加性观测白噪声时, 观测数据向量 $x(n)$ 的自相关矩阵的特征值由两部分组成: 前 p 个特征值等于 α_i^2 与加性白噪声方差 σ^2 之和, 后面 $m - p$ 个特征值全部等于加性白噪声的方差。

显然, 在信噪比足够高, 使得 α_i^2 比加性白噪声方差 σ^2 明显大时, 我们容易将矩阵 R_{xx} 的前 p 个大的特征值 $\alpha_i^2 + \sigma^2$ 同后面 $m - p$ 个小的特征值 σ^2 区分开来。这 p 个主特征值称为信号特征值, 其余 $m - p$ 个次特征值称为噪声特征值。根据信号特征值和噪声特征值, 我们又可以将特征矩阵 U 的列向量分成两部分, 即

$$U = [S \mid G] \quad (3.9.25)$$

式中

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_p] = [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p] \quad (3.9.26a)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_{m-p}] = [\mathbf{u}_{p+1}, \cdots, \mathbf{u}_m] \quad (3.9.26b)$$

分别由信号特征向量和噪声特征向量组成。

回顾线性代数^[228]知, 给定向量组 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p \in C^m$ (m 维复数空间), 则这些向量的所有线性组合的集合称为由向量组合 $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p\}$ 张成的子空间, 或称作 $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p\}$ 的张成或闭包, 即有

$$\text{span}\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p\} = \text{close}\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p\} = \left\{ \sum_{j=1}^p \beta_j \mathbf{x}_j : \beta_j \in C \right\} \quad (3.9.27)$$

因此, 常将信号特征向量的张成 $\text{span}\{\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_p\}$ 称为信号子空间, 将噪声特征向量的张成 $\text{span}\{\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_{m-p}\}$ 称为噪声子空间。

另外, 任一 $m \times p$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的值域定义为

$$\text{range}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in C^m : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ 对某个复向量 } \mathbf{x} \in C^p\} \quad (3.9.28)$$

值域也定义子空间。特别地, 若 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 则 $\text{range}(\mathbf{A})$ 退化为 $\mathbf{A}$ 的零空间, 即

$$\text{null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in C^p : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad (3.9.29)$$

如果 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p]$ 是一列分块矩阵, 则

$$\text{range}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p\} \quad (3.9.30)$$

因此, 信号子空间和噪声子空间有时也分别写作

$$\text{range}(\mathbf{S}) = \text{span}\{\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_p\} \quad (3.9.31a)$$

$$\text{range}(\mathbf{G}) = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_{m-p}\} \quad (3.9.31b)$$

下面分析信号子空间和噪声子空间的几何意义。由子空间的构造方法及酉矩阵的特点知, 信号子空间与噪声子空间正交, 即

$$\text{span}\{\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_p\} \perp \text{span}\{\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_{m-p}\} \quad (3.9.32)$$

由于 $\mathbf{U}$ 是酉矩阵, 故

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^H = [\mathbf{S} \mid \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{S}^H \\ \mathbf{G}^H \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{S}^H + \mathbf{G}\mathbf{G}^H = \mathbf{I}$$

即有

$$GG^H = I - SS^H \quad (3.9.33)$$

定义信号子空间上的投影矩阵

$$P_s \stackrel{\text{def}}{=} S(S^H S)^{-1} S^H = SS^H \quad (3.9.34)$$

式中, 矩阵内积 $\langle S, S \rangle = S^H S = I$. 于是, $P_s x$ 可视为向量 x 在信号子空间上的投影, 而 $(I - P_s)x$ 则代表向量 x 在信号子空间上的正交投影. 由 $\langle G, G \rangle = G^H G = I$ 得噪声子空间上的投影矩阵 $P_n = G(G^H G)^{-1} G^H = GG^H$. 因此, 常将

$$GG^H = I - SS^H = I - P_s \quad (3.9.35)$$

称为信号子空间的正交投影矩阵.

3.9.3 MUSIC 方法

下面讨论如何利用子空间进行多个信号分类.

考查

$$R_{xx}G = [S \mid G]\Sigma \begin{bmatrix} S^H \\ G^H \end{bmatrix} G = [S \mid G]\Sigma \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} = \sigma^2 G \quad (3.9.36)$$

又由 $R_{xx} = APA^H + \sigma^2 I$ 有 $R_{xx}G = APA^H G + \sigma^2 G$, 利用式 (3.9.36) 的结果, 立即得到

$$APA^H G = O$$

进而有

$$G^H APA^H G = O \quad (3.9.37)$$

众所周知, $t^H Q t = 0$ 当且仅当 $t = 0$, 故式 (3.9.37) 成立的充分必要条件是

$$A^H G = O \quad (3.9.38)$$

将 $A = [a(\omega_1), \dots, a(\omega_p)]$ 代入式 (3.9.38), 即有

$$a^H(\omega)G = 0^T, \quad \omega = \omega_1, \dots, \omega_p \quad (3.9.39)$$

显然, 当 $\omega \neq \omega_1, \dots, \omega_p$ 时, $a^H(\omega)G \neq 0^T$.

将式 (3.9.39) 改写成标量形式, 可以定义一种类似于功率谱的函数:

$$P(\omega) = \frac{1}{a^H(\omega)GG^H a(\omega)} \quad (3.9.40)$$

上式取峰值的 p 个 ω 值 $\omega_1, \dots, \omega_p$ 给出 p 个信号的波达方向 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 。

由于式 (3.9.40) 定义的函数 $P(\omega)$ 描述了空间参数 (即波达方向) 的分布, 故常称之为空间谱。由于它能够对多个空间信号进行识别 (即分类), 故这种方法称为多重信号分类, 简称 MUSIC (multiple signal classification) 方法, 它是 Schmidt^{[169], [170]} 和 Bienvenu 及 Kopp^[171] 于 1979 年独立提出的。后来, Schmidt 于 1986 年重新发表了他的论文^[171]。

将式 (3.9.33) 代入式 (3.9.40), 又可得到

$$P(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega)(\mathbf{I} - \mathbf{S}\mathbf{S}^H)\mathbf{a}(\omega)} \quad (3.9.41)$$

若将式 (3.9.40) 视为噪声子空间方法, 则式 (3.9.41) 为信号子空间方法。

在实际应用中, 通常将 ω 划分为数百个等间距的单位, 得到

$$\omega_i = 2\pi i \Delta f \quad (3.9.42)$$

例如取 $\Delta f = \frac{0.5}{500} = 0.001$, 然后将每个 ω_i 值代入式 (3.9.40) 或式 (3.9.41) 求出所有峰值对应的 ω 值。因此, MUSIC 算法需要在频率轴上进行全域搜索, 计算量比较大。另外, 执行 MUSIC 算法是选择噪声子空间还是信号子空间方式, 决定于 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{S}$ 中哪一个具有更小的维数。除了计算量有所不同外, 这两种方式并没有本质上的区别。

为了改进 MUSIC 算法的性能, 已提出了好几种变型, 对这些变型感兴趣的读者, 可参考文献 [172]。这里介绍其中一种, 其基础是最大似然法。具体说来, 这种改进的 MUSIC 算法是使变量

$$\epsilon_i = \mathbf{a}^H(\omega) \mathbf{g}_i, \quad i = 1, \dots, m - p \quad (3.9.43)$$

的似然值最大。注意, 基本的 MUSIC 算法是使 $\sum_{i=1}^{m-p} |\epsilon_i|^2$ 最小。Sharman 和 Durrani^[172]

证明了, 使式 (3.9.43) 的渐近 (大样本 N) 似然值最大的估计子由下列函数的最大化给出:

$$P(\omega) = \frac{\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{U}} \mathbf{a}(\omega)}{\mathbf{a}^H(\omega) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\omega)} \quad (3.9.44)$$

式中

$$\hat{\mathbf{U}} = \sigma^2 \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{(\sigma^2 - \lambda_k)^2} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H \quad (3.9.45)$$