

算法 3.9.1 (改进的 MUSIC 算法)^[172]

步骤 1 计算样本自相关矩阵 $\mathbf{R}_{xx}$ 的特征值分解, 得到其主特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 和次特征值 σ^2 , 并存储主特征向量 $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p$.

步骤 2 利用式 (3.9.44) 计算 MUSIC 谱 $P(\omega_i)$, 其中 $\omega_i = (i-1)\Delta\omega$, 网格 $\Delta\omega$ 可取作 $2\pi \cdot 0.001$ 等。

步骤 3 找出 $P(\omega)$ 的 p 个峰值, 它们就是待求的 MUSIC 估计值 $\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_p$.

Stoica 和 Nehorai^[178] 分析了 MUSIC 算法的估计值性能, 并证明了下列结论:

(1) 特征向量的估计误差 $(\hat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i)$ 为渐近 (对于大样本 N) 联合高斯分布, 其均值等于零;

(2) MUSIC 参数估计误差 $(\hat{\omega}_i - \omega_i)$ 为渐近联合高斯分布, 其均值等于零;

(3) 假定函数 $r(\omega) = \mathbf{a}(\omega)^H \hat{\mathbf{U}} \mathbf{a}(\omega)$ 满足正则条件 $r(\omega_i) \neq 0, i = 1, \dots, p$, 则使式 (3.9.44) 定义的 MUSIC 谱 $P(\omega)$ 最大化与使式 (3.9.40) 定义的 MUSIC 谱最大化所得到的参数估计值 $\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_p$ 具有相同的渐近分布。

3.9.4 解相干 MUSIC 方法

下面考虑相干信号情况下 MUSIC 算法的改进。

由于多径传输以及人为干扰的影响, 阵列有时会收到来自不同方向上的相干信号。如前所述, 相干信号会导致信源协方差矩阵 $\mathbf{P}$ 的秩亏缺, 从而使得信号特征向量发散到噪声子空间去。因此, 对任意 θ 将不再有 $\mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) = 0$, MUSIC 空间谱也就无法在波达方向上产生谱峰。另外, 对于高度相关的两个信号, 若它们相距较近, MUSIC 及其前述改进算法的波达方向分辨能力也会显著下降。在两个相干信源和等距线阵的简单情况下, 存在一种对相干信号“解相干”的直接方法。

相干源的问题要从解决矩阵的秩亏缺入手。当 p 个信号非相干时, 一次快拍得到的是 p 个信号线性组合的阵列向量。若取多次快拍, 由于信号间的相位关系不同, 则总可以得到 p 个非线性相关的阵列向量, 其协方差矩阵具有秩为 p 的信号子空间。如果 p 个信号中有两个相干, 即这两个信号的相位关系保持不变, 再多的快拍也只能得到 $p-1$ 个非线性相关的阵列向量, 使信号子空间的秩降为 $p-1$ 。为解决秩亏缺, 必须设法加一个非线性相关的阵列向量。对于等距线阵, 取“反向阵列向量”是一种行之有效的方法。

令 $\mathbf{J}$ 为 $L \times L$ 置换矩阵 (除反对角线上元素为 1 外, 其余元素皆等于 0), 则对于一等距线阵, 有

$$\mathbf{J} \mathbf{a}^*(\theta) = e^{-j(L-1)\phi} \mathbf{a}(\theta) \quad (3.9.46)$$

由此可得到反向阵列协方差矩阵

$$\mathbf{R}_B - \mathbf{J}\mathbf{R}^*\mathbf{J} = \mathbf{A}\Phi^{-(L-1)}\mathbf{P}\Phi^{-(L-1)}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3.9.47)$$

式中, Φ 为对角矩阵, 对角线元素为 $e^{jm\phi}$ ($m = 1, \dots, M$)。求 (正向) 阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 和反向阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_B$ 的平均, 便得到正反向阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_{FB}$ 如下:

$$\mathbf{R}_{FB} = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{R}_B) = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{J}\mathbf{R}^*\mathbf{J}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3.9.48)$$

式中, 新的信源协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \Phi^{-(L-1)}\mathbf{P}\Phi^{-(L-1)})$ 通常具有满秩。任何基于协方差矩阵的算法只要将 $\hat{\mathbf{R}}$ 换成 $\hat{\mathbf{R}}_{FB}$, 即可得到这种算法的正反向形式。变换 $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \hat{\mathbf{R}}_{FB}$ 也被用于非相干情况中改善估计方差。

空间平滑技术是另一种对付相干或高相关信号的有效方法, 其基本思想是将等距线阵分成若干个相重叠的子阵列, 如图 3.9.2 所示。若各子阵列的阵列流形相同 (这一假设适用于等距线阵), 则各子阵列的协方差矩阵可以进行平均运算。

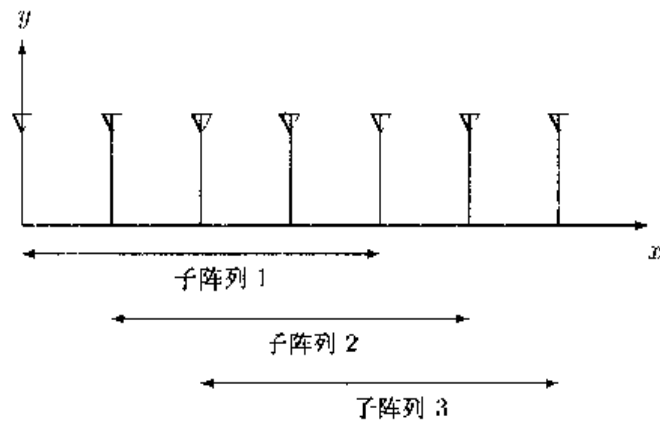


图 3.9.2 等距阵列分成几个子阵列

各子阵列的向量以各自的第一个阵元为基准, 两相干信号的相位差由于波达方向不同, 在各阵元是不同的, 即空间平滑产生随机相位调制, 因而可对引起秩亏缺的信号解相关。平滑后的矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 可以用选择矩阵 $\mathbf{F}_m$ 写出。方法是: 将 m 个阵元的等距线阵按照图 3.9.2 的方法分成 M 个子阵列, 每个子阵列含 q 个阵元, 则总的子阵列数目 $M = m - q + 1$ 。于是, 空间平滑的阵列协方差矩阵可以表示成

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{F}_m \mathbf{R} \mathbf{F}_m^H \quad (3.9.49)$$

式中

$$\mathbf{F}_m = [\mathbf{0}_{p \times (m-1)} \mid \mathbf{I}_p \mid \mathbf{0}_{p \times (L-m-p+1)}] \quad (3.9.50)$$

如上所述, 当用于平均的子阵列每增加一个时, 一般说来非线性相关阵列向量会多一个, 平均后的源协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的秩便以概率 1 增加 1, 直到秩到达最大值 M 为止。

空间平滑的缺点是: 阵列的有效孔径减小了, 因为子阵列比原阵列小。然而, 尽管存在这一孔径损失, 空间平滑变换减轻了所有子空间估计技术的局限性, 并将保留一维谱搜索的计算有效性。

3.9.5 求根 MUSIC 方法

顾名思义, 求根 MUSIC 方法是 MUSIC 方法的一种多项式求根形式, 它是由 Barabell 提出的^[8], 其基本思想是 Pisarenko 分解。定义多项式

$$p_l(z) = \mathbf{u}_l^H \mathbf{p}(z), \quad l = M+1, M+2, \dots, L \quad (3.9.51)$$

式中, $\mathbf{u}_l$ 是矩阵 $\mathbf{R}$ 的第 l 个特征向量, 并且

$$\mathbf{p}(z) = [1, z, \dots, z^{L-1}]^T \quad (3.9.52)$$

为了综合利用所有噪声特征向量提取空间参数信息, 构造 MUSIC 型函数

$$\mathbf{p}^H(z) \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{p}(z) \quad (3.9.53)$$

式中 $\hat{\mathbf{U}}_n = [\mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_L]$ 。根据 Pisarenko 谐波分解的思想, MUSIC 函数的零点给出空间频率 (波达方向) 的估计。换言之, 式 (3.9.53) 的根决定波达方向估计。这就是求根 MUSIC 的基本思想。

然而, 式 (3.9.53) 并不是 z 的多项式, 因为它还存在 z^* 的幂次项。由于我们只对单位圆上的 z 值感兴趣, 所以可以用 $\mathbf{p}^T(z^{-1})$ 代替 $\mathbf{p}^H(z)$, 这就给出了求根 MUSIC 多项式, 即

$$p(z) = z^{L-1} \mathbf{p}^T(z^{-1}) \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{p}(z) \quad (3.9.54)$$

现在, $p(z)$ 是 $2(L-1)$ 次多项式, 它的根相对于单位圆为镜像对。其中, 具有最大幅值的 M 个根 $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_p$ 的相位给出波达方向估计, 即

$$\hat{\theta}_m = \arccos \left[\frac{1}{kd} \arg(\hat{z}_m) \right], \quad m = 1, \dots, p \quad (3.9.55)$$

业已证明^[178], MUSIC 和求根 MUSIC 具有相同的渐近性能, 但求根 MUSIC 方法的小样本性能比 MUSIC 明显好。

3.10 旋转不变技术 (ESPRIT)

ESPRIT 是借助旋转不变技术估计信号参数 (estimating signal parameter via rotational invariance techniques) 的英文缩写。ESPRIT 方法最早是由 Roy 等人^[160]于 1986 年提出的, 现已成为现代信号处理中一种主要方法, 并得到了广泛的应用。

3.10.1 基本 ESPRIT 算法

考虑白噪声中的 p 个谐波信号

$$x(n) = \sum_{i=1}^p s_i(n) e^{jn\omega_i} + w(n) \quad (3.10.1)$$

式中 $s_i(n)$ 和 $\omega_i \in (-\pi, \pi)$ 分别为第 i 个谐波信号的幅值和频率。假定 $w(n)$ 是一个零均值、方差为 σ^2 的复值高斯白噪声过程, 即

$$E\{w(k)w^*(l)\} = \sigma^2 \delta(k-l)$$

$$E\{w(k)w(l)\} = 0, \quad \forall k, l$$

定义一个新的过程 $y(n) \stackrel{\text{def}}{=} x(n+1)$ 。选择 $m > p$, 并引入以下 $m \times 1$ 维向量:

$$\mathbf{x}(n) \stackrel{\text{def}}{=} [x(n), x(n+1), \dots, x(n+m-1)]^T \quad (3.10.2a)$$

$$\mathbf{w}(n) \stackrel{\text{def}}{=} [w(n), w(n+1), \dots, w(n+m-1)]^T \quad (3.10.2b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &\stackrel{\text{def}}{=} [y(n), y(n+1), \dots, y(n+m-1)]^T \\ &= [x(n+1), x(n+2), \dots, x(n+m)]^T \end{aligned} \quad (3.10.2c)$$

$$\mathbf{a}(\omega_i) \stackrel{\text{def}}{=} [e^{jn\omega_i}, e^{j(n+1)\omega_i}, \dots, e^{j(n+m-1)\omega_i}]^T \quad (3.10.2d)$$

于是, 式 (3.10.1) 可以写作向量形式:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (3.10.3)$$

另有

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\Phi\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n+1) \quad (3.10.4)$$

式中

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}(\omega_1), \mathbf{a}(\omega_2), \dots, \mathbf{a}(\omega_p)] \quad (3.10.5a)$$

$$\mathbf{s}(n) \stackrel{\text{def}}{=} [s_1(n), s_2(n), \dots, s_p(n)]^T \quad (3.10.5b)$$

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_p}) \quad (3.10.5c)$$

注意, Φ 是一酉矩阵, 即有 $\Phi^H \Phi = \Phi \Phi^H = \mathbf{I}$, 它将空间的向量 $\mathbf{x}(n)$ 和 $\mathbf{y}(n)$ 联系在一起; 矩阵 $\mathbf{A}$ 是一个 $m \times p$ 维 Vandermonde 矩阵。由于 $\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n+1)$, 故 $\mathbf{y}(n)$ 可以看作是 $\mathbf{x}(n)$ 的平移结果。鉴于此, 矩阵 Φ 被称作旋转算符, 因为平移是最简单的旋转。

观测向量 $\mathbf{x}(n)$ 的自相关矩阵为

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3.10.6)$$

式中

$$\mathbf{P} = E\{\mathbf{s}(n)\mathbf{s}^H(n)\} \quad (3.10.7)$$

是信号向量的相关矩阵。若各信号不相关, 则 $\mathbf{P} = \text{diag}(E\{|s_1(n)|^2\}, \dots, E\{|s_p(n)|^2\})$ 是一个 $p \times p$ 对角矩阵, 其对角线上的元素为各信号的功率。在 ESPRIT 方法里, 只要求矩阵 $\mathbf{P}$ 非奇异, 并不要求它一定是对角矩阵。

向量 $\mathbf{x}(n)$ 和 $\mathbf{y}(n)$ 的互相关矩阵为

$$\mathbf{R}_{xy} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\Phi^H\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{Z} \quad (3.10.8)$$

式中 $\sigma^2\mathbf{Z} = E\{\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n+1)\}$ 。容易验证, $\mathbf{Z}$ 是一个 $m \times m$ 特殊矩阵:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10.9)$$

即主对角线下面的对角线上的元素全部为 1, 而其他元素皆等于 0。

由自相关矩阵的元素 $[\mathbf{R}_{xx}]_{ij} = E\{x(i)x^*(j)\} = R_{xx}(i-j) = R_{xx}^*(j-i)$ 知

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}^*(1) & \cdots & R_{xx}^*(m-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}^*(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(m-1) & R_{xx}(m-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (3.10.10)$$

类似地, 互相关矩阵的元素为 $[R_{xy}]_{ij} = E\{x(i)y^*(j)\} = E\{x(i)x^*(j+1)\} = R_{xx}(i-j-1) = R_{xx}^*(j-i+1)$, 即有

$$R_{xy} = \begin{bmatrix} R_{xx}^*(1) & R_{xx}^*(2) & \cdots & R_{xx}^*(m) \\ R_{xx}(0) & R_{xx}^*(1) & \cdots & R_{xx}^*(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{xx}(m-2) & R_{xx}(m-3) & \cdots & R_{xx}^*(1) \end{bmatrix} \quad (3.10.11)$$

注意 $R_{xx}(0) = R_{xx}^*(0)$ 。

现在的问题是: 已知自相关函数 $R_{xx}(0), R_{xx}(1), \dots, R_{xx}(m)$, 如何估计谐波信号的个数 p 、谐波频率 ω_i , $i = 1, \dots, p$ 以及谐波功率 $|s_i|^2$?

向量 $x(n)$ 经过平移, 变为 $y(n) = x(n+1)$, 但是这种平移却保持了 $x(n)$ 和 $y(n)$ 对应的信号子空间的不变性。这是因为 $R_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(n)x^H(n)\} = E\{x(n+1)x^H(n+1)\} \stackrel{\text{def}}{=} R_{yy}$, 它们完全相同!

对 R_{xx} 作特征值分解, 可以得到其最小特征值 $\lambda_{\min} = \sigma^2$ 。构造一对新的矩阵

$$C_{xx} = R_{xx} - \lambda_{\min} I = R_{xx} - \sigma^2 I = A P A^H \quad (3.10.12a)$$

$$C_{xy} = R_{xy} - \lambda_{\min} Z = R_{xy} - \sigma^2 Z = A P \Phi S^H \quad (3.10.12b)$$

$\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 称为矩阵束或矩阵对。

矩阵束 $\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 的特征值分解称为广义特征值分解, 定义为: 若标量 γ 和向量 u 满足

$$C_{xx}u = \gamma C_{xy}u \quad (3.10.13)$$

则 γ 和 u 分别称为矩阵束 $\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 的广义特征值和广义特征向量, 并称二元组 (γ, u) 为广义特征对。当我们只对广义特征值感兴趣时, 常将矩阵束写作 $C_{xx} - \gamma C_{xy}$ 。当 γ 不是广义特征值时, 矩阵束 $C_{xx} - \gamma C_{xy}$ 满秩; 而使矩阵束秩亏缺的 γ 则称为矩阵束 $\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 的广义特征值。

考查矩阵束

$$C_{xx} - \gamma C_{xy} = A P (I - \gamma \Phi^H) A^H \quad (3.10.14)$$

由于 A 满列秩和 P 非奇异, 所以从矩阵秩的角度, 式 (3.10.14) 可以写作

$$\text{rank}(C_{xx} - \gamma C_{xy}) = \text{rank}(I - \gamma \Phi^H) \quad (3.10.15)$$

当 $\gamma \neq \omega_i$, $i = 1, \dots, p$ 时, 矩阵 $(I - \gamma \Phi)$ 是非奇异的, 而当 γ 等于 $e^{j\omega_i}$ 时, 由于 $\gamma e^{-j\omega_i} = 1$, 所以矩阵 $(I - \gamma \Phi)$ 奇异, 即秩亏缺。这说明, $e^{j\omega_i}$, $i = 1, \dots, p$ 都是矩阵束 $\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 的广义特征值。这一结果可以用下面的定理加以归纳。

定理 3.10.1 定义 Γ 为矩阵束 $\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 的广义特征值矩阵, 其中 $C_{xx} = R_{xx} - \lambda_{\min} I$ 和 $C_{xy} = R_{xy} - \lambda_{\min} Z$, 且 $\lambda_{\min}$ 是自相关矩阵 R_{xx} 的最小特征值。若矩阵 P 非奇异, 则矩阵 Γ 与旋转算符矩阵 Φ 之间有下列关系:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10.16)$$

即 Γ 的非零元素是旋转算符矩阵 Φ 的各元素的一个排列。

基本的 ESPRIT 算法可总结如下。

算法 3.10.1 (基本 ESPRIT 算法 1)

步骤 1 利用已知的观测数据 $x(1), \dots, x(N)$ 估计相关函数 $R_{xx}(0), R_{xx}(1), \dots, R_{xx}(m)$ 。

步骤 2 由估计的自相关函数构造 $m \times m$ 自相关矩阵 R_{xx} 和 $m \times m$ 互相关矩阵 R_{xy} 。

步骤 3 求 R_{xx} 的特征值分解。对于 $m > p$, 最小特征值为噪声方差 σ^2 的估计。

步骤 4 利用 σ^2 计算 $C_{xx} = R_{xx} - \sigma^2 I$ 和 $C_{xy} = R_{xy} - \sigma^2 Z$ 。

步骤 5 求矩阵束 $\{C_{xx}, C_{xy}\}$ 的广义特征值分解, 得到位于单位圆上的 p 个广义特征值 $e^{j\omega_i}, i = 1, \dots, p$, 它们直接给出谐波频率或由式 (3.9.1) 确定波达方向。

特别地, 当各谐波信号 $s_1(n), \dots, s_p(n)$ 相互独立时, 我们还可以计算出各谐波的功率 $E\{|s_i|^2\}, i = 1, \dots, p$ 。在信号相互独立的条件下, 矩阵

$$P = E\{s(n)s^H(n)\} = \text{diag}(E\{|s_1(n)|^2\}, \dots, E\{|s_p(n)|^2\})$$

为对角矩阵。

令 e_i 是对应于广义特征值 γ_i 的广义特征向量。由定义知, e_i 满足关系式

$$AP A^H e_i = \gamma_i AP \Phi^H A^H e_i \quad (3.10.17a)$$

或等价于

$$e_i^H AP (I - \gamma_i \Phi^H) A^H e_i = 0 \quad (3.10.17b)$$

显而易见, 对角矩阵 $P(I - \gamma_i \Phi^H)$ 的第 i 个对角元素等于零, 而其他对角元素不等于零 (用 $\times$ 表示, 它是我们不感兴趣的), 即

$$P(I - \gamma_i \Phi^H) = \text{diag}(\times, \dots, \times, 0, \times, \dots, \times) \quad (3.10.18)$$

故知, 为保证式 (3.10.17b) 成立, $e_i^H A$ 和 $A^H e_i$ 必然具有以下形式:

$$e_i^H A = [0, \dots, 0, a^H(\omega_i)e_i, 0, \dots, 0] \quad (3.10.19a)$$

$$A^H e_i = [0, \dots, 0, a^H(\omega_i)e_i, 0, \dots, 0]^T \quad (3.10.19b)$$

也就是说, 与广义特征值 γ_i 对应的广义特征向量 e_i 与除方向向量 $a(\omega_i)$ 以外的其他所有方向向量 $a(\omega_j)$, $j \neq i$ 正交。另一方面, 对角矩阵 $\gamma_i \Phi^H$ 的第 (i, i) 个元素等于 1, 即

$$\gamma_i \Phi^H = \text{diag}(e^{-j\omega_1}, \dots, e^{-j\omega_{i-1}}, 1, e^{-j\omega_{i+1}}, \dots, e^{-j\omega_p}) \quad (3.10.20)$$

将 $C_{xx} = APA^H$ 代入式 (3.10.17b), 得

$$e_i^H AP \gamma_i \Phi^H A^H e_i = e_i^H C_{xx} e_i \quad (3.10.21)$$

将式 (3.10.19) 和式 (3.10.20) 代入式 (3.10.21), 并注意到 P 是对角矩阵, 则有

$$E\{|s_i(n)|^2\} |e_i^H a(\omega_i)|^2 = e_i^H C_{xx} e_i$$

即

$$E\{|s_i(n)|^2\} = \frac{e_i^H C_{xx} e_i}{|e_i^H a(\omega_i)|^2} \quad (3.10.22)$$

这就是当各信号相互独立时, 各信号功率的估计公式。

3.10.2 TLS-ESPRIT 方法

以上介绍的基本 ESPRIT 方法可以看作是一种最小二乘算子, 其作用是将原 m 维观测空间约束到一个子空间 (其维数等于波达方向个数 p)。因此, 这种基本 ESPRIT 方法有时称作 LS-ESPRIT 算法。Roy 和 Kailath 指出^[159], 最小二乘算子会导致在求解广义特征值问题的某些潜在的数值困难。现在已广泛认识到, 奇异值分解 (SVD) 和总体最小二乘 (TLS) 的应用可以将一个较大维数 ($m \times m$) 病态广义特征问题转化为一个较小维数 ($p \times p$) 的无病态广义特征问题。

TLS-ESPRIT 有多种算法, 需要的奇异值分解次数各不相同。其中, Zhang 和 Liang^[220] 提出的 TLS-ESPRIT 算法只需要 1 次奇异值分解, 是计算最简单的。

考虑矩阵束 $\{R_1, R_2\}$ 的广义特征值分解。令 R_1 的奇异值分解为

$$R_1 = U \Sigma V^H = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} \quad (3.10.23)$$

式中 Σ_1 由 p 个主奇异值组成。在不改变广义特征值的条件下, 可以用 U_1^H 左乘和用 V_1 右乘矩阵 $R_1 - \gamma R_2$, 得到

$$\Sigma_1 - \gamma U_1^H R_2 V_1 \quad (3.10.24)$$

现在, 原较大维数的矩阵束 $\{R_1, R_2\}$ 的广义特征值问题便变成了较小维数 ($p \times p$) 的矩阵束 $\{\Sigma_1, U_1^H R_2 V_1\}$ 的广义特征值问题。

算法 3.10.2 (TLS-ESPRIT 算法)

步骤 1 进行矩阵 R_{xx} 的特征值分解。

步骤 2 利用最小特征值 σ^2 计算 $C_{xx} = R_{xx} - \sigma^2 I$ 和 $C_{xy} = R_{xy} - \sigma^2 Z$ 。

步骤 3 作矩阵 C_{xx} 的奇异值分解, 确定其有效秩, 并存储与 p 个主奇异值对应的 Σ_1, U_1 和 V_1 。

步骤 4 计算 $U_1^H C_{xy} V_1$ 。

步骤 5 求矩阵束 $\{\Sigma_1, U_1^H C_{xy} V_1\}$ 的广义特征值分解, 得到单位圆上的广义特征值, 它们直接给出谐波频率或通过式 (3.9.1) 确定波达方向。

业已证明, 虽然 LS-ESPRIT 和 TLS-ESPRIT 给出相同的渐近 (对大样本) 估计精度, 但是在小样本时 TLS-ESPRIT 总是比 LS-ESPRIT 好。此外, 与 LS-ESPRIT 不同, TLS-ESPRIT 考虑了 C_{xx} 和 C_{xy} 二者的噪声影响, 所以比 LS-ESPRIT 更合理。

3.10.3 ESPRIT 方法的另一形式

考查一个由 m 个阵元组成的等距线阵。如图 3.10.1 所示, 现在将这个等距线阵分为两个子阵列, 其中子阵列 1 由第 1 个至第 $m-1$ 个阵元组成, 子阵列 2 由第 2 个至第 m 个阵元组成。

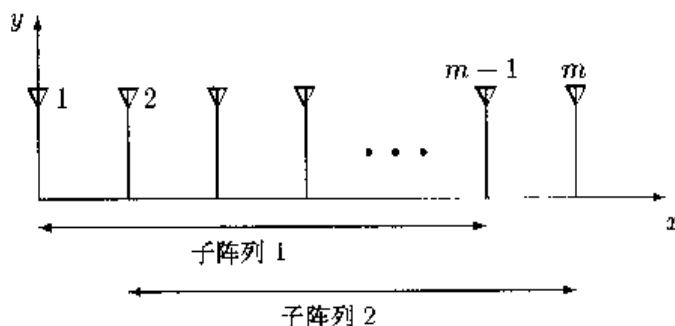


图 3.10.1 阵列分成两个子阵列

令 $m \times N$ 矩阵

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \cdots, \mathbf{x}(N)] \quad (3.10.25)$$

代表原阵列的观测数据矩阵, 其中 $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), \cdots, x_m(n)]^T$ 是 m 个阵元在 n 时刻的观测信号组成的观测数据向量, 而 N 为数据长度, 即 $n = 1, \cdots, N$.

若令

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1), \cdots, \mathbf{s}(N)] \quad (3.10.26)$$

代表信号矩阵, 式中

$$\mathbf{s}(n) = [s_1(n), \cdots, s_p(n)]^T \quad (3.10.27)$$

表示信号向量, 则对于 N 个快拍的数据, 式 (3.10.1) 可以用矩阵形式表示成

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \cdots, \mathbf{x}(N)] = \mathbf{A}\mathbf{S} \quad (3.10.28)$$

式中 $\mathbf{A}$ 是 $m \times p$ 阵列方向矩阵。

令 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$ 是两个 $(m-1) \times m$ 选择矩阵:

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{m-1} \mid \mathbf{0}_{m-1}] \quad (3.10.29a)$$

$$\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{m-1} \mid \mathbf{I}_{m-1}] \quad (3.10.29b)$$

式中 $\mathbf{I}_{m-1}$ 代表 $(m-1) \times (m-1)$ 单位矩阵; $\mathbf{0}_{m-1}$ 表示 $(m-1) \times 1$ 零向量。

用选择矩阵 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$ 分别左乘观测数据矩阵 $\mathbf{X}$, 得到

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1(1), \cdots, \mathbf{x}_1(N)] \quad (3.10.30a)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{X} = [\mathbf{x}_2(1), \cdots, \mathbf{x}_2(N)] \quad (3.10.30b)$$

式中

$$\mathbf{x}_1(n) = [x_1(n), \cdots, x_{m-1}(n)]^T, \quad n = 1, \cdots, N \quad (3.10.31a)$$

$$\mathbf{x}_2(n) = [x_2(n), \cdots, x_m(n)]^T, \quad n = 1, \cdots, N \quad (3.10.31b)$$

即是说, 观测数据子矩阵 $\mathbf{X}_1$ 由观测数据矩阵 $\mathbf{X}$ 的前 $m-1$ 行组成, 相当于子阵列 1 的观测数据矩阵; $\mathbf{X}_2$ 则由 $\mathbf{X}$ 的后 $m-1$ 行组成, 相当于子阵列 2 的观测数据矩阵。

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (3.10.32)$$