则根据等距线阵的阵列响应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的结构知，子矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 之间存在以下关系：

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Phi} \tag{3.10.33}$$

容易验证

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{S} \tag{3.10.34a}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S} \tag{3.10.34b}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一酉矩阵，所以 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 具有相同的信号子空间和噪声子空间，即子阵列 1 和子阵列 2 具有相同的观测空间 (信号子空间 + 噪声子空间)。这就是等距线阵的平移不变性的物理解释。

由式 (3.10.6) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{xx} &= \boldsymbol{APA}^{\mathrm{H}} + \sigma^2\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{U}_s, \boldsymbol{U}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \sigma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\\ &= [\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s, \sigma^2\boldsymbol{U}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\end{bmatrix} = \boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}} + \sigma^2\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{3.10.35}$$

由于 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}_s\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}}$，故由式 (3.10.35) 易知

$$\boldsymbol{APA}^{\mathrm{H}} + \sigma^2\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}} \tag{3.10.36}$$

用 $\boldsymbol{U}_s$ 右乘上式两边，注意到 $\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{I}$，并加以重排，即得

$$\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{AT} \tag{3.10.37}$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 是一个非奇异矩阵，

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{PA}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_s(\boldsymbol{\Sigma}_s - \sigma^2\boldsymbol{I})^{-1} \tag{3.10.38}$$

虽然 $\boldsymbol{T}$ 是一未知矩阵，但它只是下面分析中的一个 “虚拟参数”，我们只用到它的非奇异性。用 $\boldsymbol{T}$ 右乘式 (3.10.32)，则有

$$\boldsymbol{AT} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{T}\\ \text{最后一行}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{第一行}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{T}\end{bmatrix} \tag{3.10.39}$$

采用相同的分块形式，将 $\boldsymbol{U}_s$ 也分块成

$$\boldsymbol{U}_s = \begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1\\ \text{最后一行}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{第一行}\\ \boldsymbol{U}_2\end{bmatrix} \tag{3.10.40}$$

由于 $\boldsymbol{AT} = \boldsymbol{U}_s$，故比较式 (3.10.39) 与式 (3.10.40)，立即有

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{T} \tag{3.10.41a}$$

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{T} \tag{3.10.41b}$$

将式 (3.10.33) 代入式 (3.10.41b)，即有

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{T} \tag{3.10.42a}$$

由式 (3.10.41a) 及式 (3.10.42a)，又有

$$\boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{T} \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}_2 \tag{3.10.42b}$$

定义

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{T} \tag{3.10.43}$$

矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的相似变换，因此它们具有相同的特征值，即 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值也为 $e^{j\phi_m}, m = 1, \cdots, M$。

将式 (3.10.43) 代入式 (3.10.42b)，则得到一个重要的关系式，即

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{\Psi} \tag{3.10.44}$$

式 (3.10.44) 启迪了基本 ESPRIT 算法的另一种算法。

算法 3.10.3 (基本 ESPRIT 算法 2)

步骤 1 计算阵列协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}$ 的特征值分解 $\hat{\boldsymbol{R}}_{xx} = \hat{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{\Sigma} \hat{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{H}}$。

步骤 2 矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}$ 的 p 个主特征值对应的部分组成 $\hat{\boldsymbol{U}}_s$。

步骤 3 抽取 $\hat{U}_s$ 的前面 $m-1$ 行组成矩阵 $\hat{U}_1$，后面 $m-1$ 行组成矩阵 $\hat{U}_2$。计算 $\boldsymbol{\Psi} = (\hat{U}_1^{\mathrm{H}} \hat{U}_1)^{-1} \hat{U}_1^{\mathrm{H}} \hat{U}_2$ 的特征值分解，其特征值与 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 的特征值相同，为 $e^{j\omega_i}(i = 1, \cdots, p)$，它们给出估计值 $\hat{\omega}_i (i = 1, \cdots, p)$。

步骤 4 应用公式 (3.9.1) 及 $\hat{\omega}_i$ 求波达方向估计 $\hat{\theta}_i$，其中 $i = 1, \cdots, p$。

ESPRIT 方法在通信信号处理尤其是在空时二维处理中有着重要的应用，感兴趣的读者可参考文献 [230]。

本节只讨论了实数据的 ESPRIT 方法，原则上也适用于复数据的情况。然而，对于复数据，更好的方法是采用西 ESPRIT 方法，这将在下一节介绍。

3.11 酉 ESPRIT

考查 $m \times N$ 观测数据矩阵

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}(1), \cdots, \boldsymbol{x}(N)] \tag{3.11.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), \cdots, x_m(t)]^{\mathrm{T}}$ 是 m 个阵元的观测信号组成的观测数据向量。假定 $\boldsymbol{X}$ 是一个复矩阵。从原理上讲，只需要求出复观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的奇异值分解 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^H$，即可通过主奇异值和次奇异值的分离，确定出张成信号子空间的矩阵 $\boldsymbol{U}_s$。一旦得到 $\boldsymbol{U}_s$，又可直接应用 3.10 节的基本 ESPRIT 算法 2 估计所需要的信号参数。然而，这种方法存在一个缺陷：它只利用了 m 个阵元上的观测数据 $x_1(t), \cdots, x_m(t)$，而没有利用共轭的观测数据 $x_1^*(t), \cdots, x_m^*(t)$。由于一个复观测数据和它的共轭是不同的，因此，如果能够同时利用 $x_1(t), \cdots, x_m(t)$ 和 $x_1^*(t), \cdots, x_m^*(t)$，则被利用的数据长度等效于增加了一倍。显然，在不增加阵元的情况下，同时使用复观测数据及其共轭数据将提高 ESPRIT 方法的信号参数估计的精度。这正是酉 ESPRIT 方法要解决的问题。

具体说来，酉 ESPRIT 方法利用复观测数据矩阵 $\boldsymbol{X} \in C^{m\times N}$ 和它的复数共轭 (无转置) 矩阵 $\boldsymbol{X}^* \in C^{m\times N}$ 组成一新的 $m \times 2N$ 合成数据矩阵，进行信号参数 $\omega_1, \cdots, \omega_p$ 的估计。一种简单的合成数据矩阵为

$$\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Pi}_m \boldsymbol{X}^*] \tag{3.11.2}$$

式中 $\boldsymbol{\Pi}_m$ 为一 $m \times m$ 实交换矩阵，其反对角线上的元素为 1，而其他元素均等于 0，即

$$\boldsymbol{\Pi}_m = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \in R^{m\times m} \tag{3.11.3}$$

由于 $\boldsymbol{\Pi}$ 是对称的置换矩阵，所以它是对合矩阵，即满足

$$\boldsymbol{\Pi}^2 = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{I} \tag{3.11.4}$$

酉 ESPRIT 方法比普通 ESPRIT 方法提高了估计精度，但是由于合成的观测数据矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的列数 N 增加了一倍，而数据长度 N 往往又比较大，因此如何减少合成观测数据矩阵的奇异值分解的计算量就成了酉 ESPRIT 方法的一个关键问题。这个

问题与合成数据矩阵的结构密切相关。减少酉 ESPRIT 方法计算量的一种有效方法是构造中心复共轭对称矩阵。

定义 3.11.1 一复 (数) 矩阵 $\boldsymbol{M} \in C^{p\times q}$ 称为中心复共轭对称矩阵，若

$$\boldsymbol{\Pi}_p \boldsymbol{M}^* \boldsymbol{\Pi}_q = \boldsymbol{M} \tag{3.11.5}$$

中心复共轭对称矩阵也简称中心 Hermitian 矩阵。任何一个中心复共轭对称矩阵都可以映射为一个实矩阵。为此，先介绍 Lee 定义的左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵 [111]。

定义 3.11.2 任何一个复矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 若满足

$$\boldsymbol{\Pi}_p \boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q} \tag{3.11.6}$$

则称其为左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵。

例如，根据定义 3.11.2 容易验证：酉矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \mathrm{j}\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{\Pi}_n & -\mathrm{j}\boldsymbol{\Pi}_n \end{bmatrix} \tag{3.11.7}$$

$$\boldsymbol{Q}_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & \mathrm{j}\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \sqrt{2} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Pi}_n & \boldsymbol{0} & -\mathrm{j}\boldsymbol{\Pi}_n \end{bmatrix} \tag{3.11.8}$$

分别是偶次阶和奇次阶的左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵。实际上，任何一个左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 左乘一任意的实矩阵 $\boldsymbol{R}$ 后，均可以得到一个新的左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵，即每一个 $\boldsymbol{RQ}$ 都是左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵。

注意，左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵本身仍然是复矩阵，但是通过双射映射，却可以把它变成一个真正的实矩阵，这就是为什么把满足式 (3.11.6) 的复矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 称为左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵的原因。下面的定理描述了如何将一个中心复共轭对称矩阵通过双射映射转变为一实矩阵。

定理 3.11.1[111] 令 $\boldsymbol{T}_p$ 和 $\boldsymbol{U}_q$ 分别表示 $p\times p$ 维和 $q\times q$ 维的任意非奇异的左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵，则双射映射

$$\phi(\boldsymbol{M})\text{: } \boldsymbol{M} \mapsto \boldsymbol{T}_p^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_q \tag{3.11.9}$$

将所有 $p\times q$ 维中心复共轭对称矩阵集合映射为相同维数的实矩阵集合。

定理 3.11.1 中的符号 $\phi(\boldsymbol{M})$ 表示复矩阵 $\boldsymbol{M}$ 经双射映射后变成的实矩阵函数。

这一定理可用来计算中心复共轭对称矩阵 $\boldsymbol{M} \in C^{p\times q}$ 的奇异值分解 (SVD)。

推论 3.11.1 令 $\boldsymbol{M}$ 是中心复共轭对称矩阵，并假定实矩阵函数 $\phi_Q(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{Q}_p^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_q \in R^{p\times q}$ 的奇异值分解为 $\phi_Q(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{U}_\phi\boldsymbol{\Sigma}_\phi\boldsymbol{V}_\phi$，其中矩阵 $\boldsymbol{Q}_p$ 和 $\boldsymbol{Q}_q$ 为

酉矩阵，并且是左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵。于是，复矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{Q}_p\boldsymbol{U}_\phi)\boldsymbol{\Sigma}_\phi(\boldsymbol{V}_\phi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_q^{\mathrm{H}}) \tag{3.11.10}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 的左和右奇异向量组成的矩阵都是左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵。

证明 由于 $\boldsymbol{Q}_p$ 和 $\boldsymbol{Q}_q$ 是非奇异的左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵，所以双射映射 $\boldsymbol{Q}_p\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_q$ 将复矩阵 $\boldsymbol{M}$ 映射为实矩阵函数 $\phi_Q(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{Q}_p^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{Q}_q$。由奇异值分解 $\phi_Q(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{U}_\phi\boldsymbol{\Sigma}_\phi\boldsymbol{V}_\phi^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{Q}_p^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_q$ 直接可得到式 (3.11.10)。另一方面，由于实矩阵 $\phi_Q(\boldsymbol{M})$ 的左和右奇异向量组成的矩阵 $\boldsymbol{U}_\phi$ 和 $\boldsymbol{V}_\phi$ 都是实的，而 $\boldsymbol{Q}_p$ 和 $\boldsymbol{Q}_q$ 又都是左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实的，所以矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的左和右奇异向量组成的矩阵 $\boldsymbol{Q}_p\boldsymbol{U}_\phi$ 和 $\boldsymbol{Q}_q\boldsymbol{V}_q$ 都是左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实矩阵。 ■

在实际应用中，观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 通常是一个复矩阵，而不是中心复共轭对称矩阵。因此，推论 3.11.1 不能直接对观测数据矩阵应用。换句话说，在应用推论 3.11.1 之前，必须先把一般的复观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 变成中心复共轭对称矩阵，然后通过双射映射将中心复共轭对称矩阵再映射为实矩阵函数。这样一来，就可以使用推论 3.11.1 获得观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的奇异值分解。显然，如果只是机械地按照式 (3.11.2) 构造合成的观测数据矩阵 $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\Pi}_m\boldsymbol{X}^*]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{Z}$ 将不会是中心复共轭对称的。Haardt 和 Nossek[83] 提出用

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\Pi}_m\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\Pi}_N] \in C^{m\times 2N} \tag{3.11.11}$$

构造合成的观测数据矩阵。容易验证，这一数据矩阵既达到了数据长度加倍的目的，又是一个中心复共轭对称矩阵。于是，根据定理 3.11.1 知，双射映射

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\boldsymbol{M}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_Q([\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\Pi}_m\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\Pi}_N]) \\ &= Q_m^H[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\Pi}_m\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\Pi}_N]Q_{2N}\end{aligned} \tag{3.11.12}$$

为实矩阵函数。现在的问题是如何选择左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实的酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_m$ 和 $\boldsymbol{Q}_{2N}$，由式 (3.11.12) 得到一个实矩阵 $\mathcal{T}(\boldsymbol{X})$。

考虑一种最简单的选择：按照式 (3.11.7) 或式 (3.11.8) 构造左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实的酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_m$ 和 $\boldsymbol{Q}_{2N}$。相对应地，将观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 分块为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \tag{3.11.13}$$

式中 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 具有相同的维数。显然，若观测数据矩阵 $\boldsymbol{X} \in C^{m\times N}$ 的行数 m 为偶数，则式 (3.11.13) 的分块将不包含行向量 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$。

将选择好的左 $\boldsymbol{\Pi}$ 实的酉矩阵 $\boldsymbol{Q}_m$ 和 $\boldsymbol{Q}_{2N}$ 连同按照式 (3.11.13) 分块的观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 一起代入式 (3.11.12)，并进行有关运算后，即可得到所期望的实矩阵

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{M})=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{X}_2^*) & -\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{X}_2^*)\\ \sqrt{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}) & -\sqrt{2}\mathrm{Im}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}})\\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{X}_2^*) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{X}_2^*)\end{bmatrix}\in R^{m\times 2N} \tag{3.11.14}$$

式中 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})$ 分别表示复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实部与虚部。和矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的分块类似，若 m 为偶数，则式 (3.11.14) 不得有中间的行向量。显然，实矩阵 $\mathcal{T}(\boldsymbol{X})$ 的实际计算只需要 $m\times 2N$ 次实数加法。

一旦利用式 (3.11.14) 和观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 直接得到双射映射的实矩阵 $\mathcal{T}(\boldsymbol{X})$，即可计算其奇异值分解，再由式 (3.11.10) 得到复观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的奇异值分解。这样一种方法既利用了长度加倍的观测数据，又避免了大列数复矩阵的直接奇异值分解，是获得观测数据矩阵奇异值分解的一种有效方法，其精度也比 $\boldsymbol{X}$ 的直接奇异值分解的精度高。这一有效方法是 Haardt 与 Nossek 于 1995 年提出的 [83]。

事实上，在利用 Haardt 和 Nossek 的有效方法计算复观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的奇异值分解后，又可通过主奇异值和次奇异值的分离，得到与主奇异值对应的左奇异向量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_d$，它们张成信号子空间，其中 d 为主奇异值的个数。最后，对 $\boldsymbol{U}_s=[\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_d]^{\mathrm{T}}$ 应用 ESPRIT 方法 2，便可得到信号参数的估计值。归纳起来，可以得到酉 ESPRIT 算法 [83] 如下。

算法 3.11.1 (酉 ESPRIT 算法)

给定 m 个阵元的观测数据 $x_1(t),\cdots,x_m(t)$，$t=1,\cdots,N$。

步骤 1 利用式 (3.11.1) 构造 $m\times N$ 观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$。

步骤 2 根据式 (3.11.13) 对观测数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 进行分块，然后由式 (3.11.14) 确定实矩阵 $\mathcal{T}(\boldsymbol{X})$，其中 $\boldsymbol{Q}_m$ 和 $\boldsymbol{Q}_{2N}$ 由式 (3.11.7) 或式 (3.11.8) 构造。

步骤 3 计算实矩阵 $\mathcal{T}(\boldsymbol{M})$ 的奇异值分解 $\mathcal{T}(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，确定其主奇异值个数 p (有效秩)。

步骤 4 计算合成的中心复共轭对称矩阵 $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{Q}_m\boldsymbol{U})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_{2N}^{\mathrm{H}})$，从这一奇异值分解形式得到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的左奇异矩阵 $\boldsymbol{U}_M=\boldsymbol{Q}_m\boldsymbol{U}$。矩阵 $\boldsymbol{U}_M$ 的前 p 列组成子矩阵 $\boldsymbol{U}_s$，它的列向量张成中心复共轭对称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的信号子空间。

步骤 5 对矩阵 $\boldsymbol{U}_s$ 使用基本 ESPRIT 算法 2 的步骤 3 和 4，得到 DOA 估计。

总结知，对复观测数据使用 ESPRIT 方法时，利用共轭的观测数据可以使观测数据等效增加一倍，有利于提高信号参数的估计精度。通过构造中心复共轭对称的观测数据矩阵 (“虚拟”，无需实际计算)，可以将复矩阵的奇异值分解转换成一实矩阵的奇异值分解。因此，酉 ESPRIT 方法是一种计算有效的复数 ESPRIT 方法。

本章小结

本章从不同的角度介绍了现代功率谱估计的一些主要方法：

- ARMA 谱估计是以信号的差分模型为基础的现代谱估计；
- Burg 的最大熵谱估计是来源于信息论的现代谱估计，它在不同的约束条件下，分别与 AR 谱估计和 ARMA 谱估计等价；
- Pisarenko 谐波分解是一种以谐波信号为特定对象的谱估计方法，它将谐波频率的估计转化为信号相关矩阵的特征值分解；
- 扩展 Prony 方法是一种利用复谐波模型拟合复信号的方法；
- MUSIC 方法是一种估计信号空间参数的现代谱估计方法，它将功率谱推广为空间谱，是最早问世的子空间方法；
- ESPRIT 方法是一种估计信号空间参数的旋转不变技术，虽然未使用任何谱的概念，但却可以达到谐波频率估计的目的。其基本思想是将谐波频率的估计转变为矩阵束的广义特征值分解。

习　题

3.1　令 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是满足下列差分方程的平稳随机过程：

$$x(t)-\alpha x(t-1)=w(t),\qquad \{w(t)\}\sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$
$$y(t)-\alpha y(t-1)=x(t)+u(t),\qquad \{u(t)\}\sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

式中 $|\alpha|<1$，且 $\{w(t)\}$ 和 $\{u(t)\}$ 不相关。求 $\{y(t)\}$ 的功率谱。

3.2　假定输入信号 $\{x(t)\}$ 是一个零均值的高斯白噪声，其功率谱为 $P_x(f)=N_0$，且线性系统的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求输出 $y(t)=x(t)*h(t)$ 的功率谱及协方差函数。

3.3　已知一无线信道的传递函数由下式描述：

$$H(f)=K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau_0},\qquad \tau_0=r/c$$

式中 r 为传播距离，c 为光速。这样的信道称为无弥散信道 (nondispersive channel)。现在假定发射信号为

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \phi)$$

式中 ϕ 是一在 $[-\pi, \pi]$ 内均匀分布的随机变量。令 $y(t)$ 是发射信号 $x(t)$ 经过无弥散信道后，为接收机所接收的信号。接收机端存在高斯白噪声 $n(t)$，其均值为零、功率谱密度为 N_0，并且加性噪声 $n(t)$ 与发射信号 $x(t)$ 独立。求接收机接收信号 $y(t)$ 的功率谱 $P_y(f)$ 以及发射信号与接收信号之间的互功率谱 $P_{xy}(f)$。

3.4 一随机信号的功率谱密度为

$$P(\omega) = \frac{1.25 + \cos\omega}{1.0625 + 0.5\cos\omega}$$

若将这一功率谱看作是被具有单位功率谱的白噪声所激励的线性因果、最小相位系统 $H(z)$ 的输出的功率谱，求该线性系统 $H(z)$。

3.5 一随机信号 $x(n)$ 的功率谱为 ω 的有理式：

$$P(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 1}$$

若将信号 $x(n)$ 视为线性因果、最小相位系统 $H(z)$ 被单位功率谱的白噪声激励的输出，试确定该系统。

3.6 离散时间的二阶 AR 过程由差分方程

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + w(n)$$

描述，式中 $w(n)$ 是一零均值、方差为 σ_w^2 的白噪声。证明 $x(n)$ 的功率谱为

$$P_x(f) = \frac{\sigma_w^2}{1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1(1-a_2)\cos(2\pi f) - 2a_2\cos(4\pi f)}$$

3.7 二阶滑动平均过程由

$$x(n) = w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2), \quad \{w(n)\} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

定义，式中 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 表示正态分布，其均值为 0，方差为 σ^2。求 $x(n)$ 的功率谱。

3.8 已知随机过程 $\{y(t)\}$ 是一 MA(2) 过程，其差分模型为

$$y(t) = w(t) + 1.5w(t-1) - w(t-2)$$

式中 $\{w(t)\}$ 是一个均值为 0、方差 $\sigma_w^2 = 1$ 的高斯白噪声过程，求 $y(t)$ 的另一等价 MA 模型。

3.9　令 $x(t)$ 是一零均值的未知随机过程，其自相关函数的前三个值为 $R_x(0)=2, R_x(1)=0$ 和 $R_x(2)=-1$。在这种情况下，我们能够用一个 ARMA(1,1) 模型来拟合它吗？

3.10　误差功率定义为

$$P_m(r_m)=\frac{1}{2}\mathrm{E}\{|e^{\mathrm{f}}_{m-1}(n)+r_m e^{\mathrm{b}}_{m-1}(n-1)|^2+ \\ |r^*_m e^{\mathrm{f}}_{m-1}(n-1)+e^{\mathrm{b}}_{m-1}(n-1)|^2\}$$

(1) 求 $\min\limits_{r_m}[P_m(r_m)]$；

(2) 证明

$$r_m=\frac{-2\sum\limits_{n=m+1}^{N} e^{\mathrm{f}}_{m-1}(n)e^{\mathrm{b}*}_{m-1}(n-1)}{\sum\limits_{n=m+1}^{N}\left[|e^{\mathrm{f}}_{m-1}(n)|^2+|e^{\mathrm{b}}_{m-1}(n-1)|^2\right]},\quad m=1,2,\cdots$$

(3) 证明 $|r_m|<1$ 对 $m=1,2,\cdots$ 恒成立。

3.11　若前、后向预测误差定义为

$$e^{\mathrm{f}}_m(n)=\sum_{k=0}^{m}a_m(k)x(n-k)$$
$$e^{\mathrm{b}}_m(n)=\sum_{k=0}^{m}a^*_{m-k}(k)x(n-k)$$

利用 Burg 递推公式证明

(1) $e^{\mathrm{f}}_m(n)=e^{\mathrm{f}}_{m-1}(n)+r_m e^{\mathrm{b}}_{m-1}(n-1)$；

(2) $e^{\mathrm{b}}_m(n)=r^*_m e^{\mathrm{f}}_{m-1}(n)+e^{\mathrm{b}}_{m-1}(n-1)$。

3.12　一观测数据为

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,\cdots,N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

现在使用 Prony 方法对 $x(n)$ 建模，使得 $x(n)$ 是只有一个极点和一个零点的线性时不变滤波器 $H(z)$ 的单位冲激响应。求滤波器传递函数 $H(z)$ 的表达式，并写出 $N=21$ 时的 $H(z)$。

3.13　已知一观测数据向量 $\boldsymbol{x} = [1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^N]^{\mathrm{T}}$，其中 $|\alpha| < 1$。假定采用 Prony 方法拟合此数据，并且滤波器传递函数为 $H(z) = \frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}}$，求系数 a_1 和 b_0，并写出 $H(z)$ 的具体形式。

3.14　抽头延迟线的输出由

$$y(k) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}(k)$$

给出，式中

$$\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{x}(k) = [x(k), x(k-1), \cdots, x(k-n)]^{\mathrm{T}}$$

令

$$\boldsymbol{R}_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

式中

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

如果输出序列 $\{y(k)\}$ 的均方值为

$$J_a = \frac{1}{2}\mathrm{E}\{y^2(k)\}$$

证明：

(1) 在条件 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1$ 的约束下，使 J_a 最小化等价于

$$J_w = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i^2 \lambda_i$$

的最小化，其中

$$\sum_{i=0}^{n} w_i^2 = 1 \quad 和 \quad \boldsymbol{w} = [w_0, w_1, \cdots, w_n]^{\mathrm{T}}$$

且 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$。

(2) 若取 $\boldsymbol{w} = [\pm 1, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$，则使 J_a 最小化的最优向量 $\boldsymbol{a} = \pm \boldsymbol{a}_0$，其中 $\boldsymbol{a}_0$ 是矩阵 $\boldsymbol{R}_x$ 相对于最小特征值 λ_0 的特征向量。

3.15　考虑无线通信中的一个码分多址 (CDMA) 系统，它共有 K 个用户[187]。其中，用户 1 为期望用户。一接收机接收所有 K 个用户发射的信号，其接收信号的向量形式由下式给出：

$$\boldsymbol{y}(n) = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{y}_k(n) = \boldsymbol{h}_1 w_1(n) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{v}(n)$$