

式中 $w_1(n)$ 是期望用户发射的比特信号, 它是我们希望检测的, 且 h_1 是期望用户的等价特征波形向量, 它是已知的; 而 H 和 $w(n)$ 分别为所有其他用户 (简称干扰用户) 的特征波形向量组成的矩阵和干扰比特向量。假定信道的加性噪声为高斯白噪声, 各个噪声分量的均值都等于零, 方差均为 σ^2 。

(1) 设计一最小方差接收机 f , 使得接收机输出

$$\hat{w}_1(n) = f^T y(n)$$

能够在满足约束条件

$$f^H h_1 = 1$$

的同时, 与 $w_1(n)$ 之间的均方误差为最小。求最小方差接收机 f 的表达式。

(2) 若期望用户的等价特征波形向量 h_1 为

$$h_1 = C_1 g_1$$

式中

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_1(0) \\ c_1(P-1) & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & c_1(P-1) \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ 0 \\ g_1(L) \end{bmatrix}$$

这里 $c_1(0), \dots, c_1(P-1)$ 是期望用户的扩频码, 而 $g_1(l)$ 代表第 l 条传输路径的参数。试设计一最小方差无畸变 (MVDR) 波束形成器 g , 并证明它恰好是矩阵束 $(C_1^H R_y C_1, C_1^H C_1)$ 与最小广义特征值对应的广义特征向量。

3.16 考虑 M 个实谐波信号的 Pisarenko 谐波分解的下列推广^[105]。令噪声子空间的维数大于 1, 于是张成噪声子空间的矩阵 V_n 的每一个列向量的元素都满足

$$\sum_{k=0}^{2M} v_k c^{j\omega_i k} = \sum_{k=0}^{2M} v_k e^{-j\omega_i k} = 0, \quad 1 \leq i \leq M$$

令 $\bar{p} = V_n \alpha$ 表示 V_n 的列向量的非退化线性组合。所谓非退化, 乃是指由向量 $\bar{p} = [\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{2M}]^T$ 的元素构造的多项式 $p(z)$ 至少具有 $2M$ 阶, 即 $p(z) = \bar{p}_0 + \bar{p}_1 z + \dots + \bar{p}_{2M} z^{2M}$, $\bar{p}_{2M} \neq 0$ 。于是, 这一多项式也满足式 (题 3.14)。这意味着, 所有谐波频率均可由多项式 $p(z)$ 位于单位圆上的 $2M$ 个根求出。现在希望选择系数向量 α 满足条件: $p_0 = 1$ 和 $\sum_{k=1}^K p_k^2 = \min$ 。

(1) 令 $\mathbf{v}^T$ 是矩阵 $\mathbf{V}_n$ 的第一行, 而 $\mathbf{V}$ 是由 $\mathbf{V}_n$ 的其他所有行组成的矩阵。若 $\mathbf{p}$ 是由 $\bar{\mathbf{p}}$ 除第一个元素以外的其他元素组成的向量, 试证明

$$\boldsymbol{\alpha} = \arg \min \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha}$$

约束条件为 $\mathbf{v}^T \boldsymbol{\alpha} = 1$ 。

(2) 利用 Lagrange 乘子法证明约束优化问题的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \frac{(\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{v}} \\ \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{V} (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{v}}\end{aligned}$$

3.17 加性噪声向量 $\mathbf{e}(t) = [e_1(t), \dots, e_m(t)]^T$ 的每个元素 $e_i(t)$ 都是零均值的复白噪声, 并且具有相同的方差 σ^2 。假定这些复白噪声相互统计不相关, 证明噪声向量满足以下条件:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{e}(n)\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^H(n)\} = \sigma^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^T(n)\} = \mathbf{O}$$

式中 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{O}$ 分别为单位矩阵和零矩阵。

3.18 假定仿真的观测数据由

$$x(n) = \sqrt{20} \sin(2\pi 0.2n) + \sqrt{2} \sin(2\pi 0.213n) + w(n)$$

产生, 其中 $w(n)$ 是一高斯白噪声, 其均值为 0, 方差为 1, 并取 $n = 1, \dots, 128$ 。试用一般的最小二乘方法和 SVD-TLS 方法估计观测数据的 ARMA 模型的 AR 参数, 并估计正弦波的频率。在计算机仿真中, 运行最小二乘方法时, 取 AR 阶数分别等于 4 和 6; 而在执行 SVD-TLS 方法时, 假定 AR 阶数未知。计算机仿真至少独立运行 20 次, 要求完成计算机仿真实验报告, 其主要内容包括:

- (1) 谐波恢复的基本理论与方法;
- (2) AR 参数和正弦波频率估计值的统计结果 (均值和离差);
- (3) 讨论使用 SVD 确定样本自相关矩阵有效秩的优点和注意事项。

3.19 观测数据同习题 3.18, 编写 MUSIC 方法的计算机程序, 并进行谐波恢复的计算机仿真实验, 统计 20 次独立实验的估计结果。

3.20 分别编写两种 ESPRIT 方法 (算法 3.10.1 和算法 3.10.3) 的一般最小二乘和 SVD-TLS (算法 3.10.2) 程序版本, 并使用习题 3.18 的观测数据进行谐波恢复的计算机仿真实验, 并统计 20 次独立实验的估计结果。

第 4 章 自适应滤波器

滤波器是一种以物理硬件或计算机软件形式，从含噪声的观测数据中抽取信号的装置。滤波器可以实现滤波、平滑和预测等信息处理的基本任务。如果滤波器输出端的被滤波、被平滑或被预测的量是滤波器输入的线性函数，则称之为线性滤波器；否则称为非线性滤波器。若滤波器的冲激响应是无穷长的，便称之为无限冲激响应 (IIR) 滤波器，而冲激响应有限长的滤波器叫做有限冲激响应 (FIR) 滤波器。如果滤波器是在时间域、频率域或空域实现，则分别称之为时域滤波器、频域滤波器或空域滤波器。“信号与系统”和“数字信号处理”等课程主要是在频率域讨论滤波器。本书与之不同，主要在时域和空域研究滤波器：第 3 章介绍了几种空域滤波器，本章将重点关注时域滤波器。

在实时信号处理中，往往希望滤波器在实现滤波、平滑或预测等任务时，能够跟踪和适应系统或环境的动态变化，这就需要 (时域) 滤波器的参数可以随时间作简单的变化或更新，因为复杂的运算不符合实时快速处理的要求。换言之，滤波器的参数应该可以用递推方式自适应更新。这类滤波器统称为自适应滤波器。

在本章中，我们将首先讨论两种常用的最优滤波器——匹配滤波器和 Wiener 滤波器，然后集中介绍 Kalman 滤波器和 Wiener 滤波器的各种自适应实现算法。对任何一种自适应滤波器而言，自适应算法本身固然重要，但算法的统计性能尤其是它跟踪系统或环境动态变化的能力，以及它在实际中的应用也同样重要，它们构成了本章的主要内容。

4.1 匹配滤波器

粗略地讲，滤波器就是信号抽取器，它的作用是从被噪声污染的信号中抽取出原来的信号。当然，信号的抽取应该满足某种优化准则。连续时间的滤波器有两种最优设计准则。一种准则是：使滤波器的输出达到最大的信噪比，称为匹配滤波器。另一种是使输出滤波器的均方估计误差为最小，这就是 Wiener 滤波器。本节介绍匹配滤波器，4.2 节讨论连续时间的 Wiener 滤波器。

4.1.1 匹配滤波器

令接收或观测信号由下式给出:

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (4.1.1)$$

式中, $s(t)$ 为已知的信号; $n(t)$ 为零均值的平稳噪声。注意, 加性噪声 $n(t)$ 可以是白色的, 也可以是有色的。

令 $h(t)$ 是滤波器的时不变冲激响应函数, 我们的目标是设计滤波器的冲激响应函数 $h(t)$, 使得滤波器输出的信噪比为最大。令滤波器的结构如图 4.1.1 所示。

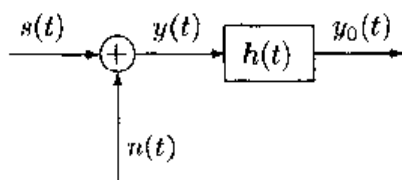


图 4.1.1 线性连续时间滤波器

由图知, 滤波器的输出可以表示为

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)y(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)[s(\tau) + n(\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)s(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau \\ &\stackrel{\text{def}}{=} s_0(t) + n_0(t) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

式中

$$s_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)s(\tau)d\tau \quad (4.1.3a)$$

$$n_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau \quad (4.1.3b)$$

分别是滤波器输出中的信号分量和噪声分量。由上述定义式可以看出, 信号分量和噪声分量实际上就是信号和加性噪声分别通过滤波器之后的输出。

滤波器在 $t = T_0$ 时的输出信噪比定义为

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{输出在 } t = T_0 \text{ 时的瞬时信号功率}}{\text{输出噪声的平均功率}} \\ &= \frac{s_0^2(T_0)}{E\{n_0^2(t)\}} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

对式 (4.1.3a) 应用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)Y(\omega)d\omega \quad (4.1.5)$$

则输出信号可以重新写作

$$s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (4.1.6)$$

式中

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dT \quad (4.1.7)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dT \quad (4.1.8)$$

分别是滤波器的传递函数和信号的频谱。

由式 (4.1.6), 可以得到输出信号在 $t = T_0$ 时的瞬时功率

$$s_0^2(T_0) = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega T_0}d\omega \right|^2 \quad (4.1.9)$$

由式 (4.1.3b) 又可得到输出噪声的平均功率

$$E\{n_0^2(t)\} = E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau\right]^2\right\} \quad (4.1.10)$$

令 $P_n(\omega)$ 是加性噪声 $n(t)$ 的功率谱密度, 则输出噪声的功率谱密度为

$$P_{n_0}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_n(\omega) \quad (4.1.11)$$

因此, 输出噪声的平均功率可以写作

$$E\{n_0^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_0}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 P_n(\omega)d\omega \quad (4.1.12)$$

将式 (4.1.9) 和式 (4.1.12) 代入输出信噪比定义式 (4.1.4) 后, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)^2 &= \frac{\left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T_0} d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 P_n(\omega) d\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(H(\omega) \sqrt{P_n(\omega)}\right) \left(\frac{S(\omega)}{\sqrt{P_n(\omega)}}\right) e^{j\omega T_0} d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 P_n(\omega) d\omega} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

回顾 Cauchy-Schwartz 不等式

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx\right] \quad (4.1.14)$$

等号成立当且仅当 $f(x) = cg^*(x)$, 其中 c 是任意复常数, 下面取 $c = 1$.

在式 (4.1.14) 中令

$$f(x) = H(\omega) \sqrt{P_n(\omega)} \quad \text{和} \quad g(x) = \frac{S(\omega)}{\sqrt{P_n(\omega)}} e^{j\omega T_0}$$

将这些代换应用于式 (4.1.13), 则有

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 P_n(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{P_n(\omega)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 P_n(\omega) d\omega} \quad (4.1.15)$$

或简化为

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{P_n(\omega)} d\omega \quad (4.1.16)$$

将式 (4.1.16) 中等号成立时的滤波器传递函数记作 $H_{\text{opt}}(\omega)$, 由 Cauchy-Schwartz 不等式中等号成立的条件知,

$$H_{\text{opt}}(\omega) \sqrt{P_n(\omega)} = \left[\frac{S(\omega)}{\sqrt{P_n(\omega)}} \right]^* e^{-j\omega T_0} = \frac{S^*(\omega)}{\sqrt{P_n^*(\omega)}} e^{-j\omega T_0}$$

即

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{S(-\omega)}{P_n(\omega)} e^{-j\omega T_0} \quad (4.1.17)$$

式中 $S(-\omega) = S^*(\omega)$.

当滤波器的传递函数取式 (4.1.17) 的形式时, 式 (4.1.16) 取等式, 即滤波器输出的最大信噪比为

$$\text{SNR}_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{P_n(\omega)} d\omega \quad (4.1.18)$$

在输出信噪比最大化的意义上讲, 式 (4.1.17) 定义的滤波器为最优线性滤波器。因此, 式 (4.1.17) 所示的传递函数 $H_{\text{opt}}(\omega)$ 是线性最优滤波器的传递函数。

讨论加性噪声的下列两种情况有助于我们更深入地理解线性最优滤波器。

1. 白噪声情况下的最优滤波——匹配滤波器

当加性噪声 $n(t)$ 是具有零均值和单位方差的白噪声时, 由于其功率谱密度 $P_n(\omega) = 1$, 故式 (4.1.17) 简化为

$$H_0(\omega) = S(-\omega)e^{-j\omega T_0} \quad (4.1.19)$$

从而有 $|H_0(\omega)| = |S^*(\omega)| = |S(\omega)|$ 。换言之, 滤波器达到最大输出信噪比时, 滤波器的幅频特性 $|H(\omega)|$ 与信号 $s(t)$ 的幅频特性 $|S(\omega)|$ 相等, 或者说, 二者相“匹配”。因此, 常将白噪声情况下使信噪比最大的线性滤波器 $H_0(\omega)$ 称为匹配滤波器。

对式 (4.1.19) 两边作 Fourier 反变换, 得匹配滤波器 $H_0(\omega)$ 的冲激响应

$$h_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(-\omega)e^{-j\omega T_0}e^{j\omega t}d\omega$$

作变量代换 $\omega' = -\omega$ 后, 上式变为

$$h_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega')e^{j\omega'(T_0-t)}d\omega' = s(T_0 - t) \quad (4.1.20)$$

即匹配滤波器的冲激响应 $h_0(t)$ 是信号 $s(t)$ 的一镜像信号。

2. 有色噪声情况下的最优滤波——广义匹配滤波器

令 $w(t)$ 为一滤波器, 并且其传递函数为

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{P_n(\omega)}} \quad (4.1.21)$$

则当有色噪声 $n(t)$ 作为滤波器 $W(\omega)$ 的输入时, 输出信号 $\tilde{n}(t)$ 的功率谱密度为

$$P_{\tilde{n}}(\omega) = |W(\omega)|^2 P_n(\omega) = 1 \quad (4.1.22)$$

因此, 式 (4.1.21) 所示滤波器 $W(\omega)$ 是有色噪声的“白化”滤波器。此时, 可以将式

(4.1.17) 写作

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(\omega) &= \frac{S^*(\omega)}{P_n(\omega)} e^{-j\omega T_0} \\ &= W(\omega) [S^*(\omega) W^*(\omega) e^{-j\omega T_0}] \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

不妨令 $\tilde{S}(\omega) = S(\omega)W(\omega)$, 然后对其两边作 Fourier 逆变换, 则有 $\tilde{s}(t) = s(t) * w(t)$, 即 $\tilde{s}(t)$ 是应用白化滤波器 $w(t)$ 对原信号 $s(t)$ 的滤波结果, $H_0(\omega) = \tilde{S}^*(\omega)e^{-j\omega T_0}$ 则可以视为对滤波后的观测过程 $\tilde{y}(t)$ 抽取信号的滤波器, 其中

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= y(t) * w(t) \\ &= [s(t) + n(t)] * w(t) \\ &= s(t) * w(t) + n(t) * w(t) \\ &= \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t) \end{aligned}$$

不同的是, $\tilde{n}(t) = n(t) * w(t)$ 已变成了白噪声, 所以 $H_0(\omega)$ 是匹配滤波器。因此, 有色噪声情况下使信噪比最大的线性滤波器 $H_{\text{opt}}(\omega)$ 由白化滤波器 $W(\omega)$ 和匹配滤波器 $H_0(\omega)$ 级联而成。鉴于此, 常把 $H_{\text{opt}}(\omega)$ 称为广义匹配滤波器, 其工作原理如图 4.1.2 所示。

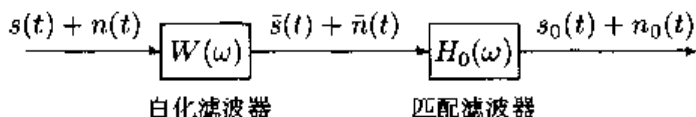


图 4.1.2 广义匹配滤波器的工作原理

例 4.1.1 已知原信号是一谐波过程:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t), \quad f_c = \frac{1}{T}$$

而加性噪声为有色噪声, 其功率谱为

$$P_n(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

求使信噪比最大的线性最优滤波器的冲激响应。

解 由于

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t) = \frac{A}{2} [e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]$$

故谐波信号 $s(t)$ 的频谱

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dT \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j2\pi(f-f_c)t} + e^{-j2\pi(f+f_c)t}] dT \\ &= \frac{A}{2} [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] \end{aligned}$$

从而有

$$S(-f) = \frac{A}{2} [\delta(-f-f_c) + \delta(-f+f_c)] = \frac{A}{2} [\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)]$$

这里利用了 δ 函数的性质 $\delta(-x) = \delta(x)$ 。于是, 使信噪比最大的最优线性滤波器 $H_{\text{opt}}(f)$ 由式 (4.1.17) 给出, 其冲激响应由式 (4.1.20) 确定, 即有

$$\begin{aligned} h_{\text{opt}}(t) &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)]}{(1+4\pi^2 f^2)^{-1}} e^{-j2\pi f(T-t)} df \\ &= \frac{A}{2} (1+4\pi^2 f_c^2) [e^{j2\pi f_c(T-t)} + e^{-j2\pi f_c(T-t)}] \\ &= A(1+4\pi^2 f_c^2) \cos[2\pi f_c(T-t)] \end{aligned}$$

4.1.2 匹配滤波器的性质

由于匹配滤波器在很多工程问题中都有重要的应用, 所以有必要了解它的重要性质。

性质 1 在所有线性滤波器中, 匹配滤波器输出的信噪比最大, 且 $\text{SNR}_{\text{max}} = \frac{E_s}{N_0/2}$, 它与输入信号的波形以及加性噪声的分布特性无关。

性质 2 匹配滤波器输出信号在 $t = T_0$ 时刻的瞬时功率达到最大。

证明 将式 (4.1.19) 代入式 (4.1.6), 可以求出

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega(t-T_0)} d\omega \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S(\omega_k)|^2 e^{j\omega_k(t-T_0)} \Delta\omega \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j\omega_k(t-T_0)} \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

式中 $\omega_k = k\Delta\omega$, 且 $\alpha_k = |S(\omega_k)|^2 \Delta\omega$, 即所有的频率分量 α_k 与 $\Delta\omega$ 同符号。显然, 当 $t = T_0$ 时, 式 (4.1.24) 直接给出

$$s_0(T_0) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \quad (4.1.25)$$

也就是说, 滤波器输出信号的所有不同频率分量 α_k 全部同相, 从而使输出信号的瞬时功率 $|s_0(t)|^2$ 达到最大。■

性质 3 匹配滤波器输出信噪比达到最大的时刻 T_0 应该选取等于原信号 $s(t)$ 的持续时间 T 。

证明 匹配滤波器应该是物理可实现的, 这要求其冲激响应必须满足条件

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ s(T_0 - t), & T \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.26)$$

或等价要求

$$s(t) = 0, \quad t > T_0 \quad (4.1.27)$$

但由于 $s(t)$ 的持续时间为 T , 即

$$s(t) = 0 \quad t > T \quad (4.1.28)$$

比较式 (4.1.27) 与式 (4.1.28), 可知

$$T_0 \geq T$$

通常希望匹配滤波器尽快实现输出信噪比的最大化, 因此选取 $T_0 = T$ 作为最大输出信噪比的时刻。■

注释 1 若选取 $T_0 < T$, 则得到的匹配滤波器将不是物理可实现的。此时, 如果用物理可实现的滤波器去逼近匹配滤波器, 则它在 $T_0 = T$ 时刻的输出信噪比不会最大。

注释 2 若从 T_0 时刻起, 信号均变得很小, 即可使用截至到时间 T_0 的信号来设计匹配滤波器, 这种匹配滤波器是准最优的线性滤波器。

性质 4 匹配滤波器对波形相同而幅值不同的时延信号具有适应性。

证明 设信号 $s_1(t) = As(t - \tau)$ 与原信号 $s(t)$ 具有相同波形, 但幅值不同, 并且在时间上延迟 τ 。显然, $s_1(t)$ 的频谱 $S_1(\omega) = AS(\omega)e^{-j\omega\tau}$ 。因此, 对于 $s_1(t)$ 信号而言, 使输出信噪比在 $t = T'_0$ 时刻达到最大的匹配滤波器的传递函数由下式决定:

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= S_1^*(\omega)e^{-j\omega T'_0} = AS^*(\omega)e^{-j\omega(T'_0 - \tau)} \\ &= AH(\omega)e^{-j\omega[T'_0 - (T_0 + \tau)]} \end{aligned}$$