

式中 $H(\omega)$ 是针对信号 $s(t)$ 的匹配滤波器。若选取 $T'_0 = T_0 + \tau$, 则

$$H_1(\omega) = AH(\omega)$$

由此可见, $s_1(t)$ 和 $s(t)$ 的匹配滤波器形式完全相同, 只是相差一个尺度因子 A , 并且输出信噪比达到最大的时间延迟了一个 τ 而已。这表明, 匹配滤波器对幅度和时延发生变化的信号具有适应性。■

性质 5 匹配滤波器对频移信号不具有适应性。

设 $s_2(t)$ 是 $s(t)$ 的频移信号, 即 $S_2(\omega) = S(\omega + \omega_\alpha)$, 例如, $S(\omega)$ 代表雷达固定目标回波信号的频谱, $S_2(\omega)$ 代表有径向速度的动目标回波的频谱, 则 ω_α 称为 Doppler 频移。由式 (4.1.17) 知, 对应于 $s_2(t)$ 信号的匹配滤波器的传递函数由下式给出:

$$H_2(\omega) = S^*(\omega + \omega_\alpha)e^{-j\omega T_0}$$

令 $\omega' = \omega + \omega_\alpha$, 则

$$H_2(\omega') = S^*(\omega')e^{-j\omega' T_0 - j\omega_\alpha T_0} = H(\omega')e^{j\omega_\alpha T_0}$$

可见, 原信号 $s(t)$ 和频移信号 $s_2(t)$ 的匹配滤波器的传递函数不同, 即匹配滤波器对频移信号不具有适应性。

4.1.3 匹配滤波器的实现

如果已知信号 $s(t)$ 的精确结构, 即可利用式 (4.1.20) 直接确定匹配滤波器的冲激响应, 从而实现匹配滤波。然而, 在许多实际应用中, 只能已知信号的功率谱 $P_s(\omega) = |S(\omega)|^2$ 。在这类情况下, 需要从功率谱中分离出信号的频谱表达式 $S(\omega)$, 然后使用式 (4.1.19) 设计匹配滤波器的传递函数。

另外, 在设计一有色噪声的白化滤波器时, 也往往只知道噪声的功率谱 $P_n(\omega) = |N(\omega)|^2$ 。为了设计白化滤波器 $W(\omega) = \frac{1}{N(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{P_n(\omega)}}$, 也需要分解噪声功率谱, 以便得到噪声的频谱 $N(\omega) = \sqrt{P_n(\omega)}$ 。由功率谱获得频谱的过程称为功率谱的因式分解, 简称谱分解。

对于任何一个平稳信号 $x(t)$, 其功率谱密度 $P_x(\omega) = |X(\omega)|^2$ 一般为有理函数, 即可表示为

$$P_x(\omega) = \alpha^2 \frac{(\omega + z_1) \cdots (\omega + z_n)}{(\omega + p_1) \cdots (\omega + p_m)} \quad (4.1.29)$$

式中 $z_i (i = 1, \cdots, n)$ 和 $p_j (j = 1, \cdots, m)$ 分别称为功率谱的零点和极点。通常约定 $n \leq m$, 并且任意零点不能与极点相约。

由于功率谱是非负的实、偶函数, 即

$$P_x(\omega) = P_x^*(\omega) \quad (4.1.30)$$

可见, $P_x(\omega)$ 的零、极点必定是共轭成对出现的。因此, 功率谱总可以写作

$$P_x(\omega) = \left[\alpha \frac{(j\omega + \alpha_1) \cdots (j\omega + \alpha_q)}{(j\omega + \beta_1) \cdots (j\omega + \beta_p)} \right] \left[\alpha \frac{(-j\omega + \alpha_1) \cdots (-j\omega + \alpha_q)}{(-j\omega + \beta_1) \cdots (-j\omega + \beta_p)} \right] \quad (4.1.31)$$

令 $P_x(\omega)$ 在左半平面上的零、极点组成因式 $P_x^+(\omega)$, 右半平面的零、极点组成因式 $P_x^-(\omega)$, 并且将 $P_x(\omega)$ 位于轴上的零、极点对半分给 $P_x^+(\omega)$ 和 $P_x^-(\omega)$ 。这样一来, 功率谱 $P_x(\omega)$ 即可因式分解为

$$P_x(\omega) = P_x^+(\omega)P_x^-(\omega) \quad (4.1.32)$$

称之为谱分解。

为了使匹配滤波器是物理可实现的, 只要取

$$S(\omega) = P_x^+(\omega) \quad (4.1.33)$$

然后将它代入式 (4.1.19) 即可。类似地, 选择

$$W(\omega) = \frac{1}{P_x^-(\omega)} \quad (4.1.34)$$

即可得到物理可实现的白化滤波器。

4.2 连续时间的 Wiener 滤波器

在匹配滤波器中, 接收机必须已知并存储信号的精确结构或功率谱, 并且积分区间还必须与信号取非零值的区间同步。遗憾的是, 有时很难单独已知信号的结构或功率谱, 而一旦信号在传输过程中发生传播延迟、相位漂移或频率漂移, 积分区间与信号区间的同步也会导致误差。在这些情况下, 匹配滤波器的应用便很难获得满意的结果, 甚至是不可能的。这就需要寻求其他的线性最优滤波器。

考虑对观测数据 $y(t) = s(t) + n(t)$ 使用滤波器 $H(\omega)$ 实现信号 $s(t)$ 的估计:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (4.2.1)$$

第2章(参数估计理论)曾经指出过,估计误差 $s(t) - \hat{s}(t)$ 为随机变量,不适合作为一种参数估计器或滤波器的性能评价标准。与估计误差不同,均方误差为确定量,是滤波器性能的主要测度之一。现考虑使均方误差

$$J = E\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\} = E\left\{\left[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]^2\right\} \quad (4.2.2)$$

最小。这就是最小均方误差 (MMSE) 准则。于是,线性最优滤波器的冲激响应可表示为

$$h_{\text{opt}}(t) = \arg \min_{h(t)} E\left\{\left[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]^2\right\} \quad (4.2.3)$$

假定信号 $s(t)$ 和加性噪声 $n(t)$ 均为平稳过程,并且 $s(t)$ 与 $n(t)$ 是联合平稳的,即

$$E\{s(t)s(t-\tau)\} = R_{ss}(\tau)$$

$$E\{n(t)n(t-\tau)\} = R_{nn}(\tau)$$

$$E\{s(t)y(t-\tau)\} = R_{ss}(\tau) + R_{sn}(\tau)$$

$$E\{y(t)y(t-\tau)\} = R_{ss}(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

计算均方误差,得

$$\begin{aligned} J &= E\left\{\left[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\left[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)y(t-\tau_1)d\tau_1\right]\left[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)y(t-\tau_2)d\tau_2\right]\right\} \\ &= E\left\{s^2(t) - s(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)y(t-\tau_1)d\tau_1 - s(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)y(t-\tau_2)d\tau_2 + \right. \\ &\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2\right\} \\ &= E\{s^2(t)\} - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)E\{s(t)y(t-\tau_1)\}d\tau_1 - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)E\{s(t)y(t-\tau_2)\}d\tau_2 + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)E\{y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\ &= R_{ss}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)R_{sy}(\tau_1)d\tau_1 - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)R_{sy}(\tau_2)d\tau_2 + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{yy}(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \\ &= R_{ss}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_{sy}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{yy}(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

式中 $R_{yy}(\tau) = E\{y(t)y(t-\tau)\}$.

最优滤波器冲激响应 $h_{\text{opt}}(t)$ 可以通过令 $\frac{\partial J}{\partial h} = 0$ 得到, 但这一优化过程比较复杂。现在考虑将它转化为另外一个参数的优化^[135]。为此, 令 $h(t)$ 由 $h_{\text{opt}}(t)$ 及一扰动项 $\alpha\Delta h_{\text{opt}}(t)$ 组成, 即

$$h(t) = h_{\text{opt}}(t) + \alpha\Delta h_{\text{opt}}(t) \quad (4.2.5)$$

式中 α 为一标量参数。利用式 (4.2.5), 可以将式 (4.2.4) 写作

$$\begin{aligned} J(\alpha) = & R_{ss}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [h_{\text{opt}}(t) + \alpha\Delta h_{\text{opt}}(t)] R_{sy}(\tau) d\tau + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [h_{\text{opt}}(\tau_1) + \alpha\Delta h_{\text{opt}}(\tau_1)][h_{\text{opt}}(\tau_2) + \alpha\Delta h_{\text{opt}}(\tau_2)] \times \\ & R_{yy}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

显然, 均方误差 $J(\alpha)$ 是 α 、 $h_{\text{opt}}(t)$ 和 $\Delta h_{\text{opt}}(t)$ 三者的函数。现在, 固定 $h_{\text{opt}}(t)$ 和 $\Delta h_{\text{opt}}(t)$, 则当

$$\left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (4.2.7)$$

时, 均方误差函数 $J(\alpha)$ 也能实现最小化。

计算式 (4.2.7), 不难求得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = & -2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta h_{\text{opt}}(\tau) R_{sy}(\tau) d\tau + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\tau_2) \Delta h_{\text{opt}}(\tau_1) R_{yy}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\tau_1) \Delta h_{\text{opt}}(\tau_2) R_{yy}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2\alpha \Delta h_{\text{opt}}(\tau_1) \Delta h_{\text{opt}}(\tau_2) R_{yy}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ = & 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

式 (4.2.8) 成立的条件是 $\alpha = 0$, 注意到该式右边的第二项与第三项实质相等, 故式 (4.2.8) 可简写作

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta h_{\text{opt}}(\tau_2) \left[-R_{sy}(\tau_2) + \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau_2 - \tau_1) h_{\text{opt}}(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau_2 = 0 \quad (4.2.9)$$

由于扰动项 $\Delta h_{\text{opt}}(t)$ 是任意项, 而式 (4.2.9) 应该对所有可能的 $\Delta h_{\text{opt}}(t)$ 都成立, 因此, 式 (4.2.9) 的中括号内的项必定等于 0, 即

$$-R_{sy}(\tau_2) + \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau_2 - \tau_1) h_{\text{opt}}(\tau_1) d\tau_1 = 0$$

其结果是

$$R_{sy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau - \tau_1) h_{\text{opt}}(\tau_1) d\tau_1, \quad -\infty < \tau < \infty \quad (4.2.10)$$

这一方程称为 Wiener-Hopf 积分方程。

式 (4.2.10) 两边取 Fourier 变换, 则有

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{P_{sy}(\omega)}{P_{yy}(\omega)} \quad (4.2.11)$$

这种滤波器称为非因果 Wiener 滤波器, 因为滤波器的冲激响应 $h_{\text{opt}}(\alpha)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取值。注意, 非因果 Wiener 滤波器是物理不可实现的。

任何一个非因果线性系统都可以看作是由因果和反因果两部分组合的。因果部分是物理可实现的, 反因果部分是物理不可实现的。由此, 我们会想到, 从一个非因果 Wiener 滤波器中将因果部分单独分离出来, 就可以得到物理可实现的因果 Wiener 滤波器。

考查

$$H(\omega) = \frac{P_{sy}(\omega)}{P_{yy}(\omega)} \quad (4.2.12)$$

一般说来, 从 $H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$ 中分离出因果部分 $H_{\text{opt}}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$ 是困难的。然而, 若功率谱 $P_{yy}(\omega)$ 是 ω 的有理式函数时, 我们却能够很容易得到因果的 Wiener 滤波器 $H_{\text{opt}}(\omega)$ 。

首先, 将有理式功率谱 $P_{yy}(\omega)$ 分解为

$$P_{yy}(\omega) = A_{yy}^+(\omega) A_{yy}^-(\omega) \quad (4.2.13)$$

式中 $A_{yy}^+(\omega)$ 的零、极点全部位于左半平面, 而 $A_{yy}^-(\omega)$ 的零、极点则全部位于右半平面, 并且位于 ω 轴上的零、极点对半分给 $A_{yy}^+(\omega)$ 和 $A_{yy}^-(\omega)$ 。

然后, 又可以进行下面的分解:

$$\frac{P_{sy}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} = B^+(\omega) + B^-(\omega) \quad (4.2.14)$$

式中 $B^+(\omega)$ 的零、极点全部位于左半平面, 而 $B^-(\omega)$ 的零、极点则全部位于右半平面, 并且位于 ω 轴上的零、极点对半分给 $B^+(\omega)$ 和 $B^-(\omega)$ 。

最后, 将式 (4.2.12) 改写作

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{P_{sy}(\omega)}{A_{yy}^+(\omega)A_{yy}^-(\omega)} \\
 &= \frac{1}{A_{yy}^-(\omega)} \frac{P_{sy}(\omega)}{A_{yy}^-(\omega)} \\
 &= \frac{1}{A_{yy}^+(\omega)} [B^-(\omega) + B^+(\omega)]
 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

显然,

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{B^+(\omega)}{A_{yy}^+(\omega)} \quad (4.2.16)$$

只包含了左半平面的零、极点, 所以它是物理可实现的。

总结以上讨论, 当 $P_{yy}(\omega)$ 为有理式功率谱时, 因果 Wiener 滤波器的设计算法如下:

算法 4.2.1 (因果 Wiener 滤波器设计算法 1)

步骤 1 对 $P_{yy}(\omega)$ 进行式 (4.2.13) 的谱分解。

步骤 2 计算式 (4.2.14)。

步骤 3 用式 (4.2.16) 得到因果 Wiener 滤波器的传递函数 $H_{\text{opt}}(\omega)$ 。

若令 $z = e^{j\omega}$, 并将功率谱密度写成 $P_{sy}(z)$ 和 $P_{yy}(z)$, 则上述算法很容易推广如下:

算法 4.2.2 (因果 Wiener 滤波器设计算法 2)

步骤 1 对 $P_{yy}(z)$ 进行谱分解

$$P_{yy}(z) = A_{yy}^+(z)A_{yy}^-(z) \quad (4.2.17)$$

式中 $A_{yy}^+(z)$ 的零、极点全部位于单位圆内, 而 $A_{yy}^-(z)$ 的零、极点则全部在单位圆外。

步骤 2 计算

$$\frac{P_{sy}(z)}{A_{yy}^-(z)} = B^+(z) + B^-(z) \quad (4.2.18)$$

式中 $B^+(z)$ 的零、极点全部在单位圆内, 而 $B^-(z)$ 则由所有位于单位圆外的零、极点组成。

步骤 3 因果 Wiener 滤波器的传递函数 $H_{\text{opt}}(z)$ 由下式给出:

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{B^+(z)}{A_{yy}^+(z)} \quad (4.2.19)$$

应当指出, 式 (4.2.17) 的分解是功率谱的因式分解, 而式 (4.2.18) 的分解则是功率谱的正和负频率部分的分解。

通过 4.1 节和 4.2 节, 我们看到功率谱的因式分解在匹配滤波器、白化滤波器和因果 Wiener 滤波器设计中起着重要的作用。

4.3 最优滤波理论与 Wiener 滤波器

4.2 节讨论了连续时间的 Wiener 滤波器。在数字信号处理中, 希望滤波器是离散时间的, 以便能够用数字硬件或计算机软件实现。为此, 有必要讨论离散时间信号的最优滤波问题。

4.3.1 线性最优滤波器

考虑图 4.3.1 所示的线性离散时间滤波器。滤波器输入由无穷时间序列 $u(0), u(1), \dots$ 组成, 滤波器的冲激响应也为无穷序列 $w_0, w_1, \dots$ 。令 $y(n)$ 代表滤波器在离散时间 n 时的输出, 希望它是期望响应 $d(n)$ 的估计值。

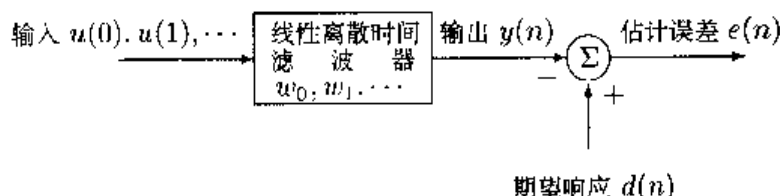


图 4.3.1 线性离散时间滤波器

估计误差 $e(n)$ 定义为期望响应 $d(n)$ 与滤波器输出 $y(n)$ 之差, 即 $e(n) = d(n) - y(n)$ 。对滤波器的要求是使估计误差在某种统计意义下“尽可能小”。为此, 对滤波器有以下约束:

- 滤波器是线性的 (一方面是为了使信号通过滤波器后不致发生“畸变”, 另一方面是为了方便对滤波器的数学分析);
- 滤波器是离散时间的, 这将使滤波器可以利用数字硬件或软件实现。

根据冲激响应是有限长的还是无限长的, 线性离散时间滤波器分为有限冲激响应 (FIR) 滤波器和无限冲激响应 (IIR) 滤波器。由于 FIR 滤波器是 IIR 滤波器的特例, 这里以 IIR 滤波器作为讨论对象。

估计误差在某种统计意义下尽可能小的滤波器称为这一统计意义下的最优滤波器。那么, 如何设计统计优化的准则呢? 最常用的准则是使某个代价函数最小化。

代价函数有多种形式, 最典型的形式有

- (1) 估计误差的均方值;
- (2) 估计误差的绝对值的期望值;
- (3) 估计误差的绝对值的二次或高次幂的期望值.

使估计误差均方值最小化的统计优化准则称为最小均方误差 (minimum mean-squared error, MMSE) 准则, 它是在滤波器、估计器、检测器等的设计中使用最广泛的优化准则。

总结以上讨论, 线性离散时间滤波器的最优设计问题可以表述如下:

设计一线性离散时间滤波器的系数 w_k , 使输出 $y(n)$ 在给定输入样本集合 $u(0), u(1), \dots$ 的情况下给出期望响应 $d(n)$ 的估计, 并且能够使得估计误差 $e(n) = d(n) - y(n)$ 的均方值 $E\{|e(n)|^2\}$ 为最小。

4.3.2 正交性原理

现在考虑图 4.3.1 所示线性离散时间滤波器的最优设计。滤波器在离散时间 n 的输出 $y(n)$ 是输入 $u(k)$ 与滤波器冲激响应 w_k^* 的线性卷积和:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.1)$$

式中 $*$ 表示复数共轭。

假定滤波器输入和期望响应都是广义平稳随机过程的单次实现, 由于期望响应 $d(n)$ 的估计总是伴随有误差, 所以可以定义估计误差为

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (4.3.2)$$

在这里, 考虑使用 MMSE 准则设计最优滤波器。为此, 定义代价函数为下列均方误差:

$$J(n) = E\{|e(n)|^2\} = E\{e(n)e^*(n)\} \quad (4.3.3)$$

式中 E 为统计期望算子。

对于复数输入数据, 滤波器的抽头权 (tap-weight) 系数 w_k 一般也是复数。假定抽头权系数 w_k 有无穷多个, 这种滤波器称为无限冲激响应 (IIR) 滤波器。不妨将抽头权系数分为实部和虚部:

$$w_k = a_k + \mathrm{j}b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.4)$$

定义梯度算符

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j \frac{\partial}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.5)$$

于是, 有

$$\nabla_k J(n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial J(n)}{\partial w_k} = \frac{\partial J(n)}{\partial a_k} + j \frac{\partial J(n)}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.6)$$

为了使代价函数 J 最小, 梯度 $\nabla_k J(n)$ 的所有元素必须同时等于零, 即有

$$\nabla_k J(n) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.7)$$

在这一组条件下, 滤波器在最小均方误差意义下是最优的。

由式 (4.3.2) 和式 (4.3.3), 容易得出

$$\nabla_k J(n) = E \left\{ \frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n) + j \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} e^*(n) + j \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} e(n) \right\} \quad (4.3.8)$$

利用式 (4.3.2) 和式 (4.3.5), 可求出以下偏导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e(n)}{\partial a_k} &= -u(n-k) \\ \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} &= ju(n-k) \\ \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} &= -u^*(n-k) \\ \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} &= -ju^*(n-k) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

将式 (4.3.9) 代入式 (4.3.8), 则有

$$\nabla_k J(n) = -2E\{u(n-k)e^*(n)\} \quad (4.3.10)$$

令 $e_{\text{opt}}(n)$ 表示滤波器工作在最优条件下的估计误差, 由式 (4.3.10) 知, $e_{\text{opt}}(n)$ 应该满足 $\nabla_k J = -2E\{u(n-k)e_{\text{opt}}^*(n)\} = 0$, 或等价写作

$$E\{u(n-k)e_{\text{opt}}^*(n)\} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.11)$$

式 (4.3.11) 表明: 代价函数 J 最小化的充分必要条件是估计误差 $e_{\text{opt}}(n)$ 与输入 $u(0), \dots, u(n)$ 正交。这就是著名的“正交性原理”, 它常作为定理来使用, 是线性最优滤波理论中最重要的定理之一。同时, 它也为衡量一滤波器是否工作在最优条件的检验方法提供了数学基础。

另一方面, 容易验证:

$$\begin{aligned} E\{y(n)e^*(n)\} &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)e^*(n)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* E\{u(n-k)e^*(n)\} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

令 $y_{\text{opt}}(n)$ 代表在最小均方误差意义下工作的最优滤波器所产生的输出, 则由式 (4.3.11) 和式 (4.3.12), 正交性原理也可等价写作

$$E\{y_{\text{opt}}(n)e_{\text{opt}}^*(n)\} = 0 \quad (4.3.13)$$

用文字叙述, 则有: 当滤波器工作在最优条件时, 由滤波器输出定义的期望响应的估计 $y_{\text{opt}}(n)$ 与相应的估计误差 $e_{\text{opt}}(n)$ 彼此正交。这一结果称为正交性原理的引理。

4.3.3 Wiener 滤波器

上面推导了滤波器处于最优工作状态下的充分必要条件 (4.3.11)。将式 (4.3.2) 代入, 式 (4.3.11) 可以改写为

$$E\left\{u(n-k)\left[d^*(n) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{\text{opt},i} u^*(n-i)\right]\right\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3.14)$$

式中 $w_{\text{opt},i}$ 表示最优滤波器冲激响应中的第 i 个系数。将上式展开, 并予以重排, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} w_{\text{opt},i} E\{u(n-k)u^*(n-i)\} &= E\{u(n-k)d^*(n)\} \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

式 (4.3.15) 中的两个数学期望项分别具有以下物理意义:

(1) 数学期望项 $E\{u(n-k)u^*(n-i)\}$ 代表滤波器输入在滞后 $i-k$ 的自相关函数 $R_{u,u}(i-k)$, 即

$$R_{u,u}(i-k) = E\{u(n-k)u^*(n-i)\} \quad (4.3.16)$$

(2) 数学期望项 $E\{u(n-k)d^*(n)\}$ 等于滤波器输入 $u(n-k)$ 与期望响应 $d(n)$ 在滞后 $-k$ 的互相关函数 $R_{u,d}(-k)$, 即

$$R_{u,d}(-k) = E\{u(n-k)d^*(n)\} \quad (4.3.17)$$