上述算法步骤 2 的有关计算公式体现了式 (4.6.35) 中所示的更新关系。例如，左边 $\boldsymbol{c}_{M-1}(n-1)$ 和 $\boldsymbol{a}_M(n-1)$ 合成 $\boldsymbol{a}_M(n)$ 的关系体现在式 (4.6.22)，而 $\boldsymbol{c}_{M-1}(n-1)$ 和 $\boldsymbol{a}_M(n-1)$ 合成 $\boldsymbol{c}_{M+1}(n)$ 的关系则体现在式 (4.6.41) 中。又例，右上所示 $\boldsymbol{c}_{M-1}(n)$ 和 $\boldsymbol{b}_M(n-1)$ 合成 $\boldsymbol{c}_M(n)$ 的关系体现在式 (4.6.42) 及 (4.6.47) 上。

4.7 LMS 自适应格型滤波器

LMS 和 RLS 滤波器同属于横向自适应滤波器，并假定它们的阶数固定。然而，在实际应用中，一横向滤波器的最优阶数往往是未知的，这就需要通过比较不同阶数的滤波器来确定最优的阶数。但是，当改变横向滤波器阶数时， LMS 或 RLS 算法必须重新运行，这显然是不方便的和费时的。那么，在增加滤波器的阶数时，能否利用低一阶滤波器的参数结果呢？格型滤波器提供了解决这一问题的一种有效途径。

格型滤波器最早是 Makhoul 于 1977 年提出的 [123]，所采用的方法当时被称为线性预测的格型方法，后被称为格型滤波器。这种滤波器具有共轭对称的格型结构：前向反射系数是后向反射系数的共轭，其设计准则和 LMS 算法一样是使均方 (预测) 误差为最小，故更确切地说，应该将这种格型滤波器称为 LMS 自适应格型滤波器。

格型滤波器也可使用非对称的结构，即前向和后向反射系数不相同。这种非对称的格型滤波器的设计准则采用最小二乘 (LS) 方法，使预测误差的平方和为最小，称为 LS 自适应格型滤波器。将在 4.8 节和 4.9 节中讨论它。

4.7.1 对称的格型结构

在结构上，LMS 自适应格型滤波器在每一级对前、后向分别采用反射系数 r_m^* 和 r_m，如图 4.7.1 所示。这是一种共轭对称的格型结构，图中，$f_m(n)$ 和 $g_m(n)$ 分别是第 m 级格型滤波器的前向残差和后向残差，而 r_m 称为反射系数。

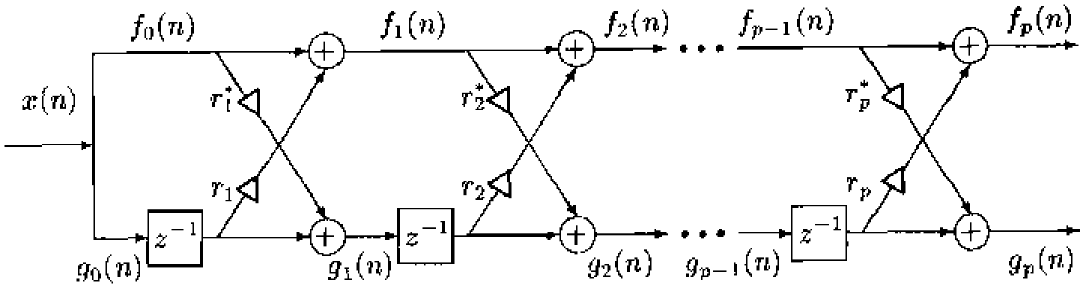

图 4.7.1 LMS 自适应格型滤波器

由图知，n 时刻的前向和后向残差服从以下递推关系:

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + r_m g_{m-1}(n-1) \tag{4.7.1a}$$

$$g_m(n) = r_m^* f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \tag{4.7.1b}$$

其初始值为

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n) \tag{4.7.2}$$

由于 r_m 建立了 $f_m(n)$ 与 $g_{m-1}(n-1)$ 之间的关系，故 r_m 也称偏相关系数。

定义 Z 变换

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n x(n) z^{-n} \tag{4.7.3a}$$

$$F_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n f_m(n) z^{-n} \tag{4.7.3b}$$

$$G_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n g_m(n) z^{-n} \tag{4.7.3c}$$

对式 (4.7.1) 两边作 Z 变换，则有

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + r_m z^{-1} G_{m-1}(z) \tag{4.7.4a}$$

$$G_m(z) = r_m^* F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \tag{4.7.4b}$$

式中

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \tag{4.7.5}$$

定义前向滤波器传递函数

$$A_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m} a_m(i) z^{-i} = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant p \tag{4.7.6a}$$

和后向滤波器传递函数

$$B_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m} b_m(i) z^{-i} = \frac{G_m(z)}{X(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant p \tag{4.7.6b}$$

将式 (4.7.6) 代入式 (4.7.4)，即可得到前、后向滤波器传递函数的递推公式

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + r_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad A_0(z) = 1 \tag{4.7.7a}$$

$$B_m(z) = r_m^* A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \quad B_0(z) = 1 \tag{4.7.7b}$$

当 $m=1$ 时，由式 (4.7.7) 有

$$A_1(z)=A_0(z)+r_1z^{-1}B_0(z)=1+r_1z^{-1}$$

$$B_1(z)=r_1^*A_0(z)+z^{-1}B_0(z)=r_1^*+z^{-1}$$

或写作

$$A_1^*(z)=1+r_1^*z \tag{4.7.8a}$$

$$B_1(z)=z^{-1}(1+r_1^*z)=z^{-1}A_1^*(z) \tag{4.7.8b}$$

注意 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 为 Z 变换算子，故有 $(\alpha z^{-1})^*=\alpha^*z$。

类似地，当 $m=2$ 时，则有

$$\begin{aligned}A_2(z)&=A_1(z)+r_2z^{-1}B_1(z)\\&=1+r_1z^{-1}+r_2z^{-1}(r_1^*+z^{-1})\\&=1+(r_1+r_1^*r_2)z^{-1}+r_2z^{-2}\end{aligned} \tag{4.7.9a}$$

$$\begin{aligned}B_2(z)&=r_2^*A_1(z)+z^{-1}B_1(z)\\&=r_2^*(1+r_1z^{-1})+z^{-1}(r_1^*+z^{-1})\\&=z^{-2}[1+(r_1^*+r_1r_2^*)z+r_2^*z^2]\\&=z^{-2}A_2^*(z)\end{aligned} \tag{4.7.9b}$$

依此类推，可得到前、后向滤波器传递函数的一般关系式为

$$A_m(z)=\sum_{i=0}^{m}a_m(i)z^{-i}=1+\cdots+r_mz^{-m} \tag{4.7.10a}$$

$$\begin{aligned}B_m(z)&=z^{-m}A_m(z^{-1})=\sum_{k=0}^{m}a_m^*(k)z^{-m+k}\\&=\sum_{i=0}^{m}a_m^*(m-i)z^{-i}\end{aligned} \tag{4.7.10b}$$

由式 (4.7.10a) 知

$$\left.\begin{aligned}a_m(0)&=1\\a_m(m)&=r_m\end{aligned}\right\} \tag{4.7.11}$$

为了使前向滤波器是物理可实现的，前向传递函数 $A_m(z)$ 必须是最小相位多项式，即

$$A_m(z)=z^{-m}(z^m+\cdots+r_m)=z^{-m}\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)$$

的零点必须全部位于单位圆内，即 $|z_i| < 1$、$i = 1, \cdots, m$。但 $r_m = \prod_{i=1}^{m} z_i$，故

$$|r_m| = \prod_{i=1}^{m} |z_i| < 1 \tag{4.7.12}$$

这是设计格型滤波器各级反射系数的递推公式时必须遵守的条件，详见 4.7.3 节。

另外，式 (4.7.10b) 表明，后向滤波器的权系数 b_m 与前向滤波器的权系数 a_m 存在以下关系：

$$b_m(i) = a_m^*(m-i), \qquad i = 0, 1, \cdots, m \tag{4.7.13}$$

这说明，只要前向滤波器系数 $a_m(i)$ 已设计出，即可确定后向滤波器的系数 $b_m(i)$。于是，格型滤波器的设计便归结为前向滤波器的设计。

4.7.2 格型滤波器设计准则

现在讨论前向滤波器 $A(z)$ 的设计准则。

式 (4.7.4a) 可等价写作

$$F_m(z) = A_m(z)X(z) \tag{4.7.14}$$

相对应的时域表达式为

$$f_m(n) = \sum_{i=0}^{m} a_m(i)x(n-i) \tag{4.7.15}$$

考虑前向滤波器 $A_m(z)$ 的残差能量

$$\begin{aligned} F_m &= \mathrm{E}\{|f_m(n)|^2\} \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_m(i)a_m^*(j)\mathrm{E}\{x(n-i)x^*(n-j)\} \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_m(i)a_m^*(j)R_x(j-i) \end{aligned} \tag{4.7.16}$$

式中 $R_x(\tau) = \mathrm{E}\{x(n)x^*(n-\tau)\}$ 是滤波器输入信号 $x(n)$ 的相关函数。

值得指出的是，后向滤波器 $B_m(z)$ 的残差能量 G_m 与 F_m 恒等，因为利用式

(4.7.13)，有

$$
\begin{aligned}
G_m &= \mathrm{E}\{|g_m(n)|^2\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\sum_{k=0}^{m} a_m(m-k)x^*(n-k)\sum_{l=0}^{m} a_m^*(m-l)x(n-l)\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_m(i)a_m^*(j)\mathrm{E}\{x(n-m+j)x^*(n-m+i)\} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_m(i)a_m^*(j)R_x(j-i) \\
&= F_m
\end{aligned}
\tag{4.7.17}
$$

式 (4.7.17) 是重要的，因为它意味着下面三种叙述等价：

(1) 使前向滤波器 $A_m(z)$ 的残差能量 F_m 为最小；

(2) 使后向滤波器 $B_m(z)$ 的残差能量 G_m 为最小；

(3) 使前、后向滤波器的平均残差能量 $\frac{1}{2}(F_m+G_m)$ 为最小。

因此，为确定前向滤波器 $A_m(i)$ 的系数，只需要使残差能量 F_m 最小即可。为此，考虑

$$
\frac{\partial F_m}{\partial a_m^*(j)} = 0, \quad j=1,\cdots,m \tag{4.7.18}
$$

由式 (4.7.16) 及式 (4.7.18) 立即得法方程

$$
\sum_{i=0}^{m} a_m(i)R_x(j-i) = 0, \quad j=1,\cdots,m \tag{4.7.19}
$$

将式 (4.7.19) 代入式 (4.7.16)，则

$$
\begin{aligned}
F_m &= \sum_{i=0}^{m} a_m(i)R_x(-i) + \sum_{j=1}^{m} a_m^*(j)\sum_{i=0}^{m} a_m(i)R_x(j-i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_m(i)R_x(-i)
\end{aligned}
\tag{4.7.20}
$$

理论上，求解法方程 (4.7.18)，即可得到 m 级前向滤波器的系数 $a_m(1),\cdots,a_m(m)$，然后将这些系数代入式 (4.7.20)，又可得到前向残差能量 F_m。一般说来，阶数 m 越大，前向残差能量 F_m 越小。

现在，我们可以将格型滤波器的设计过程表述为：令 $m=1,2\cdots$，并依次设计前向滤波器，当前向残差能量 F_m 不再明显减小时，最小的阶数 m 即为格型滤波器

的最优阶数。问题是，已设计出的 m 级格型滤波器是否会影响 $m+1$ 级格型滤波器的设计呢？换句话说，格型滤波器前后级之间是否存在耦合关系？若存在耦合关系，则第 m 级的格型滤波器设计与第 $m-1$ 级格型滤波器有关。反之，则各级格型滤波器的设计可独立进行，这正是所希望的。

为了分析格型滤波器前、后级之间的关系，定义下三角矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_1^*(1) & 1 & & & \\ a_2^*(2) & a_2^*(1) & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_m^*(m) & a_m^*(m-1) & \cdots & a_m^*(1) & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7.21}$$

和对角矩阵

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(F_0,F_1,\cdots,F_m) \tag{4.7.22}$$

于是，由法方程 (4.7.19) 的共轭形式，易得下列结果：

$$\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_0 & & & 0 \\ & \boldsymbol{F}_1 & & \\ & & \ddots & \\ \times & & & F_m \end{bmatrix} \tag{4.7.23}$$

式中，$\times$ 表示未知的元素，它们对后面的讨论无关紧要，而

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix} R_x^*(0) & R_x^*(-1) & \cdots & R_x^*(-m) \\ R_x^*(1) & R_x(0) & \cdots & R_x^*(-m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x^*(m) & R_x^*(m-1) & \cdots & R_x^*(0) \end{bmatrix} \tag{4.7.24}$$

定义 $\boldsymbol{x}(n)=[x(n),x(n-1),\cdots,x(n-m)]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{R}=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^*(n)\}$，则容易验证 $\tilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}$ 及 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{R}$。

由式 (4.5.23) 及 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}$ 为上三角矩阵，易知

$$\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{P} \tag{4.7.25a}$$

由于 $\tilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{R}$，故式 (4.7.25a) 可写作

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{P} \tag{4.7.25b}$$

另一方面，由式 (4.7.6b)，又有

$$\sum_{i=0}^{m} b_m(i)x(n-i)=g_m(n)$$

或

$$\sum_{i=0}^{m} a_m^*(m-i)x(n-i) = g_m(n) \tag{4.7.26}$$

若令

$$\boldsymbol{g}_m(n) = [g_0(n), g_1(n), \cdots, g_m(n)]^{\mathrm{T}}$$

则式 (4.7.26) 可以写作

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_m(n) = \boldsymbol{g}_m(n) \tag{4.7.27}$$

综合式 (4.7.27) 及式 (4.7.25b)，易知

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\boldsymbol{g}_m(n)\boldsymbol{g}_m^{\mathrm{H}}(n)\} &= \boldsymbol{L}\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_m(n)\boldsymbol{x}_m^{\mathrm{H}}(n)\}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} \\ &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} \\ &= \boldsymbol{P} \end{aligned} \tag{4.7.28}$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是对角矩阵，所以式 (4.7.28) 意味着

$$\mathrm{E}\{g_m(n)g_k^*(n)\} = \begin{cases} F_m, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \tag{4.7.29}$$

这表明，不同级滤波器的后向残差正交，即 $g_m(n) \perp g_k(n), m \neq k$。这一特性意味着格型滤波器前后级是解耦的，从而可以独立地设计每一级滤波器。

4.7.3 格型自适应算法

令 $w(n)$ 为滤波器在 n 时刻的权系数，并满足

$$\begin{aligned} w(n) &= 0, \quad n < 0 \\ w(n) &> 0, \quad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

定义瞬时前、后向残差能量

$$e_m(k) = (1-\beta)|f_m(k)|^2 + \beta|g_m(k)|^2, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \tag{4.7.30}$$

和 n 时刻及以前所有时刻前、后向残差的加权总能量误差函数

$$E_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} w(n-k)e_m(k) \tag{4.7.31}$$

最优反射系数 r_m 可以利用

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_m(n)}{\partial r_m^*} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(n-k)\frac{\partial}{\partial r_m^*}\left[(1-\beta)|f_m(k)|^2+\beta|g_m(k)|^2\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(n-k)\left[(1-\beta)f_m(k)g_{m-1}(k-1)+\beta g_m^*(k)f_{m-1}(k)\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

确定。将式 (4.7.1) 代入上式，整理后得 [124]

$$r_m(n) = \frac{-\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} w(n-k)f_{m-1}(k)g_{m-1}^*(k-1)}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} w(n-k)\left[\beta|f_m(k)|^2+(1-\beta)|g_m(k-1)|^2\right]} \tag{4.7.32}$$

且有

$$|r_m(n)| < 1 \tag{4.7.33}$$

这一条件保证了 $m+1$ 阶前向滤波器第 $m+1$ 个系数在任意时刻 n 的值都能够满足 $|a_{m+1}(m+1)|<1$ 的条件，从而使得前向滤波器是最小相位的，即物理可实现的。

与 Burg 最大熵方法中滤波器系数的估计相比较知，若 $\beta=0.5$ 及 $w(k)\equiv 1$，则式 (4.7.31) 简化为 Burg 最大熵方法中滤波器前、后向预测误差总的平均能量，并且式 (4.7.32) 给出滤波器系数的最大熵估计。若引入符号

$$C_{m-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(n-k)f_{m-1}(k)g_{m-1}^*(k-1) \tag{4.7.34a}$$

$$D_{m-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(n-k)\left[\beta|f_{m-1}(k)|^2+(1-\beta)|g_{m-1}(k-1)|^2\right] \tag{4.7.34b}$$

则

$$r_m(n) = -\frac{C_{m-1}(n)}{D_{m-1}(n)} \tag{4.7.35}$$

并且 $C_{m-1}(n)$ 和 $D_{m-1}(n)$ 服从以下递推公式：

$$C_{m-1}(n) = C_{m-1}(n-1)+w(0)f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1) \tag{4.7.36a}$$

$$D_{m-1}(n) = D_{m-1}(n-1)+w(0)\left[\beta|f_{m-1}(k)|^2+(1-\beta)g_{m-1}(k-1)|^2\right] \tag{4.7.36b}$$

归纳以上结果，即可得到完整的格型算法如下。

算法 4.7.1 (LMS 格型自适应滤波算法)

初始化：$f_0(n)=g_0(n)=x(n)$; $P_0(n)=|x(n)|^2$; $r_1(n)$ 接近于 1，如 $r_1=0.998$。

步骤 1 计算前、后向残差

$$f_m(n)=f_{m-1}(n)+r_m(n)g_{m-1}(n-1)$$
$$g_m(n)=r_m^*(n)f_{m-1}(n)+g_{m-1}(n-1)$$

步骤 2 求中间系数

$$C_{m-1}(n)=C_{m-1}(n-1)+w(0)f_{m-1}(n)g_{m-1}^*(n-1)$$
$$D_{m-1}(n)=D_{m-1}(n-1)+w(0)\left[\beta|f_{m-1}(k)|^2+(1-\beta)|g_{m-1}(k-1)|^2\right]$$

步骤 3 计算反射系数

$$r_m(n)=-C_{m-1}(n)/D_{m-1}(n)$$

步骤 4 利用 Burg 递推计算

$$a_m^{(m)}(n)=r_m(n)$$
$$a_i^{(m)}(n)=a_i^{(m-1)}(n)+r_m(n)a_{m-i}^{*(m-1)}(n)$$
$$P_m=(1-|r_m|^2)P_{m-1}$$

式中 $a_i^{(m)}(n)$ 表示 m 阶前向滤波器第 i 个系数在 n 时刻的值；P_m 为 m 阶格型滤波器的残差能量。

在用递推方式获得滤波器系数的同时，还可得到各阶滤波器的残差能量。残差能量不再减小时的最小阶数即为 LMS 格型滤波器的最优阶数。

可以看出，上述 LMS 格型自适应算法与最大熵算法基本相同，惟一不同之处在于反射系数的计算。LMS 格型自适应滤波器的优点是收敛速率比 LMS 横向滤波器快得多，而且对数据的舍入误差不敏感，其代价是需要比 LMS 算法更大的计算量。

4.8 自适应滤波器的算子理论

前面几节从状态空间模型、最小均方误差准则、加权均方误差最小化等角度分别讨论了 Kalman 滤波器、LMS 和 RLS 滤波器。LMS 和 RLS 滤波器都是横向滤波器。在上一节又介绍了 LMS 格型滤波器，它可明显提高 LMS 滤波器的收敛速率。本节从算子的角度出发，对滤波器给出一种新的理论分析框架。

4.8.1 滤波器算子的基本要求

如图 4.8.1 所示，将离散时间的滤波器视作一个算符或算子，不妨令其为 $\boldsymbol{P}$。设滤波器在离散时间 n 的输入向量为

$$\boldsymbol{x}(n) = [x(1), x(2), \cdots, x(n)]^{\mathrm{T}} \tag{4.8.1}$$

它是信号向量 $\boldsymbol{s}(n)$ 与加性白噪声 $\boldsymbol{v}(n)$ 的混合，即 $\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{s}(n) + \boldsymbol{v}(n)$。

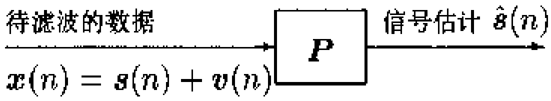

图 4.8.1 滤波器的算子表示

我们希望含噪声的数据向量 $\boldsymbol{x}(n)$ 通过滤波器 $\boldsymbol{P}$ 后，得到信号的估计 $\hat{\boldsymbol{s}}(n) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n)$。下面分析对滤波器算子 $\boldsymbol{P}$ 应该有哪些基本要求？为简便计，我们省略向量 $\boldsymbol{s}(n)$ 和 $\boldsymbol{x}(n)$ 等中的时间变量，将它们分别简记为 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{x}$。

(1) 为了保证信号通过滤波器后不致发生“畸变”，滤波器算子 $\boldsymbol{P}$ 必须是一线性算子。

(2) 当滤波器输出 $\hat{\boldsymbol{s}}(n)$ 再次通过滤波器时，信号估计 $\hat{\boldsymbol{s}}(n)$ 不应发生任何变化。这意味着 $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{s}}$ 必须得到满足。这一条件等价为

$$\boldsymbol{P}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \tag{4.8.2}$$

习惯称之为幂等条件。这就是说，滤波器算子 $\boldsymbol{P}$ 必须是一个幂等算子。

(3) 由于信号估计为 $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，因此 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 代表滤波器的估计误差。根据 4.1 节的正交性原理的引理，当滤波器工作在最优条件时，估计误差 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 应该与期望响应的估计值 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 正交，即

$$[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}] \perp \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.8.3}$$

或用向量的内积形式等价写作

$$\langle (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = 0 \tag{4.8.4}$$

上式应该对任意含白噪声的数据向量 $\boldsymbol{x}$ 恒成立，故有 $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P} = 0$。容易验证，这一关系成立的充分必要条件是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{P} \tag{4.8.5}$$