即滤波器算子应具有共轭对称性 (其共轭转置仍等于滤波器算子本身)。

总结以上讨论，滤波器算子必须是一个线性算子，并且具有幂等性和对称性。

4.8.2 投影矩阵与正交投影矩阵

那么，如何构造具有线性、幂等性和对称性的滤波器算子呢？最常用的滤波器算子是投影矩阵与正交投影矩阵。

令 $\boldsymbol{U}$ 为一 $M\times N$ 维矩阵，其中 $M>N$，并且矩阵是满列秩的。令 $\mathcal{H}^M$ 表示 M 维 Hilbert 空间，对于任意两个复向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{H}^M$，定义它们的内积为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} \tag{4.8.6}$$

定理 4.8.1 若 $M\times N$ (其中 $M>N$) 矩阵 $\boldsymbol{U}$ 满列秩，则投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U$ 由

$$\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{U}\langle\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{4.8.7}$$

给出。

证明 投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U$ 应满足两个基本要求。第一个要求是对于任意向量 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{H}^M$，$\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{x}$ 都应该位于 $\boldsymbol{U}$ 的列空间。这意味着 $\boldsymbol{P}_U$ 必然具有 $\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}$ 的形式，其中 $N\times M$ 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 具有满行秩，若 $\boldsymbol{U}$ 具有满列秩的话。第二个要求是：若将 $\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{x}$ 当作期望信号的估计值，则根据正交性原理的引理，下面的正交条件必须满足：

$$\langle\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{x}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}_U^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_U)\boldsymbol{x}=0$$

由于它应该对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 都满足，所以上式可等价表示为

$$\boldsymbol{P}_U^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{P}_U^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}_U$$

将 $\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}$ 代入上式，则有

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{G} \tag{4.8.8}$$

下面证明式 (4.8.8) 与

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{G} \tag{4.8.9}$$

等价。很显然，式 (4.8.9) 一定意味着式 (4.8.8)。由于 $\boldsymbol{G}$ 具有满行秩，故 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^H$ 是非奇异的，因此可以用 $(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}})^{-1}\boldsymbol{G}$ 左乘式 (4.8.8)，其结果为式 (4.8.9)，即式 (4.8.8) 意味着式 (4.8.9)。由式 (4.8.9) 立即得

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

将上式代入 $\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}$，便得到式 (4.8.7)。 ■

容易验证，投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U$ 具有以下性质：

(1) 幂等性：

$$\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{P}_U \tag{4.8.10}$$

(2) 对称性：

$$\boldsymbol{P}_U^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{P}_U \tag{4.8.11}$$

若定义

$$\boldsymbol{P}_U^{\perp}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}\langle\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{4.8.12}$$

则由此定义式易知 $\boldsymbol{P}_U^{\perp}$ 有以下性质：

(1) 对称性：

$$[\boldsymbol{P}_U^{\perp}]^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{P}_U^{\perp} \tag{4.8.13}$$

(2) 幂等性：

$$\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{P}_U^{\perp}=\boldsymbol{P}_U^{\perp} \tag{4.8.14}$$

(3) 与投影矩阵的正交性：

$$\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{O}\quad 或\quad \boldsymbol{P}_U\boldsymbol{P}_U^{\perp}=\boldsymbol{O} \tag{4.8.15}$$

式中 $\boldsymbol{O}$ 是元素全部等于零的矩阵。

由于 $\boldsymbol{P}_U^{\perp}$ 与投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U$ 正交，故 $\boldsymbol{P}_U^{\perp}$ 称作正交投影矩阵。

由定义式 (4.8.12) 可以看出，数据矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的正交投影矩阵代表了与 $\boldsymbol{U}$ 的信号子空间正交的零空间。因此，4.5.2 节的“解相关”也可以用正交投影矩阵来解释。若将式 (4.5.16) 代入式 (4.5.17)，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(n)&=\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{u}(n-1)\langle\boldsymbol{u}(n-1),\boldsymbol{u}(n-1)\rangle^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}(n-1)\right]\boldsymbol{u}(n)\\&=\boldsymbol{P}^{\perp}(n-1)\boldsymbol{u}(n)\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{P}^{\perp}(n-1)$ 即是由输入向量 $\boldsymbol{u}(n-1)$ 构成的正交投影矩阵。上式表明，解相关结果 $\boldsymbol{v}(n)$ 等于 n 时刻的输入向量 $\boldsymbol{u}(n)$ 在 $n-1$ 时刻输入向量 $\boldsymbol{u}(n-1)$ 的信号子空间上的正交投影。通过这一正交投影，输入向量 $\boldsymbol{u}(n)$ 与 $\boldsymbol{u}(n-1)$ 的相关性自然地被解除了。

由于投影矩阵和正交投影矩阵都满足滤波器算子的三个基本要求 (线性、幂等性和对称性)，所以它们在滤波理论中都可用作滤波算子。

4.8.3 前、后向预测滤波器

下面以前向和后向预测滤波器为例，说明投影矩阵和正交投影矩阵的应用。假定滤波器的输入和抽头权系数均为实数。为了方便叙述，先引入时移向量

$$z^{-j}\boldsymbol{x}(n)=[0,\cdots,0,x(1),\cdots,x(n-j)]^{\mathrm{T}} \tag{4.8.16}$$

注意，这里 z^{-j} 只是代表一个时间上移位的算子，而不要把它当成一种乘法。此外，约定离散时间变量的起点为 1，即 $x(n)=0,n\leqslant 0$。

1. 前向预测滤波器

考虑 m 阶前向预测滤波器

$$\hat{x}(k)=\sum_{i=1}^{m}w_i^{\mathrm{f}}(n)x(k-i),\qquad k=1,2,\cdots,n \tag{4.8.17}$$

式中 $w_i^{\mathrm{f}}(n),i=1,\cdots,m$ 表示 n 时刻的滤波器权系数向量。将上式写成矩阵方程，则有

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ x(1) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(n-m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1^{\mathrm{f}}(n)\\ w_2^{\mathrm{f}}(n)\\ \vdots\\ w_m^{\mathrm{f}}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{x}(1)\\ \hat{x}(2)\\ \vdots\\ \hat{x}(n)\end{bmatrix} \tag{4.8.18}$$

定义数据矩阵

$$\boldsymbol{X}_{1,m}(n)\stackrel{\mathrm{def}}{=}[z^{-1}\boldsymbol{x}(n),z^{-2}\boldsymbol{x}(n),\cdots,z^{-m}\boldsymbol{x}(n)]^{\mathrm{T}}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ x(1) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x(n-1) & x(n-2) & \cdots & x(n-m)\end{bmatrix} \tag{4.8.19}$$

并分别定义 m 级前向预测系数向量 $\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{f}}(n)$ 和前向预测值向量 $\hat{\boldsymbol{x}}(n)$ 为

$$\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{f}}(n)\stackrel{\mathrm{def}}{=}[w_1^{\mathrm{f}}(n),w_2^{\mathrm{f}}(n),\cdots,w_m^{\mathrm{f}}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{4.8.20a}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n)\stackrel{\mathrm{def}}{=}[\hat{x}(1),\hat{x}(2),\cdots,\hat{x}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{4.8.20b}$$

则式 (4.8.18) 可以用简洁的形式写作

$$\boldsymbol{X}_{1,m}(n)\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{f}}(n)=\hat{\boldsymbol{x}}(n) \tag{4.8.21}$$

为了求出前向预测形式向量的最小二乘估计，用 $\boldsymbol{x}(n)$ 代替上式中的 $\hat{\boldsymbol{x}}(n)$，便得到

$$\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{f}}(n) = \langle \boldsymbol{X}_{1,m}^{\mathrm{T}}(n), \boldsymbol{X}_{1,m}(n)\rangle^{-1}\boldsymbol{X}_{1,m}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{x}(n) \tag{4.8.22}$$

将式 (4.8.22) 代入式 (4.8.21)，并使用投影矩阵符号，即可将前向预测值向量表示为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{P}_{1,m}(n)\boldsymbol{x}(n) \tag{4.8.23}$$

式中 $\boldsymbol{P}_{1,m}(n) = \boldsymbol{X}_{1,m}(n)\langle \boldsymbol{X}_{1,m}^{\mathrm{T}}(n), \boldsymbol{X}_{1,m}(n)\rangle^{-1}\boldsymbol{X}_{1,m}^{\mathrm{T}}(n)$ 表示数据矩阵 $\boldsymbol{X}_{1,m}(n)$ 的投影矩阵。

若定义前向预测误差向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n) &= [e_m^{\mathrm{f}}(1), e_m^{\mathrm{f}}(2), \cdots, e_m^{\mathrm{f}}(n)]^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)\end{aligned} \tag{4.8.24}$$

式中 $e_m^{\mathrm{f}}(k), k = 1, \cdots, n$ 是滤波器在 k 时刻的前向预测误差，则由式 (4.8.23) 及正交投影矩阵的定义立即知

$$\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n) = \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n) \tag{4.8.25}$$

式 (4.8.23) 和式 (4.8.25) 的物理解释是：前向预测值向量 $\hat{\boldsymbol{x}}(n)$ 和前向预测误差向量 $\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n)$ 分别是数据向量 $\boldsymbol{x}(n)$ 在数据矩阵 $\boldsymbol{X}_{1,m}(n)$ 所张成的子空间上的投影和正交投影。

2. *后向预测滤波器*

考虑后向预测滤波器

$$\hat{x}(k-m) = \sum_{i=1}^{m} w_i^{\mathrm{b}}(n)x(k-m+i), \qquad k = 1, \cdots, n \tag{4.8.26}$$

式中 $w_i^{\mathrm{b}}(n), i = 1, \cdots, m$ 为 m 阶后向预测滤波器在 n 时刻的权系数。使用矩阵和向量书写上式，得

$$\begin{bmatrix} x(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(m) & x(m-1) & \cdots & 0 \\ x(m+1) & x(m) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-m+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m^{\mathrm{b}}(n) \\ w_{m-1}^{\mathrm{b}}(n) \\ \vdots \\ w_1^{\mathrm{b}}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{x}(1) \\ \vdots \\ \hat{x}(n-m) \end{bmatrix} \tag{4.8.27}$$

或

$$X_{0,m-1}(n)w_m^{\mathrm{b}}(n)=z^{-m}\hat{x}(n) \tag{4.8.28}$$

式中

$$X_{0,m-1}(n)=[z^0x(n),z^{-1}x(n),\cdots,z^{-m+1}x(n)]^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix} x(1) & 0 & \cdots & 0 \\ x(2) & x(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-m+1) \end{bmatrix} \tag{4.8.29a}$$

$$w_m^{\mathrm{b}}(n)=[w_m^{\mathrm{b}}(n),w_{m-1}^{\mathrm{b}}(n),\cdots,w_1^{\mathrm{b}}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{4.8.29b}$$

$$\hat{x}(n-m)=z^{-m}\hat{x}(n)=[0,\cdots,0,\hat{x}(1),\cdots,\hat{x}(n-m)]^{\mathrm{T}} \tag{4.8.29c}$$

在式 (4.8.28) 中用已知的数据向量 $x(n)$ 代替未知的预测值向量 $\hat{x}(n)$，即可得到后向预测滤波器权向量的最小二乘解为

$$w_m^{\mathrm{b}}(n)=\langle X_{0,m-1}(n),X_{0,m-1}(n)\rangle^{-1}X_{0,m-1}^{\mathrm{T}}(n)x(n) \tag{4.8.30}$$

将式 (4.8.30) 代入式 (4.8.28)，后向预测 (值) 向量可用投影矩阵表示为

$$\begin{aligned}\hat{x}(n-m)&=P_{0,m-1}(n)x(n-m)\\&=P_{0,m-1}(n)z^{-m}x(n)\end{aligned} \tag{4.8.31}$$

式中 $P_{0,m-1}(n)=X_{0,m-1}(n)\langle X_{0,m-1}(n),X_{0,m-1}(n)\rangle^{-1}X_{0,m-1}^{\mathrm{T}}(n)$ 是 $X_{0,m-1}(n)$ 的投影矩阵。

定义后向预测误差向量

$$\begin{aligned}e_m^{\mathrm{b}}(n)&=[e_m^{\mathrm{b}}(1),e_m^{\mathrm{b}}(2),\cdots,e_m^{\mathrm{b}}(n)]^{\mathrm{T}}\\&=x(n-m)-\hat{x}(n-m)\end{aligned} \tag{4.8.32}$$

式中 $e_m^{\mathrm{b}}(k),k=1,\cdots,n$ 是 k 时刻的后向预测误差，则将式 (4.8.31) 代入式 (4.8.32) 后，又可用正交投影矩阵来表示后向预测误差向量，即有

$$e_m^{\mathrm{b}}(n)=P_{0,m-1}^{\perp}(n)z^{-m}x(n) \tag{4.8.33}$$

式 (4.8.31) 和式 (4.8.32) 的物理含义如下：后向预测向量 $\hat{x}(n-m)$ 和后向预测误差向量 $e_m^{\mathrm{b}}(n)$ 分别是移位的数据向量 $z^{-m}x(n)$ 在数据矩阵 $X_{0,m-1}(n)$ 所张成子空间上的投影和正交投影。

4.8.4 投影矩阵和正交投影矩阵的更新

为了将投影矩阵和正交投影矩阵应用于自适应滤波器的设计中，需要推导出它们的时间更新公式。

假定目前的数据空间为 $\{U\}$，相对应的投影矩阵是 $\boldsymbol{P}_U$，正交投影矩阵为 $\boldsymbol{P}_U^{\perp}$。这里，$\boldsymbol{U}$ 取 $\boldsymbol{X}_{1,m}(n)$ 或 $\boldsymbol{X}_{0,m-1}(n)$ 等形式。现在假设有一个新的数据向量 $\boldsymbol{u}$ 加入到 $\{\boldsymbol{U}\}$ 的原向量组中。一般说来，新数据向量 $\boldsymbol{u}$ 将提供某些新的信息，它们是在 $\{\boldsymbol{U}\}$ 的原向量组中没有包含的。由于数据子空间从 $\{\boldsymbol{U}\}$ 扩大为 $\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{u}\}$，所以应该寻找与新子空间对应的“新的”投影矩阵 $\boldsymbol{P}_{U,u}$ 和正交投影矩阵 $\boldsymbol{P}_{U,u}^{\perp}$。

从自适应更新的角度出发，由已知的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U$ 求更新的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_{U,u}$ 的最简单方法是将 $\boldsymbol{P}_{U,u}$ 分解为两部分：一部分是非自适应部分或已知部分，另一部分为自适应更新部分。存在一种特别有用的分解方式，即要求非自适应部分与自适应部分彼此正交。这样一种分解称为“正交分解”。具体说来，投影矩阵 $\boldsymbol{P}_{U,u}$ 的正交分解为

$$\boldsymbol{P}_{U,u}=\boldsymbol{P}_U+\boldsymbol{P}_w \tag{4.8.34}$$

式中 $\boldsymbol{P}_w$ 的选择应满足正交条件

$$\langle \boldsymbol{P}_U,\boldsymbol{P}_w\rangle=0 \tag{4.8.35}$$

或简记作 $\boldsymbol{P}_w\perp\boldsymbol{P}_U$。

由于更新是通过原投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U$ 和新数据向量 $\boldsymbol{u}$ 实现的，而 $\boldsymbol{P}_U$ 中不包含新数据向量的任何作用，所以正交分解中的更新部分 $\boldsymbol{P}_w$ 应该包含有新数据向量 $\boldsymbol{u}$。不妨令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}$，即 $\boldsymbol{P}_w=\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{X}\boldsymbol{u},\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$。将 $\boldsymbol{P}_w$ 代入正交条件 (4.8.35)，则有

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{P}_U,\boldsymbol{P}_w\rangle&=\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{X}\boldsymbol{u},\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\\&=0\end{aligned}$$

这里使用了投影矩阵的对称性 $\boldsymbol{P}_U^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_U$。由于 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}\neq 0$，故上式意味着 $\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}=0$。为使这一条件对任意向量 $\boldsymbol{u}$ 恒成立，要求 $\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$。这意味着 $\boldsymbol{X}$ 应该是正交投影矩阵 $\boldsymbol{P}_U^{\perp}$。

综合以上讨论，得到正交分解 (4.8.34) 中的向量 $\boldsymbol{w}$ 为

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u} \tag{4.8.36}$$

即是说，$\boldsymbol{w}$ 是数据向量 $\boldsymbol{u}$ 在数据矩阵 $\boldsymbol{U}$ 上的正交投影。

图 4.8.2 以一维空间为例，画出了通过正交分解，构造子空间 $\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{w}\}=\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{u}\}$ 的示意图。

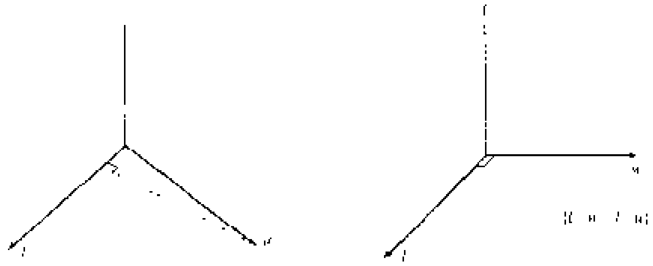

图 4.8.2 正交分解

利用投影矩阵的定义式 (4.8.7)，易求出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_w &= \boldsymbol{w}\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\rangle^{-1}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_U^{\perp}\end{aligned}\tag{4.8.37}$$

式中使用了正交投影矩阵的对称性 $[\boldsymbol{P}_U^{\perp}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_U^{\perp}$。

将式 (4.8.37) 代入正交分解 (4.8.34)，便得到 “新的” 投影矩阵的更新公式如下：

$$\boldsymbol{P}_{U,u}=\boldsymbol{P}_U+\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_U^{\perp}\tag{4.8.38a}$$

再使用正交投影矩阵的定义式 (4.8.12)，又可得到 “新的” 正交投影矩阵的更新公式：

$$\boldsymbol{P}_{U,u}^{\perp}=\boldsymbol{P}_U^{\perp}-\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_U^{\perp}\tag{4.8.38b}$$

式 (4.8.38) 组成了矩阵的更新，它是向量更新和标量更新的基础。在前面已看到，向量 $\boldsymbol{x}(n)$ 的前向线性预测 $\hat{\boldsymbol{x}}(n)$ 可以写成 $\hat{\boldsymbol{x}}(n)=\boldsymbol{P}_{1,m}(n)\boldsymbol{u}$，而其预测误差向量 $\boldsymbol{e}(n)=\boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n)$。为了推导一般向量 $\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{y}$ 的更新公式，我们用 $\boldsymbol{y}$ 分别右乘式 (4.8.38a) 和式 (4.8.38b)，得到

$$\boldsymbol{P}_{U,u}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{y}+\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{y}\rangle\tag{4.8.39a}$$

$$\boldsymbol{P}_{U,u}^{\perp}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\langle\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u}\rangle^{-1}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{y}\rangle\tag{4.8.39b}$$

在最小二乘滤波中，还常常需要对某个标量 (例如 n 时刻的预测误差和残差) 进行分析，由于两个向量的内积为一标量，所以若用向量 $\boldsymbol{z}$ 左乘式 (4.8.39a) 和式

(4.8.39b)，即可得到更新公式

$$\langle z, P_{U,u} y\rangle = \langle z, P_U y\rangle + \langle z, P_U^{\perp} u\rangle \langle P_U^{\perp} u, P_U^{\perp} u\rangle^{-1} \langle u, P_U^{\perp} y\rangle \tag{4.8.40a}$$

$$\langle z, P_{U,u}^{\perp} y\rangle = \langle z, P_U^{\perp} y\rangle - \langle z, P_U^{\perp} u\rangle \langle P_U^{\perp} u, P_U^{\perp} u\rangle^{-1} \langle u, P_U^{\perp} y\rangle \tag{4.8.40b}$$

下一节将看到，在式 (4.8.39) 和式 (4.8.40) 中巧妙地选择 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{u}$, z 和 y，就可以直接导出非对称结构的格型滤波器的全部时间更新和阶数更新公式。

4.9 LS自适应格型滤波器

图 4.9.1 是一 LS 格型滤波器。与只有一个反射系数 r_m 的 LMS 格型滤波器不同的是，LS 格型滤波器的前向反射系数 K_{m+1}^{f} 和后向反射系数 K_{m+1}^{b} 是不相等的。

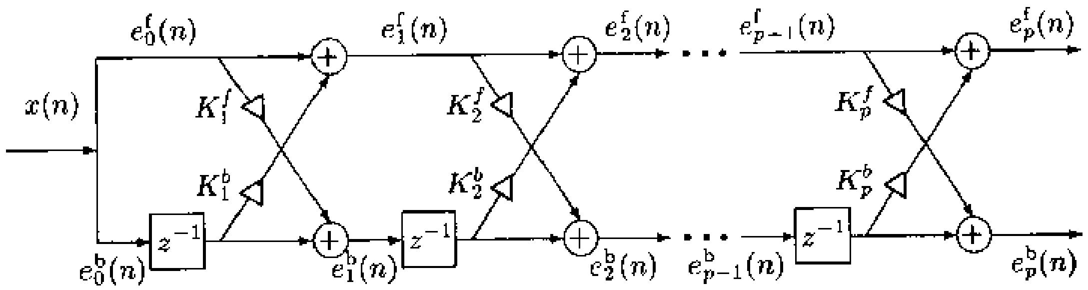

图 4.9.1 LS 自适应格型滤波器

由图 4.9.1 可以写出前、后向预测误差的方程，即有

$$e_{m+1}^{\mathrm{f}}(n) = e_m^{\mathrm{f}}(n) - K_{m+1}^{\mathrm{b}}(n) e_m^{\mathrm{b}}(n-1) \tag{4.9.1a}$$

$$e_{m+1}^{\mathrm{b}}(n) = -K_{m+1}^{\mathrm{f}}(n) e_m^{\mathrm{f}}(n) + e_m^{\mathrm{b}}(n-1) \tag{4.9.1b}$$

式 (4.9.1) 表明了以下事实：

(1) 第 $m+1$ 级滤波器在 n 时刻的前 (或后) 向预测误差不仅与前一级 n 时刻的前向预测误差 $e_m^{\mathrm{f}}(n)$ 有关，而且还决定于前一级 $n-1$ 时刻的后向预测误差 $e_m^{\mathrm{b}}(n-1)$。换句话说，与前、后级解耦的 LMS 格型滤波器不同，LS 格型滤波器存在着前、后级之间的耦合。

(2) LS 格型滤波器设计的核心问题就是推导前、后向反射系数的递推公式，即如何使用前级滤波器的有关参数递推出本级的前、后向反射系数。

(3) LS 格型滤波器既含有阶数递推 (本级参数与前级参数有关)，又包含了时间递推 (本时刻的滤波器参数与前一时刻的参数有关)。

毋庸待言，前、后级滤波器的耦合大大增加了 LS 格型滤波器的设计难度，因为它们不再像 LMS 格型滤波器那样能够各级独立设计。幸运的是，投影矩阵和正交投影矩阵这两个滤波器算子可以完全克服这一设计困难。

4.6 节推导了前、后向预测误差向量的表达式 (4.8.25) 和式 (4.8.33)。如果只对 n 时刻的预测误差 (标量) 感兴趣，就需要从 $\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n)$ 和 $\boldsymbol{e}_m^{b}(n)$ 分别抽取出第 n 个分量。为此，引入 n 个分量的单位向量 (也叫抽取向量)

$$\boldsymbol{\pi}(n) = [0, \cdots, 0, 1]^{\mathrm{T}} \tag{4.9.2}$$

则现时刻的前、后向预测误差很容易用两个向量的内积来表示：

$$e_m^{\mathrm{f}}(n) = \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n) \rangle = \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n) \rangle \tag{4.9.3}$$

$$e_m^{\mathrm{b}}(n) = \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n) \rangle = \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n) z^{-m}\boldsymbol{x}(n) \rangle \tag{4.9.4}$$

前、后向预测残差分别定义为时刻 1 到时刻 n 的前、后向预测误差的平方和，即

$$\epsilon_m^{\mathrm{f}}(n) = \langle \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n), \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n) \rangle \tag{4.9.5}$$

$$\epsilon_m^{\mathrm{b}}(n) = \langle \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n), \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n) \rangle \tag{4.9.6}$$

利用 z^{-1} 算子的移位性能，还可得到 $n-1$ 时刻的前、后向预测残差的表达式：

$$\epsilon_m^{\mathrm{f}}(n-1) = \langle z^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{f}}(n), z^{-1}\boldsymbol{e}_m^{f}(n) \rangle \tag{4.9.7}$$

$$\epsilon_m^{\mathrm{b}}(n-1) = \langle z^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n), z^{-1}\boldsymbol{e}_m^{b}(n) \rangle \tag{4.9.8}$$

在推导 LS 格型滤波器的更新公式之前，先证明一个有用的公式：

$$z^{-1}\boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n) z^{-m} = \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n) z^{-m-1} \tag{4.9.9}$$

证明 利用 z^{-1} 的移位性质，易知对任意一向量 $\boldsymbol{y}(n)$，有

$$\begin{aligned} z^{-1}\boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n) z^{-m}\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n-1) z^{-m}\boldsymbol{y}(n-1) \\ &= \boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n-1) z^{-m-1}\boldsymbol{y}(n) \end{aligned} \tag{4.9.10}$$

注意到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_{0,m-1}(n-1) &= z^{-1}[z^{0}\boldsymbol{x}(n), z^{-1}\boldsymbol{x}(n), \cdots, z^{-m+1}\boldsymbol{x}(n)]^{\mathrm{T}} \\ &= [z^{-1}\boldsymbol{x}(n), z^{-2}\boldsymbol{x}(n), \cdots, z^{-m}\boldsymbol{x}(n)]^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{X}_{1,m}(n) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n-1) &= \boldsymbol{X}_{0,m-1}(n-1)\langle \boldsymbol{X}_{0,m-1}(n-1), \boldsymbol{X}_{0,m-1}(n-1)\rangle^{-1}\boldsymbol{X}_{0,m-1}^{\mathrm{T}}(n-1)\\ &= \boldsymbol{X}_{1,m}(n)\langle \boldsymbol{X}_{1,m}(n), \boldsymbol{X}_{1,m}(n)\rangle^{-1}\boldsymbol{X}_{1,m}^{\mathrm{T}}(n)\\ &= \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\end{aligned}$$

于是，式 (4.9.10) 可以写作

$$z^{-1}\boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n)z^{-m}\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)z^{-m-1}\boldsymbol{y}(n)$$

上式对任意向量 $\boldsymbol{y}(n)$ 均成立，这意味着式 (4.9.9) 为真。 ■

下面考虑由式 (4.9.3) 定义的前向预测误差 $e_{m+1}^{\mathrm{f}}(n) = \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{P}_{1,m+1}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n)\rangle$ 的递推公式。利用式 (4.9.9) 和式 (4.8.33)，有

$$\boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n) = z^{-1}\boldsymbol{P}_{0,m-1}^{\perp}(n)z^{-m}\boldsymbol{x}(n) = z^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n) \tag{4.9.11}$$

在式 (4.8.40b) 中，令 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}_{1,m}(n), \boldsymbol{u} = z^{-m-1}\boldsymbol{x}(n)$ 和 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(n)$，则易知

$$\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{X}_{1,m}(n), z^{-m-1}\boldsymbol{x}(n)\} = \{\boldsymbol{X}_{1,m+1}(n)\} \tag{4.9.12}$$

从而有

$$\boldsymbol{P}_U^{\perp} = \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n) \tag{4.9.13a}$$

$$\boldsymbol{P}_{U,u}^{\perp} = \boldsymbol{P}_{1,m+1}^{\perp}(n) \tag{4.9.13b}$$

$$\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)z^{-m-1}\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n-1) \tag{4.9.13c}$$

$$\boldsymbol{P}_U^{\perp}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n) \tag{4.9.13d}$$

$$\boldsymbol{P}_{U,u}^{\perp}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_{1,m+1}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n) \tag{4.9.13e}$$

在得到式 (4.9.13c) 的过程中使用了式 (4.9.11) 的结果。

将式 (4.9.13) 代入式 (4.8.40b)，并加以整理，则有

$$\begin{aligned}e_{m+1}^{\mathrm{f}}(n) &= \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{P}_{1,m+1}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n)\rangle\\ &= \langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n)\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{\pi}(n), \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n-1)\rangle\langle \boldsymbol{P}_{1,m}^{\perp}(n)\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{e}_m^{b}(n-1)\rangle}{\langle \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n-1), \boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n-1)\rangle}\\ &= e_m^{\mathrm{f}}(n) - \frac{\langle z^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{b}}(n), \boldsymbol{e}_m^{f}(n)\rangle}{\epsilon_m^{\mathrm{b}}(n-1)} e_m^{\mathrm{b}}(n-1)\end{aligned} \tag{4.9.14}$$