

定义偏相关系数

$$\Delta_{m+1}(n) = \langle e_m^f(n), e_m^b(n-1) \rangle = \langle e_m^b(n-1), e_m^f(n) \rangle \quad (4.9.15)$$

然后将式 (4.9.14) 与式 (4.9.1a) 加以比较, 即知第 $m+1$ 级格型滤波器在 n 时刻的后向反射系数 $K_{m+1}^b(n)$ 为

$$K_{m+1}^b(n) = \frac{\Delta_{m+1}(n)}{\epsilon_m^b(n-1)} \quad (4.9.16)$$

为了推导前向反射系数 $K_{m+1}^f(n)$ 的更新公式, 在式 (4.8.40b) 中令 $U = X_{1,m}(n)$, $u = x(n)$, $y = z^{-m-1}x(n)$ 。利用子空间 $\{U, u\}$ 和 $\{u, U\}$ 等价这一直观的事实, 得到

$$\{X_{1,m}(n), x(n)\} = \{x(n), X_{1,m}(n)\} = \{X_{0,m}(n)\} \quad (4.9.17)$$

于是, 采用与前面类似的推导, 又可得到后向预测误差的阶数更新公式 (4.9.1b) 中的前向反射系数的表达式:

$$K_{m+1}^f(n) = \frac{\Delta_{m+1}(n)}{\epsilon_m^f(n)} \quad (4.9.18)$$

综合以上讨论, 有以下结论:

(1) LS 自适应格型滤波算法由式 (4.9.1a) 和式 (4.9.1b) 组成, 其关键是前、后向反射系数 $K_{m+1}^f(n)$ 和 $K_{m+1}^b(n)$ 的递推计算。

(2) 前向反射系数 $K_{m+1}^f(n)$ 决定于偏相关系数 $\Delta_{m+1}(n)$ 和前向预测残差 $\epsilon_m^f(n)$, 而后向反射系数 $K_{m+1}^b(n)$ 决定于偏相关系数 $\Delta_{m+1}(n)$ 和后向预测残差 $\epsilon_m^b(n-1)$ 。

这表明, 自适应更新滤波器的设计现在转化为偏相关系数 $\Delta_{m+1}(n)$ 、前向预测残差 $\epsilon_m^f(n)$ 、后向预测残差 $\epsilon_m^b(n)$ 、前向反射系数 $K_{m+1}^f(n)$ 和后向反射系数 $K_{m+1}^b(n)$ 的更新公式的推导。

下面推导前、后向预测残差的更新公式。为此, 将 $e_m^f(n) = \langle P_{1,m}^\perp(n)x(n), P_{1,m}^\perp(n)x(n) \rangle$ 代入前向预测残差的定义式 (4.9.5), 可得

$$\begin{aligned} \epsilon_m^f(n) &= \langle P_{1,m}^\perp(n)x(n), P_{1,m}^\perp(n)x(n) \rangle \\ &= x^T(n) [P_{1,m}^\perp(n)]^T P_{1,m}^\perp(n) x(n) \\ &= x^T(n) P_{1,m}^\perp(n) x(n) \\ &= \langle x(n), P_{1,m}^\perp(n)x(n) \rangle \end{aligned} \quad (4.9.19)$$

这里使用了正交投影矩阵的对称性和幂等性, 即 $[P_{1,m}^\perp(n)]^T P_{1,m}^\perp(n) = P_{1,m}^\perp(n) \times P_{1,m}^\perp(n) = P_{1,m}^\perp(n)$ 。与此类似的化简在后面还会多次遇到, 届时不再赘述。

类似地, 由后向预测残差的定义式 (4.9.6), 又可推出

$$\epsilon_m^b(n) = \langle z^{-m} \mathbf{x}(n), \mathbf{P}_{0,m-1}^-(n) \mathbf{x}(n) \rangle \quad (4.9.20)$$

在式 (4.8.40b) 中令 $\mathbf{z} = \mathbf{y} = \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{U} = \mathbf{X}_{1,m}(n)$ 和 $\mathbf{u} = z^{-m-1} \mathbf{x}(n)$, 容易导出前向预测残差的更新公式:

$$\epsilon_{m+1}^f(n) = \epsilon_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^b(n-1)} \quad (4.9.21)$$

式中 $\Delta_{m+1}^2(n) = \Delta_{m+1}(n) \Delta_{m+1}(n)$ 。

在式 (4.8.40b) 中再令 $\mathbf{z} = \mathbf{y} = z^{-m-1} \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{U} = \mathbf{X}_{1,m}(n)$ 和 $\mathbf{u} = \mathbf{x}(n)$, 又可得后向预测残差的更新公式为

$$\epsilon_{m+1}^b(n) = \epsilon_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^f(n)} \quad (4.9.22)$$

考虑子空间 $\{\mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}(n)\}$ 的投影矩阵 $\mathbf{P}_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}}(n)$ 与子空间 $\{\mathbf{U}\}$ 的投影矩阵 $\mathbf{P}_{\mathbf{U}}(n)$ 之间的关系, 则有^[5]

$$\mathbf{P}_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{U}}(n-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9.23a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}}^\perp(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^\perp(n-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9.23b)$$

在式 (4.8.40b) 中令 $\mathbf{z} = \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{y} = z^{-m-1} \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{U} = \mathbf{X}_{1,m}(n)$ 和 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}(n)$, 则可证明偏相关系数满足下列更新关系:

$$\Delta_{m+1}(n) = \Delta_{m+1}(n-1) + \frac{\epsilon_m^f(n) \epsilon_m^b(n-1)}{\gamma_m(n-1)} \quad (4.9.24)$$

式中 $\gamma_m(n-1)$ 为角度参数, 定义为

$$\gamma_m(n-1) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{\pi}(n), \mathbf{P}_{1,m}^\perp(n) \boldsymbol{\pi}(n) \rangle \quad (4.9.25)$$

在式 (4.8.40b) 中令 $\mathbf{z} = \mathbf{y} = \boldsymbol{\pi}(n)$, $\mathbf{U} = \mathbf{X}_{1,m}(n)$ 和 $\mathbf{u} = z^{-m-1} \mathbf{x}(n)$, 则最后可得到角度参数的更新公式:

$$\gamma_{m+1}(n-1) = \gamma_m(n-1) - \frac{[\epsilon_m^b(n-1)]^2}{\epsilon_m^b(n-1)} \quad (4.9.26)$$

综合以上各种更新公式, 就得到了 LS 格型自适应滤波算法。

算法 4.9.1 (LS 格型自适应滤波算法)

初始化:

$$e_m^b(0) = e_m^f(0) = \Delta_m(0) = 0$$

$$\gamma_m(0) = 1$$

$$\epsilon_m^f(0) = \epsilon_m^b(0) = \delta$$

对 $n = 1, 2, \dots$, 计算

$$e_0^b(n) = e_0^f(n) = x(n)$$

$$\epsilon_0^b(n) = \epsilon_0^f(n) = \epsilon_0^f(n-1) + x^2(n)$$

$$\gamma_0(n) = 1$$

对 $m = 0, 1, \dots, M-1$ 计算

$$\Delta_{m+1}(n) = \Delta_{m+1}(n-1) + \frac{\epsilon_m^f(n)\epsilon_m^b(n-1)}{\gamma_m(n-1)}$$

$$e_{m+1}^f(n) = e_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}(n-1)e_m^b(n-1)}{\epsilon_m^b(n-1)}$$

$$e_{m+1}^b(n) = e_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}(n-1)e_m^f(n)}{\epsilon_m^f(n)}$$

$$\epsilon_{m+1}^f(n) = \epsilon_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^b(n-1)}$$

$$\epsilon_{m+1}^b(n) = \epsilon_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^f(n)}$$

$$\gamma_{m+1}(n-1) = \gamma_m(n-1) - \frac{[e_m^b(n-1)]^2}{e_m^b(n-1)}$$

其中, 参数 δ 应选择接近稳态预测误差的平方值。

4.10 自适应谱线增强器与陷波器

自适应谱线增强器最早是 Widrow 等人^[204]于 1975 年在研究自适应噪声相消时提出来的, 目的是将正弦波与宽带噪声分离开来, 并提取正弦波信号。相反, 如果正弦波信号是希望抑制的噪声或干扰 (如在医学生物仪器中, 50Hz 的交流电称为市电干扰), 实现这一任务的自适应滤波器则称为陷波器。现在, 自适应谱线增强器和陷波器已广泛应用于瞬时频率估计、谱分析、窄带检测、语音编码、窄带干扰抑制、干扰检测、数字式数据接收机的自适应载体恢复, 参见综述文献 [210]。

4.10.1 谱线增强器与陷波器的传递函数

考虑下面的观测信号

$$x(n) = s(n) + v(n) = \sum_{i=1}^p A_i \sin(\omega_i n + \theta_i) + v(n) \quad (4.10.1)$$

式中 A_i, ω_i, θ_i 分别是第 i 个正弦波信号的幅值, 频率和初始相位; $v(n)$ 为加性的宽带噪声, 可以有色的。

现在, 希望设计一滤波器, 让 $x(n)$ 通过该滤波器后, 输出中只含有 p 个正弦波信号 $s(n)$, 而没有其他任何信号或噪声。由于 p 个正弦波信号的功率谱为 p 条离散的谱线, 所以这种只抽取正弦波信号的滤波器称为谱线增强器。令 $H(\omega)$ 是谱线增强器的传递函数, 为了抽取 p 个正弦波, 并拒绝所有其他信号和噪声, 传递函数 $H(\omega)$ 必须满足下面的条件:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \omega = \omega_1, \dots, \omega_p \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.10.2)$$

反之, 若滤波器的传递函数

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \omega = \omega_1, \dots, \omega_p \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.10.3)$$

则滤波器将抑制掉 p 个正弦波信号, 并让 $v(n)$ 完全通过。这种滤波器的作用相当一个正弦波的陷井, 故称为陷波器。

图 4.10.1(a) 和 (b) 分别针对三个正弦波信号示出了谱线增强器和陷波器的传递函数的曲线。

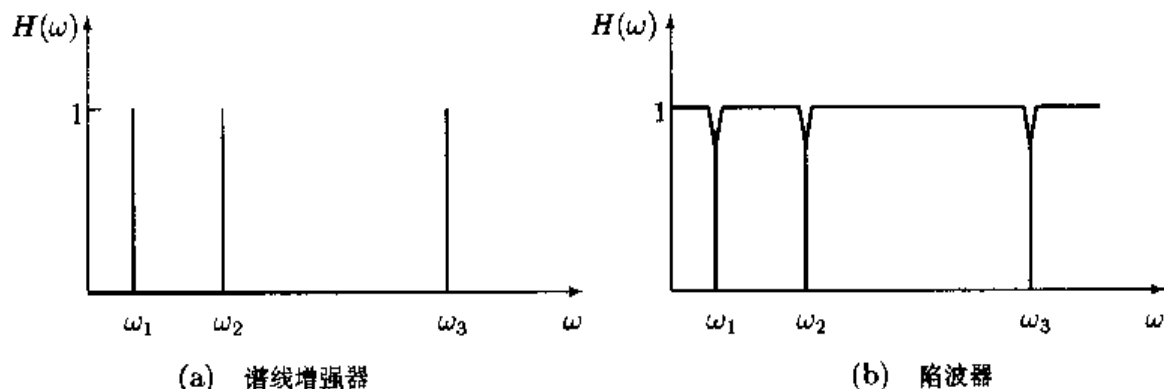


图 4.10.1 谱线增强器与陷波器的传递函数

自适应谱线增强器或陷波器是一种自适应滤波器，其传递函数满足式 (4.10.2) 或式 (4.10.3)。事实上，自适应谱线增强器很容易由自适应陷波器实现，见图 4.10.2。

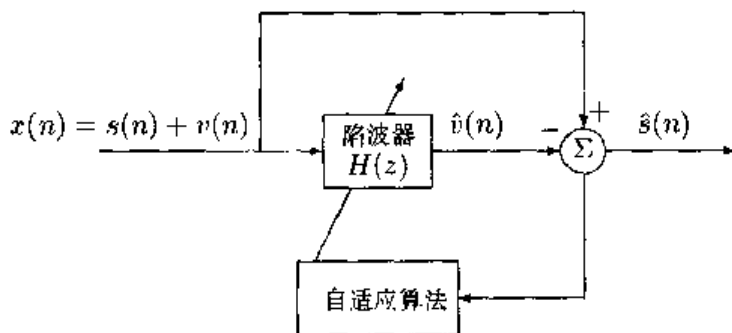


图 4.10.2 用自适应陷波器构成的自适应谱线增强器

如图，观测信号 $x(n) = s(n) + v(n)$ 通过自适应陷波器，抑制掉正弦波信号，产生 $v(n)$ 的最优估计 $\hat{v}(n)$ ，然后与观测信号相减，产生正弦波信号的估计 $\hat{s}(n) = s(n) + v(n) - \hat{v}(n)$ 。如果陷波器是理想的，则 $\hat{v}(n) = v(n)$ ，从而使得 $\hat{s}(n) = s(n)$ 。利用陷波器构造的自适应谱线增强器简称为陷波型自适应谱线增强器。

4.10.2 基于 IIR 格型滤波器的自适应陷波器

基于自适应无限冲激响应 (IIR) 滤波器可以实现自适应陷波器和自适应谱线增强器。这种由 Rao 与 Kung^[155] 提出的自适应谱线增强器对 p 个正弦波只需要自适应调节 $2p$ 个权系数，1985 年，Nehorai^[138] 提出了另一种陷波型自适应谱线增强器。这种增强器通过将陷波器的零点限制在单位圆上，对 p 个正弦波只需要调节滤波器的 p 个权系数。使用 IIR 陷波器的想法是有吸引力的，因为它可以拒绝干扰信号。此外，它所需要的滤波器长度比采用 FIR 滤波器的自适应谱线增强器的长度小得多。

由 Rao 与 Kung 提出的基于 IIR 陷波器的自适应谱线增强器的原理图如图 4.10.2 所示。为了增强一个正弦波信号 $s(n) = re^{j\omega n}$ ，陷波器的传递函数由

$$H(z) = \frac{(1 - re^{j\omega} z^{-1})(1 - re^{-j\omega} z^{-1})}{(1 - \alpha re^{j\omega} z^{-1})(1 - \alpha re^{-j\omega} z^{-1})} \quad (4.10.4)$$

$$= \frac{1 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2}}{1 + \alpha w_1 z^{-1} + \alpha^2 w_2 z^{-2}} \quad (4.10.5)$$

给定，式中 $w_1 = -2r \cos \omega$ 和 $w_2 = r^2$ ，而 α 是一个决定陷波器带宽的参数。

由式 (4.10.4) 知，当 $z = re^{\pm j\omega}$ 和 $\alpha \neq 1$ 时， $H(z) = 0$ 。另一方面，还可看出，当 $z \neq re^{\pm j\omega}$ 和 $\alpha \rightarrow 1$ 时， $H(z) \approx 1$ 。因此，只要选择 $\alpha \rightarrow 1$ ，即可近似实现陷波作用，并且 α 越接近于 1， $H(z)$ 的陷波作用越理想。图 4.10.2 所示谱线增强器的自适应算法是调节权系数 w_1 和 w_2 ，使估计误差 $\hat{v}(n)$ 的均方值为最小，这可以用高斯 -

牛顿算法 (如 LMS 算法等) 实现。但是, 高斯 - 牛顿算法对某些初始条件敏感。

为了改进直接式 IIR 陷波器的缺陷, Cho 等人^[43] 提出在图 4.10.2 所示的谱线增强器中使用格型 IIR 陷波器代替直接式 IIR 陷波器实现陷波器传递函数。这种格型 IIR 滤波器的结构如图 4.10.3 所示, 由两个格型滤波器级联而成。上方的格型滤波器 $H_1(z)$ 的输入为 $x(n)$, 输出为 $s_0(n)$; 而下方的格型滤波器 $H_2(z)$ 的输入为 $s_0(n)$, 输出为 $s_2(n)$ 。

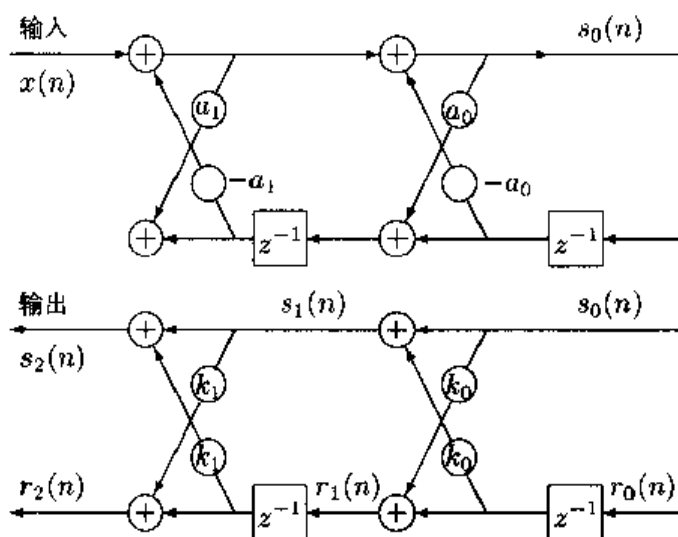


图 4.10.3 格型 IIR 滤波器

由图 4.10.3 容易写出格型滤波器 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的输入、输出方程分别为

$$s_0(n) + a_0(1 + a_1)s_0(n-1) + a_1s_0(n-2) = x(n)$$

$$s_0(n) + k_0(1 + k_1)s_0(n-1) + k_1s_0(n-2) = s_2(n)$$

或写成 Z 变换形式

$$[1 + a_0(1 + a_1)z^{-1} + a_1z^{-2}] S_0(z) = X(z)$$

$$[1 + k_0(1 + k_1)z^{-1} + k_1z^{-2}] S_0(z) = S_2(z)$$

因此, 两个格型滤波器的传递函数分别定义为

$$H_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_0(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_0(1 + a_1)z^{-1} + a_1z^{-2}} \quad (4.10.6)$$

$$H_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_2(z)}{S_0(z)} = 1 + k_0(1 + k_1)z^{-1} + k_1z^{-2} \quad (4.10.7)$$

由此得整个格型滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned}
 H(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_2(z)}{X(z)} \\
 &= \frac{S_2(z) S_0(z)}{S_0(z) X(z)} \\
 &= H_2(z) H_1(z) \\
 &= \frac{1 + k_0(1 + k_1)z^{-1} + k_1z^{-2}}{1 + a_0(1 + a_1)z^{-1} + a_1z^{-2}} \quad (4.10.8)
 \end{aligned}$$

可见, 图 4.10.3 上方的格型滤波器 $H_1(z)$ 贡献为整个格型滤波器的极点部分, 相当于 AR 模型; 而下方的格型滤波器 $H_2(z)$ 则贡献为整个格型滤波器的零点部分, 它是一个格型 FIR 滤波器。因此, 整个格型滤波器具有无限多个冲激响应, 为 IIR 格型滤波器。

由于式 (4.10.8) 必须满足陷波器的条件式 (4.10.5), 故有

$$a_0(1 + a_1) = \alpha k_0(1 + k_1) \quad (4.10.9a)$$

$$a_1 = \alpha^2 k_1 \quad (4.10.9b)$$

以上两式给出

$$a_0 = \frac{\alpha k_0(1 + k_1)}{1 + \alpha^2 k_1} \quad (4.10.10)$$

式 (4.10.9b) 和式 (4.10.10) 说明, 权系数 a_0 和 a_1 由权系数 k_0 和 k_1 确定。由于 α 接近于 1, 因此, 有以下近似关系式:

$$a_1 = \alpha^2 k_1 \approx \alpha k_1$$

$$a_0(1 + a_1) = \alpha k_0(1 + k_1) \approx k_0(1 + \alpha k_1) \approx k_0(1 + a_1)$$

或写作

$$a_1 \approx \alpha k_1 \quad (4.10.11a)$$

$$a_0 \approx k_0 \quad (4.10.11b)$$

这表明, 只需要推导 k_0 和 k_1 的自适应更新公式即可。

由于 $H_1(z)$ 是一极点模型, 为了保证这一滤波器的稳定性, $H_1(z)$ 的极点必须位于单位圆内, 即权系数的模 $|a_0|$ 和 $|a_1|$ 都必须小于 1。因此, $H_2(z)$ 的权系数的模 $|k_0|$ 和 $|k_1|$ 也必须小于 1。

权系数 k_0 和 k_1 可以运用格型 FIR 滤波器的自适应算法进行自适应调节^[124],

$$k_m(n) = -\frac{C_m(n)}{D_m(n)} \quad (4.10.12a)$$

$$C_m(n) = \lambda C_m(n-1) + s_m(n)r_m(n-1) \quad (4.10.12b)$$

$$D_m(n) = \lambda D_m(n-1) + \frac{1}{2} [s_m^2(n) + r_m^2(n)] \quad (4.10.12c)$$

式中, $m = 0, 1$; 遗忘因子 $0 < \lambda \leq 1$; 而 $s_m(n)$ 和 $r_m(n)$ 分别是图 4.10.3 下方的格型滤波器第 m 级的前向和后向残差。

4.11 广义旁瓣对消器

令 $\mathbf{c}_0$ 是表示一期望信源 $s_0(t)$ 特征的向量。例如, 在阵列信号处理中, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}(\phi_0)$ 是期望信源的方向向量。又如, 在无线通信的码分多址系统中, $\mathbf{c}_0$ 是期望用户的特征码向量。现在希望设计一窄带波束形成器 $\mathbf{w}$ 抽取期望信源 $s_0(t)$, 即要求 $\mathbf{w}$ 满足以下线性约束条件:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{c}_0 = g \quad (4.11.1)$$

式中 $g \neq 0$ 是一常数。

假定有 p 个信号 $s_1(t), \dots, s_p(t)$, 表示它们特征的向量分别为 $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p$ 。如果希望抽取其中之一, 并抑制所有其他信号, 则需要将单一线性约束推广到 p 个线性约束, 即有

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (4.11.2)$$

式中 $\mathbf{C}$ 称为约束矩阵, 由 $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p]$ 给出; 列向量 $\mathbf{g}$ 称为增益向量, 其元素值决定相对应的信号是被抽取还是被抑制。以两个线性约束条件为例:

$$[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]^H \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11.3)$$

这表明, 信源 $s_1(t)$ 将被抽取, 而信源 $s_2(t)$ 则被抑制。使用阵列信号处理的术语, 第一个约束条件 $\mathbf{c}_1^H \mathbf{w} = 1$ 表示阵列的主瓣, 而第二个约束条件 $\mathbf{c}_2^H \mathbf{w} = \alpha$ ($\alpha < 1$) 表示阵列的旁瓣, 当 $\alpha = 0$ 时, 旁瓣即被对消。鉴于此, 常把满足式 (4.11.3) 的滤波器称为旁瓣对消器。那么, 怎样实现自适应的旁瓣对消器呢?

不妨假定使用 M 个阵元接收 L 个信源, 即在式 (4.11.2) 中有 L 个线性约束条件, 即 $\mathbf{C}$ 为 $M \times L$ 维约束矩阵, 而旁瓣对消器 $\mathbf{w}$ 有 M 个抽头系数, 即 $\mathbf{w}$ 为 $M \times 1$ 维, 并且增益向量 $\mathbf{g}$ 为 $L \times 1$ 维。因此, 若令 $\mathbf{g} = [1, 0, \dots, 0]^T$, 则称满足式 (4.11.2)

的旁瓣对消器，它只保留期望信号 $s_1(t)$ ，而对消掉其他 $L-1$ 个(干扰)信号，即抑制掉所有的旁瓣。

通常，阵元个数 M 大于信号个数 L 。令 $M \times (M-L)$ 矩阵 C_a 的各列为线性独立的向量，它们构成一组基向量。假定这些基向量张成的空间是约束矩阵 C 的列张成的空间的正交补。根据正交补的定义，一矩阵 C 和它的正交补矩阵 C_a 相互正交，即有

$$C^H C_a = O_{L \times (M-L)} \quad (4.11.4a)$$

$$C_a^H C = O_{(M-L) \times L} \quad (4.11.4b)$$

其中 $O_{L \times (M-L)}$ 和 $O_{(M-L) \times L}$ 均为零矩阵，下标表示其维数。

用约束矩阵 C 及其正交补 C_a 作为子矩阵，合成一矩阵

$$U = [C, C_a] \quad (4.11.5)$$

令波束形成器的 $M \times 1$ 权向量 w 用矩阵 U 表示：

$$w = Uq \quad \text{或} \quad q = U^{-1}w \quad (4.11.6)$$

若将向量 q 分块为

$$q = \begin{bmatrix} v \\ -w_a \end{bmatrix} \quad (4.11.7)$$

式中 v 为 $L \times 1$ 向量，而 w_a 为 $(M-L) \times 1$ 向量。于是，将式 (4.11.5) 和式 (4.11.7) 代入式 (4.11.6) 后，即有

$$w = [C, C_a] \begin{bmatrix} v \\ -w_a \end{bmatrix} = Cv - C_a w_a \quad (4.11.8)$$

用 C^H 左乘式 (4.11.8) 两边，然后代入式 (4.11.2) 便得到

$$g = C^H Cv - C^H C_a w_a$$

利用 C 与 C_a 的正交性 (即 $C^H C_a$ 等于零矩阵 O)，则上式可写作

$$g = C^H Cv$$

解之，得

$$v = (C^H C)^{-1} g \quad (4.11.9)$$

将式 (4.11.9) 代入式 (4.11.8) 得

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{C}_a \mathbf{w}_a \quad (4.11.10)$$

定义

$$\mathbf{w}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \quad (4.11.11)$$

则式 (4.11.10) 可表示为

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{C}_a \mathbf{w}_a \quad (4.11.12)$$

式 (4.11.12) 表明, 式 (4.11.2) 定义的旁瓣对消器 $\mathbf{w}$ 可以分解为两部分:

(1) 滤波器 $\mathbf{w}_0$ 由式 (4.11.11) 定义, 它是旁瓣对消器的固定部分, 由约束矩阵 $\mathbf{C}$ 和增益向量 $\mathbf{g}$ 确定;

(2) $\mathbf{C}_a \mathbf{w}_a$ 表示旁瓣对消器的自适应部分。

由于约束矩阵 $\mathbf{C}$ 和增益向量 $\mathbf{g}$ 给定后, 滤波器 $\mathbf{w}_0$ 以及约束矩阵的正交补矩阵 $\mathbf{C}_a$ 均为已知的不变量, 故旁瓣对消器 $\mathbf{w}$ 的自适应更新便转换为自适应滤波器 $\mathbf{w}_a$ 的更新。鉴于此, 常将式 (4.11.12) 定义的旁瓣对消器称为广义旁瓣对消器。

下面对广义旁瓣对消器作进一步的物理解释。

• 将式 (4.11.12) 代入旁瓣对消器的约束条件式 (4.11.2) 得

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w}_0 - \mathbf{C}^H \mathbf{C}_a \mathbf{w}_a = \mathbf{g}$$

由于 $\mathbf{C}^H \mathbf{C}_a = \mathbf{O}$, 故上式简化为

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w}_0 = \mathbf{g} \quad (4.11.13)$$

这表明, 滤波器 $\mathbf{w}_0$ 实际上是一个满足约束条件式 (4.11.2) 的固定旁瓣对消器。

• 式 (4.11.12) 所示分解属典型的“正交分解”, 这是因为

$$\langle \mathbf{C}_a \mathbf{w}_a, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_a^H \mathbf{C}_a^H \cdot \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} = 0$$

式中利用了 $\mathbf{C}_a$ 与 $\mathbf{C}$ 的正交性, 即 $\mathbf{C}_a^H \mathbf{C} = \mathbf{O}$ 。

术语“广义旁瓣对消器”是 Griffiths 和 Jim^[82] 最早引入的, 文献 [197], [196], [86] 对广义旁瓣对消器作了进一步的讨论。

广义旁瓣对消器在阵列信号处理、无线通信的多用户检测中有着重要的应用, 例如参见文献 [230]。在下一节, 将介绍它在盲多用户检测中的应用。