

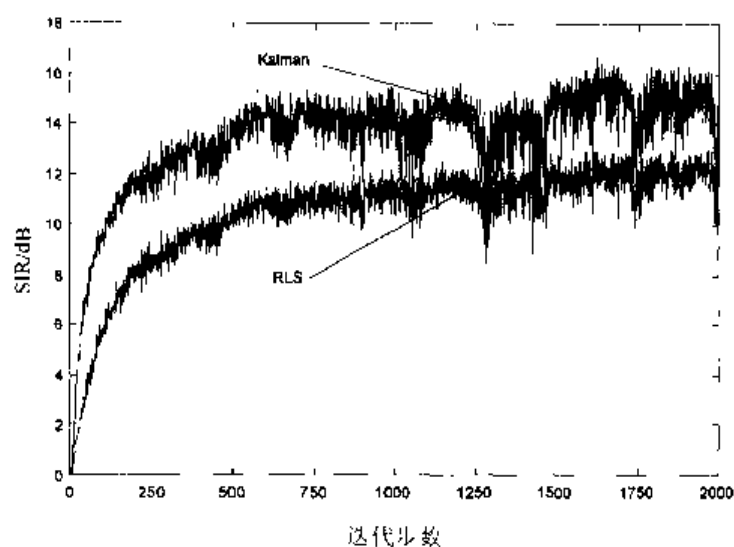


图 4.12.5 时间平均信干比 (同步 CDMA 系统, 非平稳信道)

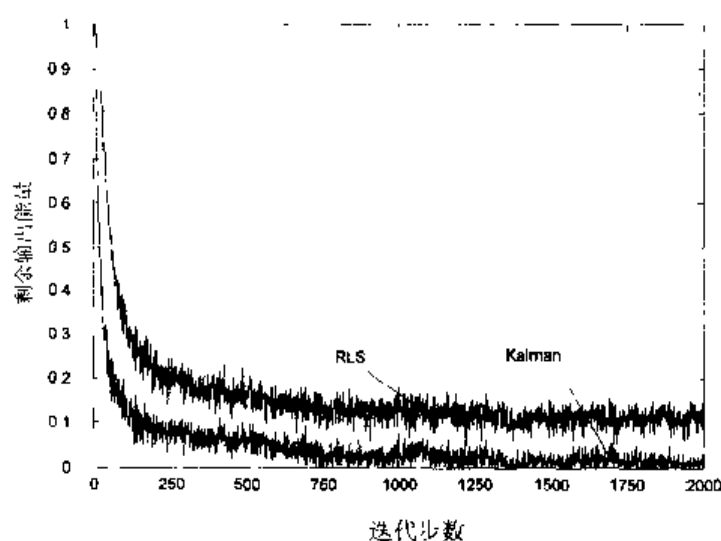


图 4.12.6 时间平均剩余输出能量的测量值 (同步 CDMA 系统, 非平稳信道)

(3) 无论是平稳信道还是非平稳信道, 当  $n > 1200$  时, Kalman 滤波算法的实测剩余输出能量均接近于理论的零值, 而 LMS 和 RLS 算法的实测剩余输出能量则不等于零。

## 本章小结

本章的核心内容是滤波器的优化设计及其自适应实现。首先, 从三种角度介绍了不同的滤波器:

- 从信噪比最大原则出发, 讲述了匹配滤波器;
- 从最小均方误差准则出发, 推导了 Wiener 滤波器;

- 从状态空间模型出发, 介绍了 Kalman 滤波器及其自适应算法。

然后, 围绕 Wiener 滤波器的自适应实现, 依次介绍了 LMS 和 RLS 两种自适应算法。为了克服横向滤波器收敛慢的缺点, 本章介绍了具有对称结构的 LMS 型格型滤波器和具有非对称结构的 LS 格型滤波器。

最后, 作为自适应滤波器的应用, 分别介绍了自适应谱线增强器与陷波器、广义旁瓣对消器和盲自适应多用户检测器。

## 习 题

### 4.1 谐波信号

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f_c = \frac{1}{T}$$

观测样本为

$$y(t) = s(t) + w(t)$$

其中  $w(t)$  是一高斯白噪声, 其均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ 。求匹配滤波器的输出以及它的均值和方差。

### 4.2 假定发射机轮流发射信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ , 其中

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f_c = \frac{1}{T}$$

$$s_2(t) = A \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T$$

忽略信号传输过程中的衰减, 且接收机端的观测噪声为白噪声  $w(t)$ , 其均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ 。现在接收端设计一匹配滤波器抽取信号  $s_1(t)$ , 求该匹配滤波器的输出。

### 4.3 令信号为

$$s(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

并且加性噪声  $n(t)$  是一白噪声, 其均值为 0, 方差为 1。求匹配滤波器的冲激响应  $h_0(t)$ 。

### 4.4 已知信号 $s(t)$ 的自相关函数

$$R_{ss}(\tau) = A \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\tau^2}$$

加性噪声的自相关函数

$$R_{vv}(\tau) = N\delta(\tau)$$

并且信号与噪声不相关, 即  $R_{sv} = E\{s(t)v(t-\tau)\} = 0, \forall \tau$ . 分别求出用观测数据  $x(t) = s(t) + v(t)$  估计  $s(t)$  的非因果 Wiener 滤波器  $H(\omega)$ .

4.5 令  $s(t)$  是一平稳的随机过程, 并且

$$R_{ss}(\tau) = E\{s(t)s(t-\tau)\} = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

$$R_{nn}(\tau) = E\{n(t)n(t-\tau)\} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

同时, 信号与噪声不相关, 即

$$E\{s(t)n(t-\tau)\} = 0, \quad \forall \tau$$

试求因果 Wiener 滤波器的传递函数表达式.

4.6 令  $y(t) = s(t) + n(t)$ . 已知

$$P_{ss}(\omega) = \frac{N_0}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$P_{nn}(\omega) = N \quad \text{和} \quad P_{sn}(\omega) = 0$$

式中  $\alpha > 0$ . 求因果 Wiener 滤波器的传递函数.

4.7 Wiener 滤波器设计 [151].

(1) 观测数据

$$x(n) = d(n) + v(n)$$

式中, 期望信号的相关函数  $R_d(k) = 0.8^{|k|}$ , 并且  $v(n)$  是一个均值为 0, 方差为 1 的白噪声;

(2) 期望信号是一个 AR(1) 过程:

$$d(n) = 0.8d(n-1) + w(n)$$

式中  $w(n)$  是一白噪声, 其均值为 0, 方差为  $\sigma_w^2 = 0.36$ . 期望信号  $d(n)$  与噪声  $v(n)$  不相关, 噪声  $v(n)$  与  $w(n)$  不相关, 并且观测数据  $x(n)$  为实信号.

用 Wiener 滤波器对  $x(n)$  进行滤波, 滤波器输出作为期望信号  $d(n)$  的估计  $\hat{d}(n)$ , 求  $\hat{d}(n)$  的表达式.

4.8 离散时间信号  $s(n)$  是一个一阶的 AR 过程, 其相关函数  $R_s(k) = \alpha^{|k|}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . 令观测数据为  $x(n) = s(n) + v(n)$ , 其中  $s(n)$  和  $v(n)$  不相关, 且  $v(n)$  是一个均值为 0, 方差为  $\sigma_v^2$  的白噪声. 设计 Wiener 滤波器  $H(z)$ .

4.9 令  $H(e^{j\omega})$  是一无限冲激响应 (IIR) Wiener 滤波器, 其冲激响应系数为  $h(i)$ ,  $s(n)$  为期望信号,  $v(n)$  为加性噪声, 它与期望信号不相关。求 Wiener 滤波器的最小均方误差  $J_{\min}$ 。

4.10 假定对观测数据  $y(t) = x(t) + n(t)$  进行直接滤波的滤波器具有传递函数

$$a(t, u) = \frac{m(1+u)^{m-1}}{(1+t^2)}, \quad 0 \leq u \leq t, \quad m > 0$$

求  $y(t)$  的新息过程, 并设计一作用于新息的滤波器  $b(t, s)$ 。

4.11 假设一观测信号  $y(t) = s(t) + n(t)$  的功率谱为

$$P_{yy}(\omega) = \frac{\omega^2 + 25}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}$$

求新息过程  $w(t)$  和信号  $s(t)$  的线性均方估计  $\hat{s}(t)$  的表达式。

4.12 令  $x(t)$  是一个时不变的标量随机变量, 它在加性白噪声  $v(t)$  中被观测, 即  $y(t) = x(t) + v(t)$  为观测数据。若用 Kalman 滤波器自适应估计  $x(t)$ , 试设计 Kalman 滤波器:

- (1) 构造离散时间的状态空间方程。
- (2) 求出状态变量  $x(k)$  的更新公式。

4.13 考虑题 4.12 的两种特殊:

- (1) 加性白噪声  $v(t)$  的方差无穷大;
- (2) 状态变量  $x(t)$  的方差无穷大。

讨论在这两种特殊情况下状态变量估计  $\hat{x}(k)$  的状况。

4.14 AR(1) 过程的 Kalman 滤波估计。状态变量服从 AR(1) 模型:

$$x(n) = 0.8x(n-1) + w(n)$$

式中  $w(n)$  为白噪声, 其均值为 0, 方差  $\sigma_w^2 = 0.36$ 。观测方程为

$$y(n) = x(n) + v(n)$$

其中  $v(n)$  是一个与  $w(n)$  不相关的白噪声, 其均值为 0, 方差  $\sigma_v^2 = 1$ 。用 Kalman 滤波器估计状态变量, 求  $\hat{x}(n)$  的具体表达式。

4.15 一时变系统的状态转移方程和观测方程分别为

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n)$$

和

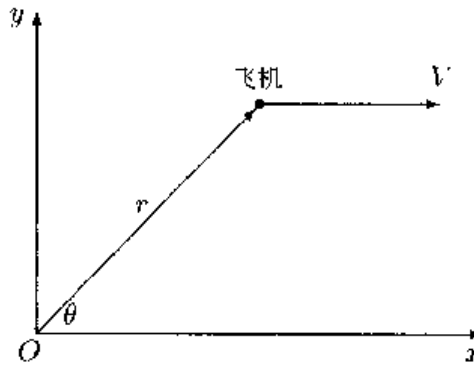
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_2(n)$$

式中

$$\begin{aligned} E\{v_1(n)\} &= 0 \\ E\{v_1(n)v_1^T(k)\} &= \begin{cases} \sigma_1^2 I, & n = k \\ O, & n \neq k \end{cases} \\ E\{v_2(n)v_2^T(k)\} &= \begin{cases} \sigma_2^2 I, & n = k \\ O, & n \neq k \end{cases} \\ E\{v_1(n)v_2^T(k)\} &= O, \quad \forall n, k \\ E\{x(1)x^T(1)\} &= I \end{aligned}$$

式中  $O$  和  $I$  分别为零矩阵和单位矩阵。求  $x(n)$  的更新公式。

4.16 图题 4.16 是二维雷达跟踪的示意图<sup>[113]</sup>。图中, 目标飞机以恒速度  $V$  在  $x$  方向上飞行, 雷达位于原点  $O$ , 飞机到雷达的距离为  $r$ , 方位角为  $\theta$ 。为了使雷达跟踪飞机, 现在拟使用 Kalman 滤波器对飞机的距离  $r$ 、飞机在雷达视线上的速度  $\dot{r}$ 、方位角  $\theta$  和角速度  $\dot{\theta}$  进行自适应估计。试针对二维雷达跟踪问题, 构造离散时间的状态空间方程。



图题 4.16 雷达跟踪的几何示意图

4.17 一时变的实 ARMA 过程由差分方程

$$y(n) + \sum_{i=1}^p a_i(n)y(n-i) = \sum_{i=1}^q a_{p+i}v(n-i) + v(n)$$

描述, 式中  $a_1(n), \dots, a_p(n), a_{p+1}(n), \dots, a_{p+q}(n)$  为 ARMA 模型参数, 过程  $v(n)$  为输入, 而  $y(n)$  为输出。假定输入过程  $v(n)$  是一高斯白噪声, 方差为  $\sigma^2$ 。ARMA 模型参数服从一随机扰动模型:

$$a_k(n+1) = a_k(n) + w_k(n), \quad k = 1, \dots, p, p+1, \dots, p+q$$

式中  $w_k(n)$  是一零均值的高斯白噪声过程, 并且与  $w_j(n), j \neq k$  相互独立, 也与  $v(n)$

独立。定义  $(p+q) \times 1$  维状态向量

$$\mathbf{x}(n) = [a_1(n), \dots, a_p(n), a_{p+1}(n), \dots, a_{p+q}(n)]^T$$

并定义测量矩阵 (这里实质为行向量)

$$\mathbf{C}(n) = [-y(n-1), \dots, -y(n-p), v(n-1), \dots, v(n-q)]$$

试根据以上条件, 求下列问题的解:

- (1) 建立时变 ARMA 过程的状态空间方程;
- (2) 求更新状态向量  $\mathbf{x}(n+1)$  的 Kalman 自适应滤波算法;
- (3) 如何设定初始值?

4.18 在平稳系统的情况下, 若状态转移矩阵  $\mathbf{F}(n+1, n)$  为单位矩阵, 且状态噪声向量为零。证明预测状态误差相关矩阵  $\mathbf{K}(n+1, n)$  与滤波的状态误差相关矩阵  $\mathbf{K}(n)$  相等。

4.19 在无线通信中, 无线信道常用冲激响应已知的 FIR 滤波器作为模型。若信道输出即接收机接收的信号  $y(n)$  由

$$y(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) + w(n)$$

给出, 式中  $\mathbf{h}$  是一  $M \times 1$  向量, 表示信道冲激响应,  $\mathbf{x}(n)$  为一  $M \times 1$  向量, 表示信道输入的当前值和  $M-1$  个以前的发射值;  $w(n)$  为高斯白噪声, 均值为零、方程为  $\sigma_w^2$ 。在时刻  $n$ , 信道输入  $u(n)$  由二进制编码  $\{-1, +1\}$  组成, 与  $w(n)$  统计独立。因此, 状态方程可写成<sup>[110]</sup>

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{e}_1 v(n)$$

式中  $v(n)$  是均值为零、方差为  $\sigma_v^2$  的高斯白噪声, 它与  $w(n)$  独立。矩阵  $\mathbf{A}$  是一个  $M \times M$  矩阵, 其元素

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

向量  $\mathbf{e}_1$  是一个  $M \times 1$  向量, 其元素定义为

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在已知信道模型和含噪声的观测值  $y(n)$  的情况下, 使用 Kalman 滤波构造一均衡器,

它能够在某个延迟时间  $(n+D)$  给出信道输入  $v(n)$  的一估计值, 其中  $0 \leq D \leq M-1$ . 证明: 所构造的均衡器是一个无限冲激响应滤波器, 其系数由两组不同的参数决定:

- (a)  $M \times 1$  信道冲激响应向量;
- (b) Kalman 增益向量 (它是一个  $M$  维的列向量)。

4.20 考虑一码分多址 (CDMA) 系统, 它共有  $K$  个用户。假定用户 1 为期望用户, 其特征波形向量  $s_1$  为已知, 并满足单位能量条件  $\langle s_1, s_1 \rangle = s_1^T s_1 = 1$ 。现有一接收机的观测数据向量为  $y(n)$ , 它包含了  $K$  个用户信号的线性混合。为了检测期望用户的信号, 我们希望设计一多用户检测器  $c_1$ , 使检测器的输出能量最小化。若多用户检测器服从约束条件  $c_1 = s_1 + U_i w$ , 其中  $U_i$  称为干扰子空间, 意即它的列张成干扰子空间。

- (1) 求线性检测器  $c_1$  的 LMS 自适应算法。
- (2) 如何计算干扰子空间  $U_i$ ?

4.21 证明下列关系为真:

$$X_{1,k}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k^T \\ X_{1,k-1}(n-1) \end{bmatrix}$$

和

$$P_{1,k}(n) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^T \\ \mathbf{0}_{k-1} & P_{0,k-1}(n-1) \end{bmatrix}$$

式中  $\mathbf{0}_k$  为  $k \times 1$  维零向量。

4.22 如果  $j$  阶最小二乘后向预测误差向量由

$$P_{0,j-1}^\perp(n) z^{-j} \mathbf{x}(n) = \mathbf{e}_j^b(n)$$

给出, 证明

$$P_{1,j}^\perp(n) z^{-j-1} \mathbf{x}(n) = z^{-1} \mathbf{e}_j^b(n)$$

4.23 给定一时间信号  $\mathbf{v}(n) = [v(1), v(2), v(3), \dots, v(n)]^T = [4, 2, 4, \dots]^T$ 。计算

- (1) 数据向量  $\mathbf{v}(2)$  和  $\mathbf{v}(3)$ 。
- (2) 向量  $z^{-1}\mathbf{v}(2)$  和  $z^{-2}\mathbf{v}(2)$ 。
- (3) 向量  $z^{-1}\mathbf{v}(3)$  和  $z^{-2}\mathbf{v}(3)$ 。

若令  $\mathbf{u} = z^{-1}\mathbf{v}(n)$ , 再计算

- (4) 投影矩阵  $P_u(2)$  和  $P_u(3)$ 。
- (5) 利用  $\mathbf{u}(n)$  求  $\mathbf{v}(n)$  的最小二乘预测。这一预测称为  $\mathbf{v}(n)$  的一步前向预测。
- (6) 前向预测误差向量  $\mathbf{e}_1^f(2)$  和  $\mathbf{e}_1^f(3)$ 。

4.24 已知前向和后向预测残差分别为

$$\begin{aligned}\epsilon_m^f(n) &= \langle \mathbf{x}(n), \mathbf{P}_{1,m}^\perp(n) \mathbf{x}(n) \rangle \\ \epsilon_m^b(n) &= \langle z^{-m} \mathbf{x}(n), \mathbf{P}_{1,m}^\perp(n) z^{-m} \mathbf{x}(n) \rangle\end{aligned}$$

和偏相关系数  $\Delta_{m-1}(n) = \langle \mathbf{e}_m^f(n), z^{-1} \mathbf{e}_m^b(n) \rangle$ 。证明

$$\begin{aligned}\epsilon_{m+1}^f(n) &= \epsilon_m^f(n) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^b(n-1)} \\ \epsilon_{m+1}^b(n) &= \epsilon_m^b(n-1) - \frac{\Delta_{m+1}^2(n)}{\epsilon_m^f(n)}\end{aligned}$$

4.25 构造一格型 IIR 滤波器, 使其传递函数为

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1.89z + 0.89}$$

4.26 已知信号向量为  $\mathbf{s}(n) = [\text{sgn}(\cos(2\pi 155n)), \sin(2\pi 800n), \sin(2\pi 300n + 6 \times \cos(2\pi 60n)), \sin(2\pi 90n), v(n)]^T$ , 其中  $v(n)$  是在  $[-1, 1]$  内均匀分布的噪声;  $\text{sgn}(x) = +1$  (若  $x > 0$ ) 或  $-1$  (若  $x < 0$ ) 为符号函数。矩阵  $\mathbf{A}$  为信号混合矩阵, 固定为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.9966 & 0.9988 & 0.9982 & 0.9985 \\ 0.9966 & 1.0000 & 0.9963 & 0.9995 & 0.9889 \\ 0.9988 & 0.9963 & 1.0000 & 0.9972 & 0.9968 \\ 0.9982 & 0.9995 & 0.9972 & 1.0000 & 0.9996 \\ 0.9985 & 0.9989 & 0.9968 & 0.9996 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

令  $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n)$  为观测数据向量, 采样频率取 10 kHz。现在希望根据观测数据自适应调制一分离矩阵  $\mathbf{W}$  得到分离的信号  $\mathbf{x}(n) = \mathbf{W}(n)\mathbf{x}(n)$ , 这一问题称为盲信号分离。试用 LMS 算法

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu [\mathbf{g}(\mathbf{y}(n))\mathbf{y}^T(n) - \mathbf{y}(n)\mathbf{g}(\mathbf{y}^T(n))] \mathbf{W}(n)$$

实现盲信号分离, 其中  $\mathbf{g}(n) = [g_1(y_1(n)), \dots, g_5(y_5(n))]^T$  是一非线性变换矩阵。取  $g_i(y_i(n)) = y_i^3(n)$  和白适应步长  $\mu = 60 \times 10^{-4}$ 。

在盲信号分离中, 常使用串音误差

$$E = \sum_{i=1}^5 \left( \sum_{j=1}^5 \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^5 \left( \sum_{i=1}^5 \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{kj}|} - 1 \right)$$

作为衡量信号分离的性能指标, 式中  $c_{ij}$  是矩阵  $\mathbf{W}(n)\mathbf{A}$  的第  $(i, j)$  个元素。总样本个数取作 4000, 画出 200 次独立仿真实验的串音误差随样本个数变化的均值曲线图。

## 第 5 章 高阶统计分析

在前面几章里，我们使用的信号处理方法是以前二阶统计量（时域为相关函数、频域为功率谱）作为数学分析工具的。相关函数和功率谱存在一些缺点，例如它们具有等价性，不能辨识非最小相位系统；又如，它们对加性噪声敏感，一般只能处理加性白噪声的观测数据。为了克服这些缺点，就必须使用三阶或更高阶数的统计量，它们统称高阶统计量。基于高阶统计量的信号分析称为信号的高阶统计分析，也称非高斯信号处理。现在，高阶统计量已成为信号处理的一种有力数学工具。

早在 20 世纪 60 年代，高阶统计量就已被数学家们所研究，但由于当时没有找到应用对象，这一研究并没有获得比较大的发展。只是到了 20 世纪 80 年代后期，信号处理的专家们才使这一研究点燃了燎原之火，并迅速发展成为现代信号处理的一个重要分支。在本章中，我们将系统地介绍信号高阶统计分析的理论、方法及一些典型应用。

### 5.1 矩与累积量

最常用的高阶统计量是高阶累积量及高阶谱。本节给出高阶矩和高阶累积量的定义。

#### 5.1.1 高阶矩与高阶累积量的定义

特征函数方法是概率论与数理统计的主要分析工具之一。利用特征函数，很容易引出高阶矩和高阶累积量的定义。

考查一连续的随机变量  $x$ 。若它的概率密度函数为  $f(x)$ ，而  $g(x)$  是任意函数，则  $g(x)$  的数学期望定义为

$$E\{g(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (5.1.1)$$

特别地，当  $g(x) = e^{j\omega x}$  时，则有

$$\Phi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} E\{e^{j\omega x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\omega x}dx \quad (5.1.2)$$

并称之为第一特征函数。换言之，第一特征函数是概率密度函数  $f(x)$  的 Fourier 反变换。由于概率密度函数  $f(x) \geq 0$ ，所以第一特征函数  $\Phi(\omega)$  在原点有最大值，即

$$|\Phi(\omega)| \leq \Phi(0) = 1 \quad (5.1.3)$$

求第一特征函数的  $k$  阶导数，得

$$\Phi^k(\omega) = \frac{d^k \Phi(\omega)}{d\omega^k} = j^k E\{x^k e^{j\omega x}\} \quad (5.1.4)$$

随机变量  $x$  的  $k$  阶 (原点) 矩  $m_k$  和中心矩  $\mu_k$  分别定义为

$$m_k \stackrel{\text{def}}{=} E\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (5.1.5a)$$

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} E\{(x - \eta)^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^k f(x) dx \quad (5.1.5b)$$

式中  $\eta = E\{x\}$  代表随机变量  $x$  的一阶矩即均值。对于零均值的随机变量  $x$ ，其  $k$  阶原点矩  $m_k$  和中心矩  $\mu_k$  等价。在下面的讨论中，均令随机变量和随机信号的均值为零。

显然，在式 (5.1.4) 中令  $\omega = 0$ ，即可求出  $x$  的  $k$  阶矩为

$$m_k = E\{x^k\} = (-j)^k \left. \frac{d^k \Phi(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = (-j)^k \Phi^{(k)}(0) \quad (5.1.6)$$

由于随机变量  $x$  的  $k$  阶矩  $E\{x^k\}$  可以由第一特征函数生成，故常将第一特征函数  $\Phi(\omega)$  称为矩生成函数。

第一特征函数的自然对数称为第二特征函数，记作

$$\Psi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \Phi(\omega) \quad (5.1.7)$$

与  $k$  阶矩的定义式 (5.1.6) 相类似，也可以定义随机变量  $x$  的  $k$  阶累积量为

$$c_{kx} = (-j)^k \left. \frac{d^k \ln \Phi(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = (-j)^k \Psi^{(k)}(0) \quad (5.1.8)$$

鉴于此，第二特征函数又称累积量生成函数。

关于单个随机变量  $x$  的上述讨论很容易推广到多个随机变量。令  $x_1, \dots, x_k$  是  $k$  个连续随机变量，它们的联合概率密度函数为  $f(x_1, \dots, x_k)$ ，则这  $k$  个随机变量的第一联合特征函数定义为

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E\{e^{j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_k x_k)}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k) e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_k x_k)} dx_1 \dots dx_k \end{aligned} \quad (5.1.9)$$