

定义 5.3.1 若高阶矩 $m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})$ 是绝对可求和的, 即

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| < \infty \quad (5.3.1)$$

则 k 阶矩谱定义为 k 阶矩的 $(k-1)$ 维离散 Fourier 变换, 即

$$M_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \cdots + \omega_{k-1} \tau_{k-1})} \quad (5.3.2)$$

定义 5.3.2 假定高阶累积量 $c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})$ 是绝对可求和的, 即

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| < \infty \quad (5.3.3)$$

则 k 阶累积量谱定义为 k 阶累积量的 $(k-1)$ 维离散 Fourier 变换, 即有

$$S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \cdots + \omega_{k-1} \tau_{k-1})} \quad (5.3.4)$$

高阶矩、高阶累积量、高阶矩谱和高阶累积量谱是主要的四种高阶统计量。在一般情况下, 多使用高阶累积量和高阶累积量谱, 而高阶矩和高阶矩谱则很少使用。鉴于此, 常将高阶累积量谱简称高阶谱, 虽然高阶谱是高阶矩谱和高阶累积量谱二者的合称。

高阶谱也叫多谱, 意即多个频率的谱。特别地, 三阶谱 $S_{3x}(\omega_1, \omega_2)$ 称为双谱 (bispectrum), 而四阶谱 $S_{4x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 常称为三谱 (trispectrum), 因为它们分别是两个和三个频率的能量谱。习惯上, 我们使用 $B_x(\omega_1, \omega_2)$ 表示双谱, 用 $T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 表示三谱。下面重点分析双谱。

双谱具有以下性质。

(1) 双谱一般为复数, 即

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = |B_x(\omega_1, \omega_2)| e^{j\phi_B(\omega_1, \omega_2)} \quad (5.3.5)$$

式中 $|B_x(\omega_1, \omega_2)|$ 和 $\phi_B(\omega_1, \omega_2)$ 分别表示双谱的幅值和相位。

(2) 双谱是双周期函数, 两个周期均为 2π , 即

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = B_x(\omega_1 + 2\pi, \omega_2 + 2\pi) \quad (5.3.6)$$

(3) 双谱具有以下对称性:

$$\begin{aligned}
 B_x(\omega_1, \omega_2) &= B_x(\omega_2, \omega_1) \\
 &= B_x^*(-\omega_1, -\omega_2) = B_x^*(-\omega_2, \omega_1) \\
 &= B_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) = B_x(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \\
 &= B_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = B_x(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \quad (5.3.7)
 \end{aligned}$$

作为一个例子, 我们来证明 $B_x(\omega_1, \omega_2) = B_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2)$ 。由累积量性质 2 知

$$\begin{aligned}
 B_x(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{3x}(m, n) e^{-j(m\omega_1 + n\omega_2)} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{3x}(-m, n-m) e^{-j[m(\omega_1 + \omega_2) + (n-m)\omega_2]} \\
 &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) e^{-j[(-\omega_1 - \omega_2)\tau_1 + \omega_2\tau_2]} \\
 &= B_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2)
 \end{aligned}$$

将双谱的定义区域分成 12 个扇形区, 如图 5.3.1 所示。于是, 由双谱的对称性知, 只要知道三角区 $\omega_2 \geq 0, \omega_1 \geq \omega_2, \omega_1 + \omega_2 \leq \pi$ (如阴影部分所示) 内的双谱, 即可完全描述所有的双谱, 因为其他扇形区的双谱均可利用对称性由三角区的双谱获得。

Pflug 等人^[147]指出, 一实信号的三谱具有 96 个对称区。

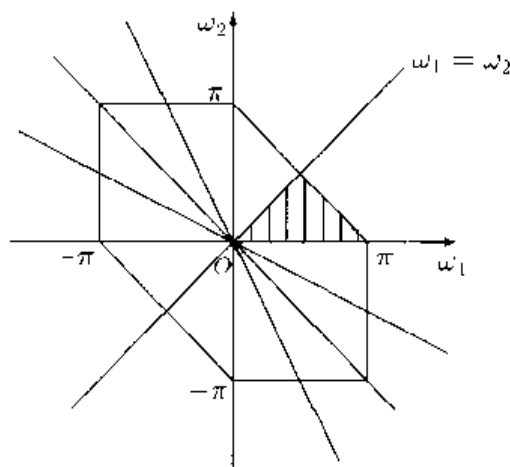


图 5.3.1 双谱的对称区域

文献 [118] 给出了方波、余弦波、双脉冲波、锯齿波等几种典型信号的三阶累积量与双谱的图形, 如图 5.3.2 ~ 图 5.3.5 所示。

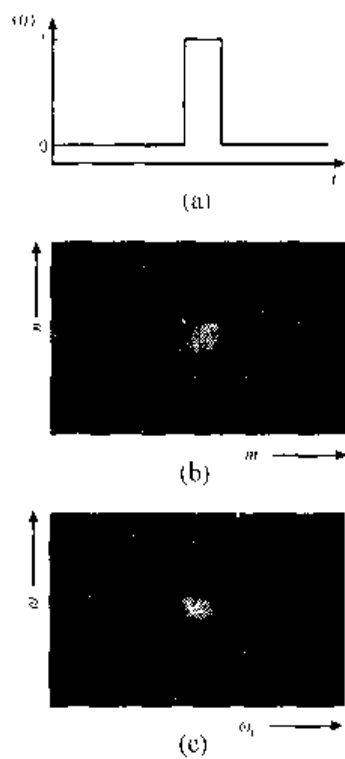


图 5.3.2 方波信号

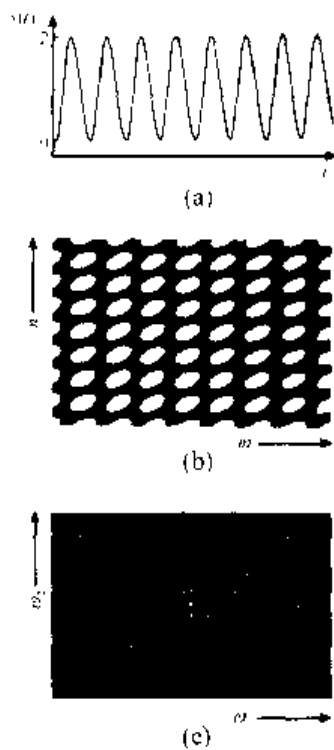


图 5.3.3 余弦波信号

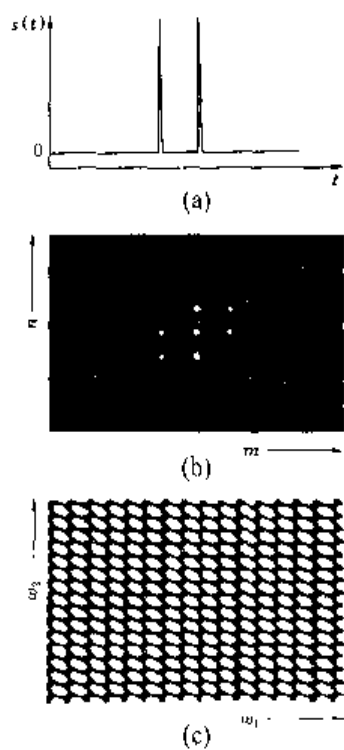


图 5.3.4 双脉冲信号

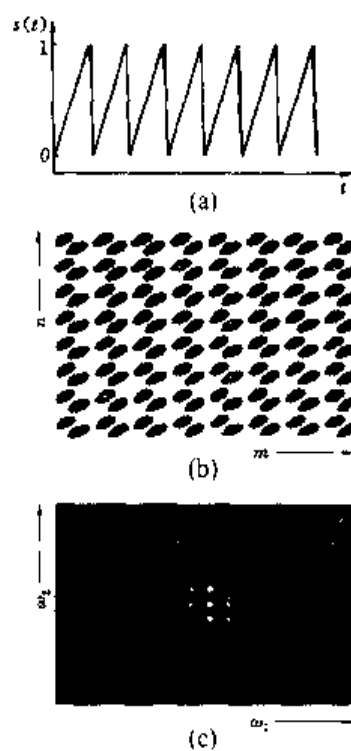


图 5.3.5 锯齿波信号

以上各图中, (a) 为信号的波形; (b) 为信号的三阶累积量; (c) 是信号的双谱。

5.3.2 双谱估计

3.1.2 节扼要地复习了由观测数据估计功率谱的两种周期图方法 (直接法和间接法)。将这些方法加以推广, 即可得到双谱估计的两种非参数化方法。

令 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ 是零均值化的观测样本, 其采样频率为 f_s 。

算法 5.3.1 (双谱估计的直接法)

步骤 1 将所给数据分成 K 段, 每段含 M 个观测样本, 记作 $x^{(k)}(0), x^{(k)}(1), \dots, x^{(k)}(M-1)$, 其中 $k = 1, \dots, K$ 。注意, 这里允许两段相邻数据之间有重叠。

步骤 2 计算离散 Fourier 变换 (DFT) 系数

$$X^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x^{(k)}(n) e^{-j2\pi n\lambda/M} \quad (5.3.8)$$

式中 $\lambda = 0, 1, \dots, M/2; k = 1, \dots, K$ 。

步骤 3 计算 DFT 系数的三重相关:

$$\hat{b}_k(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\Delta_0^2} \sum_{i_1=-L_1}^{L_1} \sum_{i_2=-L_1}^{L_1} X^{(k)}(\lambda_1 + i_1) X^{(k)}(\lambda_2 + i_2) X^{(k)}(-\lambda_1 - \lambda_2 - i_1 - i_2) \quad (5.3.9)$$

$k = 1, \dots, K; 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq f_s/2$

其中 $\Delta_0 = f_s/N_0$, 而 N_0 和 L_1 应选择为满足 $M = (2L_1 + 1)N_0$ 的值。

步骤 4 所给数据 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ 的双谱估计由 K 段双谱估计的平均值给出, 即

$$\hat{B}_D(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{b}_k(\omega_1, \omega_2) \quad (5.3.10)$$

式中

$$\omega_1 = \frac{2\pi f_s}{N_0} \lambda_1, \quad \omega_2 = \frac{2\pi f_s}{N_0} \lambda_2$$

算法 5.3.2 (双谱估计的间接法)

步骤 1 将原 N 个数据分为 K 段, 每段含 M 个样本。

步骤 2 设 $x^{(k)}(0), x^{(k)}(1), \dots, x^{(k)}(M-1)$ 为第 k 段数据, 计算各段的三阶累

积量的估计值:

$$c^{(k)}(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{n=M_1}^{M_2} x^{(k)}(n)x^{(k)}(n-i)x^{(k)}(n+j), \quad k=1, \dots, K \quad (5.3.11)$$

式中 $M_1 = \max(0, -i, -j)$ 和 $M_2 = \min(M-1, M-1-i, M-1-j)$ 。

步骤 3 取所有段的三阶累积量的平均值作为整个观测数据组的三阶累积量估计, 即

$$\hat{c}(i, j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c^{(k)}(i, j) \quad (5.3.12)$$

步骤 4 计算双谱估计

$$\hat{B}_{IN}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=-L}^L \sum_{l=-l}^L \hat{c}(i, l) w(i, l) e^{-j\omega_1 i + j\omega_2 l} \quad (5.3.13)$$

式中 $L < M-1$, 而 $w(i, l)$ 为二维滞后窗函数。

双谱估计的二维窗函数 $w(m, n)$ 最早由 Sasaki, Sato 与 Yamashita^[165] 推导和讨论。他们证明了, 二维窗函数必须满足以下四个条件:

- (1) $w(m, n) = w(n, m) = w(-m, n-m) = w(m-n, -n)$;
- (2) $w(m, n) = 0$, 若 (m, n) 位于累积量估计值 $\hat{c}_{3x}(m, n)$ 的支持区以外;
- (3) $w(0, 0) = 1$ (归一化条件);
- (4) $W(\omega_1, \omega_2) \geq 0, \forall (\omega_1, \omega_2)$ 。

容易看出, 约束条件 (1) 能够保证 $c_{3x}(m, n)w(m, n)$ 具有与三阶累积量 $c_{3x}(m, n)$ 相同的对称性。值得指出的是, 满足上述四个约束条件的二维窗函数 $w(m, n)$ 可以利用一维滞后窗函数 $d(m)$ 构造, 即

$$w(m, n) = d(m)d(n)d(n-m) \quad (5.3.14)$$

式中, 一维滞后窗 $d(m)$ 应该满足下列条件:

$$d(m) = d(-m) \quad (5.3.15a)$$

$$d(m) = 0, \quad m > L \quad (5.3.15b)$$

$$d(0) = 1 \quad (5.3.15c)$$

$$D(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \quad (5.3.15d)$$

式中 $D(\omega)$ 是 $d(n)$ 的 Fourier 变换。

容易验证, 以下三种窗函数均满足上述约束条件。

(1) 最优窗

$$d_{\text{opt}}(m) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi m}{L} \right| \left(1 - \frac{|m|}{L} \right) \cos \frac{\pi m}{L}, & |m| \leq L \\ 0, & |m| > L \end{cases} \quad (5.3.16)$$

(2) Parzen 窗

$$d_{\text{Parzen}}(m) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{|m|}{L} \right)^2 + 6 \left(\frac{|m|}{L} \right)^3, & |m| \leq L/2 \\ 2 \left(1 - \frac{|m|}{L} \right)^3, & L/2 < |m| \leq L \\ 0, & |m| > L \end{cases} \quad (5.3.17)$$

(3) 谱域均匀窗

$$W_{\text{uniform}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3\Omega_0}, & |\omega| \leq \Omega_0 \\ 0, & |\omega| > \Omega_0 \end{cases} \quad (5.3.18)$$

式中, $|\omega| = \max(|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_1 + \omega_2|)$, 且 $\Omega_0 = a_0/L$, 而 a_0 是一常数。

为了评价上述三种窗函数, Sasaki 等人定义了双谱偏差谱 J 和近似归一化双谱方差 V , 即有

$$J = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 - \omega_2)^2 W(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (5.3.19)$$

和

$$V = \sum_{m=-L}^L \sum_{n=-L}^L |w(m, n)|^2 \quad (5.3.20)$$

事实上, V 代表窗函数的能量。

表 5.3.1 列出了三种窗函数性能评价的结果。

表 5.3.1 三种双谱估计窗函数的性能

窗函数	偏差上确界 (J)	方差 (V)
最优窗	$J_{\text{opt}} = \frac{6\pi^2}{L^2}$	$V_{\text{opt}} : 0.05L^2$
Parzen 窗	$J_{\text{Parzen}} = \frac{72}{L^2}$	$V_{\text{Parzen}} : 0.037L^2$
均匀窗	$J_{\text{uniform}} = \frac{5}{6} \left(\frac{a_0}{L} \right)^2$	$V_{\text{uniform}} : \frac{4\pi}{3} \left(\frac{L}{a_0} \right)^2$

从表中可以看出, 在 $V_{\text{uniform}} = V_{\text{opt}}$ 的条件下 $J_{\text{uniform}} \approx 3.7J_{\text{opt}}$, 即均匀窗的偏差上确界比最优窗的明显大。比较最优窗和 Parzen 窗还知, $J_{\text{Parzen}} = 1.215J_{\text{opt}}$ 和 $V_{\text{Parzen}} = 0.74V_{\text{opt}}$ 。在具有最小的偏差上确界的意义上, 最优窗函数优于其他两种窗函数。

文献 [195] 证明, 双谱估计是渐近无偏的和一致的, 它们服从渐近复正态分布。对于足够大的 M 和 N 值, 间接法和直接法两者都给出渐近无偏的双谱估计, 即有

$$\mathbf{E}\{\hat{B}_{\text{IN}}(\omega_1, \omega_2)\} \approx \mathbf{E}\{\hat{B}_{\text{D}}(\omega_1, \omega_2)\} \approx B(\omega_1, \omega_2) \quad (5.3.21)$$

并且间接法和直接法分别具有如下渐近方差:

$$\begin{aligned} \text{var}\{\text{Re}[\hat{B}_{\text{IN}}(\omega_1, \omega_2)]\} &= \text{var}\{\text{Im}[\hat{B}_{\text{IN}}(\omega_1, \omega_2)]\} \\ &\approx \frac{V}{(2L+1)^2 K} P(\omega_1) P(\omega_2) P(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{var}\{\text{Re}[\hat{B}_{\text{D}}(\omega_1, \omega_2)]\} &= \text{var}\{\text{Im}[\hat{B}_{\text{D}}(\omega_1, \omega_2)]\} \\ &\approx \frac{1}{KM_1} P(\omega_1) P(\omega_2) P(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

式中, V 如式 (5.3.20) 定义, $P(\omega)$ 代表信号 $\{x(n)\}$ 的真实功率谱密度。注意, 当在间接法估计双谱的公式 (5.3.13) 中不使用窗函数时, 则有 $V/(2L+1)^2 = 1$ 。若直接法在频域无平滑 (即 $M_1 = 1$), 则式 (5.3.22) 和式 (5.3.23) 等价。

5.4 非高斯信号与线性系统

概率密度分布为非正态分布的信号统称非高斯信号。如 5.1 节所述, 高斯信号的高阶累积量恒等于零, 而非高斯信号一定存在某个高阶的累积量不恒为零。在本节, 我们对高斯信号与非高斯信号的区分作进一步的讨论。

5.4.1 亚高斯和超高斯信号

在信号的高阶统计分析中, 我们常常对实信号 $x(t)$ 的高阶统计量的某个特殊切片感兴趣。现在考查各滞后均等于零时高阶累积量的特殊切片 $c_{3x}(0, 0) = \mathbf{E}\{x^3(t)\}$ 和 $c_{4x}(0, 0, 0) = \mathbf{E}\{x^4(t)\} - 3E^2\{x^2(t)\}$, 其中 $E^2\{x^2(t)\}$ 表示 $\mathbf{E}\{x^2(t)\}$ 的平方。由这两个特殊切片, 可以引出两个重要的术语。

定义 5.4.1 实信号 $x(t)$ 的斜度 (skewness) 定义为

$$S_r \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\{x^3(t)\} \quad (5.4.1)$$

峰度 (kurtosis) 定义为

$$K_x \stackrel{\text{def}}{=} E\{x^4(t)\} - 3E^2\{x^2(t)\} \quad (5.4.2)$$

而

$$K_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E\{x^4(t)\}}{E^2\{x^2(t)\}} - 3 \quad (5.4.3)$$

称为归零化峰度。

对于任何一个信号, 若其斜度等于零, 则其三阶累积量恒等于零。斜度等于零意味着信号服从对称分布, 而斜度不等于零的信号必定服从非对称分布。换言之, 斜度实际上是衡量一个信号的分布偏离对称分布的歪斜程度。

峰度还有另外一种定义。

定义 5.4.2 实信号的归一化峰度定义为

$$K_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E\{x^4(t)\}}{E^2\{x^2(t)\}} \quad (5.4.4)$$

峰度不仅可以用来区分高斯和非高斯信号, 而且还可进一步将非高斯信号分为亚高斯 (sub-Gaussian) 信号和超高斯 (super-Gaussian) 信号。

(1) 基于归零化峰度的信号分类

- 峰度等于零的信号为高斯信号;
- 峰度小于零的信号为亚高斯信号;
- 峰度大于零的信号为超高斯信号。

(2) 基于归一化峰度的信号分类

- 归一化峰度等于 3 的实信号为高斯信号;
- 归一化峰度小于 3 的实信号为亚高斯信号;
- 归一化峰度大于 3 的实信号为超高斯信号。

可以看出, 亚高斯信号的峰度低于高斯信号的峰度, 超高斯信号的峰度高于高斯信号的峰度。这就是为什么分别称它们为亚高斯和超高斯信号的原因。在无线通信中使用的数字调制信号多为亚高斯信号。

5.4.2 非高斯信号通过线性系统

考查使用离散时间的非高斯噪声 $e(n)$ 激励图 5.4.1 所示单输入单输出时不变线性系统的情况。

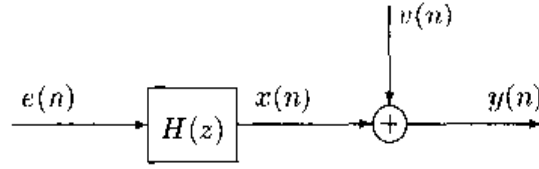


图 5.4.1 单输入单输出时不变系统

假定加性噪声 $v(n)$ 是高斯有色噪声, 并且与 $e(n)$ 统计独立, 从而与系统输出 $x(n)$ 也统计独立。根据例 5.2.3 知,

$$\begin{aligned} c_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) &= c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) + c_{kv}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \\ &= c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \end{aligned}$$

另一方面, 由于系统输出 $x(n)$ 等于输入 $e(n)$ 与系统冲激响应的卷积, 即

$$x(n) = e(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e(n-i) \quad (5.4.5)$$

利用这一结果, 并由累积量的定义和性质 1 及性质 5 的反复应用, 即可得到

$$\begin{aligned} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) &= \text{cum}[x(n), x(n+\tau_1), \dots, x(n+\tau_{k-1})] \\ &= \text{cum} \left(\sum_{i_1=-\infty}^{\infty} h(i_1)e(n-i_1), \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} h(i_2)e(n+\tau_1-i_2), \right. \\ &\quad \left. \dots, \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h(i_k)e(n+\tau_{k-1}-i_k) \right) \\ &= \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h(i_1) \dots h(i_k) \text{cum}[e(n-i_1), \\ &\quad e(n+\tau_1-i_2), \dots, e(n+\tau_{k-1}-i_k)] \end{aligned}$$

利用累积量定义 $c_{ke}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \text{cum}[e(n), e(n+\tau_1), \dots, e(n+\tau_{k-1})]$, 上式可写作

$$\begin{aligned} c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) &= \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} h(i_1)h(i_2) \dots h(i_k) \times \\ &\quad c_{ke}(\tau_1+i_1-i_2, \dots, \tau_{k-1}+i_1-i_k) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

这一公式描述了系统输出信号的累积量与输入噪声的累积量、系统冲激响应之间的关系。

对式 (5.4.6) 作 $k-1$ 维 Fourier 变换和 Z 变换, 即可得到另外两个重要公式:

$$\begin{aligned} S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \\ = S_{ke}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})H(\omega_1) \cdots H(\omega_{k-1})H(-\omega_1 - \cdots - \omega_{k-1}) \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

和

$$\begin{aligned} S_{kx}(z_1, \dots, z_{k-1}) \\ = S_{ke}(z_1, \dots, z_{k-1})H(z_1) \cdots H(z_{k-1})H(-z_1 - \cdots - z_{k-1}) \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

式中 $H(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-j\omega i}$ 和 $H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z^{-i}$ 分别表示系统传递函数及其 Z 变换形式。式 (5.4.7) 描述了系统输出信号的高阶谱与输入信号的高阶谱、系统传递函数之间的关系, 而式 (5.4.8) 是式 (5.4.7) 的 Z 变换形式。

式 (5.4.6) ~ 式 (5.4.8) 最早是 Bartlett^[14] 得到的, 不过他当时只考虑了 $k=2, 3, 4$ 的情况。后来, Brillinger 与 Rosenblatt^[25] 把这三个公式推广到任意 k 阶。因此, 常将式 (5.4.6) ~ 式 (5.4.8) 称为 Bartlett-Brillinger-Rosenblatt 公式, 简称 BBR 公式。

特别地, 当系统的输入 $e(n)$ 为独立同分布的高阶白噪声时, 式 (5.4.6) ~ 式 (5.4.8) 简化为

$$c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \gamma_{ke} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1) \cdots h(i+\tau_{k-1}) \quad (5.4.9)$$

$$S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \gamma_{ke} H(\omega_1) \cdots H(\omega_{k-1})H(-\omega_1 - \cdots - \omega_{k-1}) \quad (5.4.10)$$

和

$$S_{kx}(z_1, \dots, z_{k-1}) = \gamma_{ke} H(z_1) \cdots H(z_{k-1})H(z_1^{-1} \cdots z_{k-1}^{-1}) \quad (5.4.11)$$

为了方便使用, 兹将 $k=2, 3, 4$ 的 BBR 公式归纳、列写于下:

• 累积量的 BBR 公式

$$c_{2x}(\tau) = R_x(\tau) = \sigma_e^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau) \quad (5.4.12a)$$

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2) = \gamma_{3e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)h(i+\tau_2) \quad (5.4.12b)$$

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \gamma_{4e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)h(i+\tau_2)h(i+\tau_3) \quad (5.4.12c)$$