- 谱、双谱和三谱的 BBR 公式

$$P_x(\omega) = \sigma_e^2 H(\omega) H^*(\omega) = \sigma_e^2 |H(\omega)|^2 \tag{5.4.13a}$$

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{3e} H(\omega_1) H(\omega_2) H(-\omega_1 - \omega_2) \tag{5.4.13b}$$

$$T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \gamma_{3e} H(\omega_1) H(\omega_2) H(\omega_3) H(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \tag{5.4.13c}$$

上述 BBR 公式今后将经常使用. 作为一个例子, 我们来考虑 3 阶累积量的特殊切片 $c_{3x}(m) = c_{3x}(m, m)$, 常称之为对角切片。

由累积量的 BBR 公式 (5.4.9) 知, 对角切片的三阶累积量可写作

$$c_{3x}(m) = \gamma_{ke} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) h^2(i+m) \tag{5.4.14}$$

其 Z 变换为

$$\begin{aligned} C(z) &= \gamma_{3e} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) h^2(i+m) \right] z^{-m} \\ &= \gamma_{3e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) z^i \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^2(i+m) z^{-(i+m)} \\ &= \gamma_{3e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) z^i \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k) z^{-k} \\ &= \gamma_{3e} H(z^{-1}) H_2(z) \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

式中

$$H(z^{-1}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) z^i \tag{5.4.16a}$$

$$H_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k) z^{-k} = H(z) * H(z) \tag{5.4.16b}$$

注意, $h^2(k) = h(k)h(k)$ 为乘积形式, 乘积 $a(k)b(k)$ 的 Z 变换对应为卷积 $A(z) * B(z)$。

由于功率谱 $P(z) = \sigma_e^2 H(z) H(z^{-1})$, 故在式 (5.4.15) 两边同乘 $\sigma_e^2 H(z)$ 后, 即有

$$H_2(z) P(z) = \frac{\sigma_e^2}{\gamma_{3e}} H(z) C(z) \tag{5.4.17}$$

三阶累积量对角切片 $c_{3x}(m)$ 的 Z 变换 $C(z)$ 称为 $1\frac{1}{2}$ 谱, 它与功率谱 $P(z)$ 之间的关系式 (5.4.17) 是文献 [74] 推导的. 这一关系在 FIR 系统辨识的 q 切片方法中起重要的作用 (详见 5.5 节)。

5.5 FIR 系统辨识

有限冲激响应 (FIR) 滤波器在无线通信、雷达等信号处理中起着重要的作用。FIR 系统的输出等价于一 MA 过程。在第 3 章中，我们已看到自相关函数和 MA 参数之间的关系是一组非线性方程，而且由自相关等价知，利用自相关函数只能辨识最小相位的 FIR 系统。与基于自相关的 FIR 系统辨识相比，用高阶累积量辨识 FIR 系统的方法不仅是线性的，而且还可适用于非最小相位系统的辨识。

5.5.1 RC 算法

考虑下面的平稳非高斯 MA(q) 过程：

$$x(n)=\sum_{i=0}^{q}b(i)e(n-i),\quad e(n)\sim \text{IID}(0,\sigma_e^2,\gamma_{ke}) \tag{5.5.1}$$

其中 $b(0)=1$，$b(q)\neq 0$，而 $e(n)\sim \text{IID}(0,\sigma_e^2,\gamma_{ke})$ 表示 $e(n)$ 是一个独立同分布 (IID) 过程，其均值为 0，方差为 σ_e^2，k 阶累积量为 γ_{ke}。不失一般性，我们假定对某个 $k>2$ 有 $\gamma_{ke}\neq 0$。

考查两个不同的 FIR 系统，它们的输出分别由下面的差分方程描述：

$$\text{FIR 系统 1:}\quad x(n)=e(n)+0.3e(n-1)-0.4e(n-2) \tag{5.5.2a}$$

$$\text{FIR 系统 2:}\quad x'(n)=e(n)-1.2e(n-1)-1.6e(n-2) \tag{5.5.2b}$$

系统 1 的特征多项式为

$$1+0.3z^{-1}-0.4z^{-2}=(1-0.5z^{-1})(1+0.8z^{-1})$$

即其零点为 $z_1=0.5$ 和 $z_2=-0.8$，而系统 2 的特征多项式为

$$1-1.2z^{-1}-1.6z^{-2}=(1-2z^{-1})(1+0.8z^{-1})$$

即其零点为 $z_1=2$ 和 $z_2=-0.8$。可见，系统 1 是最小相位系统，系统 2 为非最小相位系统，它们有一个相同的零点，而另外一个零点互为倒数。

若 $\sigma_e^2=1$，则由 BBR 公式 (5.4.12a) 可计算得到信号 $x(n)$ 和 $x'(n)$ 各自的自相

关函数

$$R_x(0)=b^2(0)+b^2(1)+b^2(2)=1.25, \quad R_{x'}(0)=5.0;$$

$$R_x(1)=b(0)b(1)+b(1)b(2)=0.18, \quad R_{x'}(1)=0.72;$$

$$R_x(2)=b(0)b(2)=-0.4, \quad R_{x'}(2)=-1.6;$$

$$R_x(\tau)=0,\ \forall\tau>2, \quad R_{x'}(\tau)=0,\ \forall\tau>2$$

可见，两个随机过程的自相关函数只是相差一固定的比例因子，即 $R_{x'}(\tau)=4R_x(\tau)$，$\forall\tau$。由于它们的自相关函数具有完全相同的形状，故利用自相关函数将无法区分这两个不同的系统。

累积量的情况则完全不同。由累积量的 BBR 公式 (5.4.12b)，不难计算得到 $x(n)$ 和 $x'(n)$ 的三阶累积量 (为方便计，这里令 $\gamma_{3e}=1$) 为

$$c_{3x}(0,0)=b^3(0)+b^3(1)+b^3(2)=0.963, \quad c_{3x'}(0,0)=-4.878;$$

$$c_{3x}(0,1)=b^2(0)b(1)+b^2(1)b(2)=1.264, \quad c_{3x'}(0,1)=-3.504;$$

$$c_{3x}(0,2)=b^2(0)b(2)=-0.4, \quad c_{3x'}(0,2)=-1.6$$

由此可见，信号 $x(n)$ 和 $x'(n)$ 的三阶累积量是完全不同的。这说明，利用三阶累积量将可以区分这两个不同的系统。

1. GM 算法

对式 (5.4.17) 两边作 Z 反变换，便得到其时域表达式：

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} b^2(i)R_x(m-i)=\epsilon_3\sum_{i=-\infty}^{\infty} b(i)c_{3x}(m-i,m-i) \tag{5.5.3}$$

式中 $\epsilon_3=\sigma_e^2/\gamma_{3e}$。

在 FIR 系统的情况下，式 (5.5.3) 变作

$$\sum_{i=0}^{q} b^2(i)R_x(m-i)=\epsilon_3\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{3x}(m-i,m-i), \quad -q\leqslant m\leqslant 2q \tag{5.5.4}$$

上式对应的四阶结果为

$$\sum_{i=0}^{q} b^3(i)R_x(m-i)=\epsilon_4\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{4x}(m-i,m-i), \quad -q\leqslant m\leqslant 2q \tag{5.5.5}$$

式中 $\epsilon_4=\sigma_e^2/\gamma_{4e}$。

式 (5.5.4) 和式 (5.5.5) 是 Giannakis 与 Mendel[74] 建立的，常称为 GM 方程。求解这种方程的线性代数方法叫做 GM 算法。

对于 GM 算法，有几个问题必须注意 [131]。

(1) GM 算法把 $b^2(i)$ 或 $b^3(i)$ 视作同 $b(i)$ 相独立的参数，然而实际上不是，因此，这种"过参数化"方法只能是次最优的。

(2) 联立方程 (5.5.4) 共有 $3q+1$ 个方程和 $2q+1$ 个未知参数 $b(1),\cdots,b(q),b^2(1),\cdots,b^2(q)$ 和 ϵ_3，属超定方程。但是，相对应的系数矩阵的秩有可能不等于 $2q+1$，因此需要更多切片才能惟一确定 $2q+1$ 个未知参数，而究竟需要多少切片以及需要什么样的切片才能保证参数的可辨识性仍然是一个未解决的问题。

(3) GM 算法是一种"RC"方法——同时使用相关函数 (R) 和累积量 (C) 的方法。由于使用相关函数，式 (5.5.4) 只适用于无加性噪声存在的特殊情况，此时 $R_y(\tau)=R_x(\tau)$。当加性噪声为白噪声，由于 $R_y(m)=R_x(m)+\sigma_e^2\delta(m)$，所以为了避免噪声之影响，滞后 m 就不能包含 $0,1,\cdots,q$ 等值。这便导致了欠定的方程：

$$\sum_{i=0}^{q} b^2(i)R_x(m-i)=\epsilon_3\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{3y}(m-i,m-i),$$
$$-q\leqslant m\leqslant -1 \quad 和\ q+1\leqslant m\leqslant 2q \tag{5.5.6a}$$

它具有 $2q+1$ 个未知数，但却只有 $2q$ 个方程。上式又可重排成

$$\sum_{i=1}^{q} b^2(i)c_{3y}(m-i,m-i)-\sum_{i=0}^{q}[\epsilon b^2(i)]R_y(m-i)=-c_{3y}(m,m),$$
$$-q\leqslant m\leqslant -1 \quad 和\ q+1\leqslant m\leqslant 2q \tag{5.5.6b}$$

其中 $\epsilon=\gamma_{3e}/\sigma_e^2$。

2. Tugnait 算法

为了使 GM 算法适用于加性白噪声情况，就必须再增加新的方程。为此，使用 BBR 公式，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{3y}(i-\tau,q)&=\sum_{i=0}^{q} b(i)\sum_{k=0}^{q}\gamma_{3e}h(k)h(k+i-\tau)h(k+q)\\&=\gamma_{ke}\sum_{i=0}^{q} b(i)h(0)h(i-\tau)h(q)\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

注意到 $h(q)=b(q)$、$h(0)=1$ 以及 BBR 公式的二阶结果

$$\sum_{i=0}^{q} b(i)h(i-\tau)=\sum_{i=0}^{q} h(i)h(i-\tau)=\sigma_e^{-2}R_x(\tau)=\sigma_e^{-2}[R_y(\tau)-\sigma_e^2\delta(\tau)]$$

则式 (5.5.7) 变为

$$\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{3y}(i-m,q)=[\epsilon b(q)][R_y(m)-\sigma_e^2\delta(m)] \tag{5.5.8}$$

显然，为了避免加性白噪声 $v(n)$ 的影响，上式不能包含 $m=0$。再将上式予以重排，便得到

$$\sum_{i=1}^{q} c_{3y}(i-m,q)-[\epsilon b(q)]R_y(m)=-c_{3y}(-m,q),\quad 1\leqslant m\leqslant q \tag{5.5.9}$$

将式 (5.5.6b) 和式 (5.5.9) 联立，并求解未知参数 $b(1),\cdots,b(q),\epsilon b(q)$ 及 $\epsilon b^2(1),\cdots,\epsilon b^2(q)$，便组成了 Tugnait 的 RC 算法 [189]。在这一算法里，方程是超定的，它共有 $4q$ 个方程和 $2q+2$ 个未知参数，并且已证明这些参数是惟一可辨识的。顺便指出，这种算法是对 Tugnait 另外一种 RC 算法 [188] 加以重排和修正而得到的。

3. 组合累积量切片法

除了上述两种典型的 RC 算法外，还有一种 RC 算法的变型，称为组合累积量切片法，是 Fonollasa 与 Vidal[66] 提出的。

利用 $b(i)=h(i)$ 之关系，可以将 FIR 系统的 BBR 公式改写为

$$c_{kx}(\tau_1,\cdots,\tau_{k-1})=\gamma_{ke}\sum_{j=0}^{q}\prod_{l=0}^{k-1} b(j+\tau_l),\quad \tau_0=0,\ k\geqslant 2 \tag{5.5.10}$$

若令 $\tau_1=i$ 是可变量，而 $\tau_2,\cdots,\tau_{k-1}$ 固定，则所得到的累积量一维切片就可以表示成参数 $b(j)$ 和 $b(i;\tau_2,\cdots,\tau_{k-1})$ 的互相关，即

$$c_{kx}(i,\tau_2,\cdots,\tau_{k-1})=\sum_{j=0}^{q} b(j+i)b(j;\tau_2,\cdots,\tau_{k-1}) \tag{5.5.11}$$

其中，因果序列 $b(i;\tau_2,\cdots,\tau_{k-1})$ 定义为

$$b(i;\tau_1,\cdots,\tau_{k-1})=\gamma_{ke}b(i)\prod_{j=2}^{k-1} b(i+\tau_j) \tag{5.5.12}$$

综合式 (5.5.11) 和式 (5.5.12) 知，任意切片的线性组合

$$\begin{aligned}C_w(i) =& w_2c_{2x}(i) + \sum_{j=-q}^{q} w_3(j)c_{3x}(i,j)+\\ &\sum_{j=-q}^{q}\sum_{l=-q}^{j} w_4(j,l)c_{4x}(i,j,l) + \cdots\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

都可以表示为 $b(i)$ 和 $g_w(i)$ 的互相关，即

$$C_w(i) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n+i)g_w(n) \tag{5.5.14}$$

式中，$g_w(n)$ 为下列因果序列：

$$g_w(n) = w_2b(n) + \sum_{j=-q}^{q} w_3(j)b(n;j) + \sum_{j=-q}^{q}\sum_{l=-q}^{j} w_4(j,l)b(n;j,l) + \cdots \tag{5.5.15}$$

它可视为 MA 模型参数 $b(i)$ 的加权系数。

式 (5.5.14) 表明，对于一个 MA 模型，任何 w 切片都可以表示为两个有限的因果序列 $b(n)$ 和 $g_w(n)$ 的互相关。因此，若选择权系数

$$g_w(n) = \delta(n) = \begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

就能够发展一种 FIR 系统辨识方法，因为 $C_w(i)$ 就等于 $b(i)$。但是，根据式 (5.5.15) 选择 $g_w(n)=\delta(n)$ 意味着必须选择合适的 w_2,w_3,w_4 等，而这些选择是困难的。幸运的是，w 切片 $C_w(i)$ 的因果性提供了如何选择权系数 w_2,w_3,w_4 等的直接方法。

定理 5.5.1[66] 如果 w 切片 $C_w(i)$ 是因果的，则 $C_w(i)=C_w(0)b(i)$。

定义

$$\boldsymbol{c}_w = [C_w(-q),\cdots,C_w(-1),C_w(0),C_w(1),\cdots,C_w(q)]^{\mathrm{T}} \tag{5.5.16a}$$

$$\boldsymbol{w} = [w_2,w_3(-q),\cdots,w_3(q),w_4(-q,-q),\cdots,w_4(q,q),\cdots]^{\mathrm{T}} \tag{5.5.16b}$$

和

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} c_{2x}(-q) & c_{3x}(-q,-q)\cdots c_{3x}(-q,q) & \cdots & c_{4x}(-q,-q,-q)\cdots c_{4x}(-q,q,q) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{2x}(0) & c_{3x}(0,-q)\cdots c_{3x}(0,q) & \cdots & c_{4x}(0,-q,-q)\cdots c_{4x}(0,q,q) & \cdots \end{bmatrix} \tag{5.5.16c}$$

则式 (5.5.13) 可以用矩阵形式写成

$$c_w = Sw \tag{5.5.17}$$

利用组合累积量切片进行 FIR 系统辨识的具体步骤如下 [66]。

算法 5.5.1 (w 切片算法)

步骤 1 求方程 (5.5.17) 的最小范数解

$$w = S^{\dagger}e \tag{5.5.18}$$

其中 $S^{\dagger} = S^{\mathrm{T}}(SS^{\mathrm{T}})^{-1}$ 是矩阵 S 的最小范数逆矩阵，且 $e = [0, \cdots, 0, 1]^{\mathrm{T}}$。

步骤 2 计算 MA 参数 $b(i) = C_w(i)$ 或

$$b = Sw_m \tag{5.5.19}$$

5.5.2 累积量算法

RC 算法和 w 切片算法的主要缺点是，它们只能适用于加性白噪声 (高斯或非高斯)。显然，为了在理论上完全抑制高斯有色噪声，就必须避免自相关函数的使用，只使用高阶累积量。这样一种算法由 Zhang 和 Zhang[217] 提出。下面介绍这种累积量算法。

假定非高斯 MA 过程 $\{x(n)\}$ 在与之独立的加性高斯有色噪声 $v(n)$ 中被观测，即观测数据 $y(n) = x(n) + v(n)$。此时，$c_{ky}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1}) = c_{kx}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1})$。不失一般性，还假定 $h(0) = 1$。

注意到对于一 MA(q) 模型恒有 $h(i) = 0$ ($i < 0$ 或 $i > q$)，故 BBR 公式可简化为

$$\begin{aligned} c_{ky}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1}) &= c_{kx}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1}) \\ &= \gamma \sum_{i=0}^{q} h(i)h(i+\tau_1)\cdots h(i+\tau_{k-1}) \end{aligned} \tag{5.5.20}$$

考虑一特殊切片 $\tau_1 = \tau$，$\tau_2 = \cdots = \tau_{k-1} = 0$，则

$$c_{ky}(\tau, 0, \cdots, 0) = \gamma_{ke} \sum_{i=0}^{q} h^{k-1}(i)h(i+\tau) \tag{5.5.21}$$

利用符号 $c_{ke}(m, n) = c_{ky}(m, n, \cdots, n)$，并在上式中代入 $b(i+\tau) = h(i+\tau)$，则可得

到

$$\begin{aligned} c_{ky}(\tau,0) &= \gamma_{ke}\sum_{i=0}^{q} h^{k-1}(i)b(i+\tau) \\ &= \gamma_{ke}\sum_{j=0}^{q} b(j)h^{k-1}(j-\tau), \forall\tau \end{aligned} \tag{5.5.22}$$

式中利用了 $b(i) = h(i) = 0$ ($i < 0$ 或 $i > q$)。

另外一方面，由式 (5.5.20) 又有

$$c_{ke}(q,0) = \gamma_{ke}h(q) \tag{5.5.23}$$

$$c_{ke}(q,n) = \gamma_{ke}h(n)h(q) \tag{5.5.24}$$

为了保证 MA(q) 模型的惟一性，通常约定 $b(0) \neq 0$ 和 $b(q) \neq 0$。由这些约定以及式 (5.5.23) 和式 (5.5.24) 立即知 $c_{ke}(q,0) \neq 0$ 和 $c_{ky}(q,q) \neq 0$。

综合式 (5.5.23) 和式 (5.5.24), 可得到一个重要的关系式:

$$h(n) = \frac{c_{ke}(q,n)}{c_{ke}(q,0)} = b(n) \tag{5.5.25}$$

由于上式具有的形式，习惯称其为 $C(q,n)$ 公式。这一公式是 Giannakis [73] 提出的 (我国学者程乾生 [225] 差不多同时独立地得到过相同的结果)。

$C(q,n)$ 公式表明, MA 模型的参数可以直接根据累积量计算。然而，由于样本高阶累积量估计在短数据情况下存在比较大的误差和方差，所以这样一种直接算法对短数据并不实用。然而，使用它却可以帮助我们从式 (5.5.22) 得到一组 MA 参数估计的线性法方程。为此，将式 (5.5.25) 代入式 (5.5.22), 并加以整理，立即得到

$$\gamma_{ke}\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{ky}^{k-1}(q,i-\tau) = c_{ky}(\tau,0)c_{ky}^{k-1}(q,0), \quad \forall\tau \tag{5.5.26}$$

称之为 MA 参数估计的第一种法方程。

类似地，若在式 (5.5.21) 中代入 $b(i) = h(i)$, 并保留 $h(i+\tau)$ 不变，则得

$$c_{ke}(\tau,0) = \gamma_{ke}\sum_{i=0}^{q} b^{k-1}(i)h(i+\tau), \ \forall\tau \tag{5.5.27}$$

再将式 (5.5.25) 代入式 (5.5.27), 又可得到第二种法方程

$$\gamma_{ke}\sum_{i=0}^{q} b^{k-1}(i)c_{ky}(q,i+\tau) = c_{ky}(\tau,0)c_{ky}(q,0) \tag{5.5.28}$$

法方程 (5.5.26) 和 (5.5.28) 在形式上同第 3 章中的 ARMA 模型的修正 Yule-Walker 方程极其相似。理论上，分别求解这两种法方程，即可得到参数 $\gamma_{ke}, \gamma_{ke}b(1), \cdots, \gamma_{ke}(q)$ 或者 $\gamma_{ke}, \gamma_{ke}b^{k-1}(1), \cdots, \gamma_{ke}b^{k-1}(q)$ 的估计值。然而，如果 γ_{ke} 的估计值很小，则容易导致病态问题。不过，这一问题容易被克服。方法是在式 (5.5.28) 中令 $\tau = q$，从而得到

$$\gamma_{ke} = \frac{c_{ky}^2(q,0)}{c_{ky}(q,q)} \tag{5.5.29}$$

再将式 (5.5.29) 代入法方程 (5.5.26)，便可得到不含 γ_{ke} 的法方程

$$\sum_{i=0}^{q} b(i)c_{ky}^{k-1}(q, i-\tau) = c_{ky}(\tau,0)c_{ky}^{k-3}(q,0)c_{ky}(q,q), \quad \tau = -q, \cdots, 0, \cdots, q \tag{5.5.30}$$

这一法方程便是文献 [217] 估计 FIR 系统参数的线性累积量方法的基础。

下面分析这一法方程的参数可识别性。定义

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{ky}^{k-1}(q,q) & & & & 0 \\ c_{ky}^{k-1}(q,q-1) & c_{ky}^{k-1}(q,q) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{ky}^{k-1}(q,1) & c_{ky}^{k-1}(q,2) & \cdots & c_{ky}^{k-1}(q,q) & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5.31a}$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} c_{ky}^{k-1}(q,0) & c_{ky}^{k-1}(q,1) & \cdots & c_{ky}^{k-1}(q,q) \\ & c_{ky}^{k-1}(q,0) & \cdots & c_{ky}^{k-1}(q,q-1) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & c_{ky}^{k-1}(q,0) \end{bmatrix} \tag{5.5.31b}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = [b(0), b(1), \cdots, b(q)]^{\mathrm{T}} \tag{5.5.31c}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{ky}(-q,0)c_{ky}^{k-3}(q,0)c_{ky}(q,q) \\ c_{ky}(-q+1,0)c_{ky}^{k-3}(q,0)c_{ky}(q,q) \\ \vdots \\ c_{ky}(-1,0)c_{ky}^{k-3}(q,0)c_{ky}(q,q) \end{bmatrix} \tag{5.5.31d}$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{ky}(0,0)c_{ky}^{k-3}(q,0)c_{ky}(q,q) \\ c_{ky}(1,0)c_{ky}^{k-3}(q,0)c_{ky}(q,q) \\ \vdots \\ c_{ky}^{k-2}(q,0)c_{ky}(q,q) \end{bmatrix} \tag{5.5.31e}$$

则法方程 (5.5.30) 可简记为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} \tag{5.5.32}$$

求解矩阵方程 (5.5.32), 即可得到 FIR 参数 $b(0)$、$b(1)$、$\cdots$,$b(q)$ 的估计值。那么, 这种方法能够保证 FIR 系统参数的惟一可辨识性吗？下面的定理给出了这个问题的肯定答案。

定理 5.5.1 假定真实累积量 $c_{ky}(q,\tau_1), 0\leqslant\tau_1\leqslant q$ 和 $c_{ky}(\tau_2,0), -q\leqslant\tau_2\leqslant q$ 为已知, 则 $q+1$ 个 FIR 系统参数由式 (5.5.32) 的解惟一确定。

证明 由于 $c_{ky}(q,0)\neq 0$, 故 $(q+1)\times(q+1)$ 上三角矩阵 $\boldsymbol{C}_2$ 的行列式

$$\det(\boldsymbol{C}_2)=\prod_{i=1}^{q+1}c_2(i,i)=c_{ky}^{(k-1)(q+1)}(q,0)\neq 0$$

于是

$$\text{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}=\text{rank}(\boldsymbol{C}_2)=q+1$$

这说明, 含 $q+1$ 个未知参数的矩阵方程 (5.5.32) 具有惟一的最小二乘解 $\boldsymbol{b}_1=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$, 其中 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。 ■

类似地, 将式 (5.5.29) 代入式 (5.5.28), 又可得到另外一种估计 FIR 系统参数的累积量算法如下:

$$\sum_{i=0}^{q}b^{k-1}(i)c_{ky}(q,i+\tau)=c_{ky}(\tau,0)c_{ky}(q,q)/c_{ky}(q,0),$$

$$\tau=-q,\cdots,0,\cdots,q \tag{5.5.33}$$

这一算法也可保证未知参数的惟一可辨识性。

定理 5.5.2 假定真实累积量 $c_{ky}(q,\tau_1), 0\leqslant\tau_1\leqslant q$ 和 $c_{ky}(\tau_2,0), -q\leqslant\tau_2\leqslant q$ 为已知, 则 $q+1$ 个未知参数 $b^{k-1}(0), b^{k-1}(1),\cdots,b^{k-1}(q)$ 由式 (5.5.33) 的解惟一确定。

证明 与定理 5.5.1 的证明完全类似, 此处从略。

对两种算法, 有以下注释。

(1) 在算法 (5.5.30) 中, 取 $\hat{b}(i)/\hat{b}(0)$ 作为 $b(i), i=1,\cdots,q$ 的最后估计值, 以满足归一化条件 $b(0)=1$。类似地, 在算法 (5.5.33) 中, $\hat{b}^{k-1}(i)/\hat{b}^{k-1}(0)$ 被取作 $b^{k-1}(i), i=1,\cdots,q$ 的估计值。但是, 由于我们只是对 $b(i)$ 的估计值感兴趣, 所以当 $k=4$ (即使用四阶累积量) 时, 可在这种算法中直接取 $\hat{b}(i)=\sqrt[3]{\hat{b}^3(i)/\hat{b}^3(0)}, i=1,\cdots,q$; 而当 $k=3$ 时, 估计值 $\hat{b}(i)$ 的符号取 $C(q,n)$ 算法 $b(n)=c_{3y}(q,n)/c_{3x}(q,0)$ 的符号, 而幅值则取作 $|\hat{b}(i)|=\sqrt{\hat{b}^2(i)/\hat{b}^2(0)}$。

(2) 两种算法最好同时运行。如果算法 1 得到的 $|\hat{b}(0)|$ 比 1 小得多, 则认为算法 1 的估计不太好; 类似地, 若算法 2 得到的 $|\hat{b}^{k-1}(0)|$ 比 1 小得多, 便认为算法 2 的估计比较差。此时, 应取另一算法的估计结果。这样可以改善 MA 参数估计的性能。