式中

$$\tilde{x}(n)=B(q)x(n)=\sum_{i=0}^{n_b}b(i)x(n-i) \tag{5.7.33}$$

$$\tilde{v}(n)=B(q)v(n)=D(q)w(n)=\sum_{j=0}^{n_d}d(j)w(n-j) \tag{5.7.34}$$

分别代表被滤波的谐波信号和被滤波的非高斯有色噪声．注意，由于 $x(n)$ 和 $v(n)$ 统计独立，所以它们的线性变换 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{v}(n)$ 也统计独立。

经过滤波以后，原加性非高斯噪声从 ARMA 过程变成了式 (5.7.34) 所示的 MA 过程。利用 MA 过程自相关函数和高阶累积量的截尾性质，我们有

$$R_{\tilde{v}}(\tau)=0,\quad \tau>n_d \tag{5.7.35}$$

$$c_{k\tilde{v}}(\tau_1,\cdots,\tau_{k-1})=0,\quad \tau>n_d;k>2 \tag{5.7.36}$$

问题是，我们能够从被滤波的观测过程 $\tilde{y}(n)$ 恢复谐波信号吗？答案是肯定的：利用式 (5.7.35) 和式 (5.7.36)，可得到非高斯有色噪声中谐波恢复的两种方法。

1．混合法

对于被滤波的谐波信号 $\tilde{x}(n)$，由式 (5.7.33) 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{\tilde{x}(n)\tilde{x}(n-\tau)\}&=\mathrm{E}\left\{\sum_{i=0}^{n_b}b(i)x(n-i)\cdot\sum_{j=0}^{n_b}b(j)x(n-\tau-j)\right\}\\
&=\sum_{i=0}^{n_b}\sum_{j=0}^{n_b}b(i)b(j)\mathrm{E}\{x(n-i)x(n-\tau-j)\}
\end{aligned}$$

即有

$$R_{\tilde{x}}(\tau)=\sum_{i=0}^{n_b}\sum_{j=0}^{n_b}b(i)b(j)R_x(\tau+j-i) \tag{5.7.37}$$

令 $a(1),\cdots,a(2p)$ 是谐波信号 $x(n)$ 的特征多项式 $1+a(1)z^{-1}+\cdots+a(2p)z^{-2p}=0$ 的系数。有意思的是，从式 (5.7.37) 容易得到

$$\sum_{k=0}^{2p}R_{\tilde{x}}(m-k)=\sum_{i=0}^{n_b}\sum_{j=0}^{n_b}b(i)b(j)\sum_{k=0}^{2p}a(k)R_x(m-k+j-i)=0,\quad \forall m \tag{5.7.38}$$

这里，我们使用了第 4 章建立的关系式：谐波信号 $x(n)$ 是一完全可预测过程，它服从法方程 $\sum_{k=0}^{2p}a(k)R_x(m-k)=0,\forall m$。

由 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{v}(n)$ 的统计独立性知 $R_{\tilde{y}}(m)=R_{\tilde{x}}(m)+R_{\tilde{v}}(m)$。将这一关系代入式 (5.7.38) 中，则有

$$\sum_{i=0}^{2p} a(i)R_{\tilde{y}}(m-k)=\sum_{i=0}^{2p} a(i)R_{\tilde{v}}(m-k),\forall m \tag{5.7.39}$$

将式 (5.7.35) 代入式 (5.7.39)，立即得

$$\sum_{i=0}^{2p} a(i)R_{\tilde{y}}(m-k)=0,\quad m>2p+n_d \tag{5.7.40}$$

容易证明，当 $L \geqslant (p_e+1)$ 时，$L\times(p_e+1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{R}_e=\begin{bmatrix} R_{\tilde{y}}(q_e+1) & R_{\tilde{y}}(q_e) & \cdots & R_{\tilde{y}}(q_e-p_e+1) \\ R_{\tilde{y}}(q_e+2) & R_{\tilde{y}}(q_e+1) & \cdots & R_{\tilde{y}}(q_e-p_e+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{\tilde{y}}(q_e+L) & R_{\tilde{y}}(q_e+L-1) & \cdots & R_{\tilde{y}}(q_e-p_e+L) \end{bmatrix} \tag{5.7.41}$$

的秩等于 $2p$，若取 $p_e \geqslant 2p$ 和 $q_e \geqslant p_e+n_d$。

综合以上讨论，可得到非高斯 ARMA(n_b,n_d) 噪声中谐波恢复的混合方法 [219]。

算法 5.7.1 (非高斯噪声中谐波恢复的混合方法)

步骤 1 利用 SVD – TLS 算法及观测过程 $y(n)$ 的三阶累积量 $c_{3y}(\tau_1,\tau_2)$ 估计非高斯 ARMA 噪声的 AR 阶数 n_b 和 AR 参数 $b(1),\cdots,b(n_b)$。

步骤 2 使用估计的 AR 参数 $b(1),\cdots,b(n_b)$ 和式 (5.7.32) 对观测数据 $y(n)$ 进行滤波，得到被滤波的观测过程 $\tilde{y}(n)$。

步骤 3 在式 (5.7.41) 中用 $\tilde{y}(n)$ 的样本自相关函数 $\hat{R}_{\tilde{y}}(m)$ 代替真实的自相关函数 $R_{\tilde{y}}(m)$，并取 $p_e \geqslant 2p$ 和 $q_e \geqslant p_e+n_d$，以确定样本自相关矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_e$ 的有效秩 $2p$，并使用 SVD – TLS 算法估计谐波过程 $x(n)$ 的 AR 参数 $a(1),\cdots,a(2p)$。

步骤 4 求特征多项式 $A(z)=1+a(1)z^{-1}+\cdots+a(2p)z^{-2p}=0$ 的根 z_i，并用下式求谐波信号的频率 (只取正频率)：

$$\omega_i=\frac{1}{2\pi}\arctan[\mathrm{Im}(z_i)/\mathrm{Re}(z_i)] \tag{5.7.42}$$

2. 基于预滤波的 ESPRIT 方法

下面介绍非高斯 ARMA 噪声中谐波恢复的另一种方法——基于预滤波的 ESPRIT 方法 [220]。

ESPRIT 方法的核心是如何构造合适的矩阵束。为此，我们来考虑被滤波的观测过程 $\{\tilde{y}(n)\}$ 的两个互协方差矩阵。

令

$$\tilde{y}_1(n) = \tilde{y}(n+m+n_d) \tag{5.7.43a}$$

$$\tilde{y}_2(n) = \tilde{y}(n+m+n_d+1) \tag{5.7.43b}$$

并取 $m > d$ (对复谐波过程 $d = p$，对实谐波过程 $d = 2p$)。构造两个 $m \times 1$ 向量

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{y}}_1 &= [\tilde{y}_1(n), \cdots, \tilde{y}_1(n+1), \cdots, \tilde{y}_1(n+m-1)]^{\mathrm{T}} \\ &= [\tilde{y}(n+m+n_d), \cdots, \tilde{y}(n+2m+n_d-1)]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5.7.44}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{y}}_2 &= [\tilde{y}_2(n), \cdots, \tilde{y}_2(n+1), \cdots, \tilde{y}_2(n+m-1)]^{\mathrm{T}} \\ &= [\tilde{y}(n+m+n_d+1), \cdots, \tilde{y}(n+2m+n_d)]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5.7.45}$$

定义

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) = [\tilde{y}(n), \tilde{y}(n+1), \cdots, \tilde{y}(n+m-1)]^{\mathrm{T}} \tag{5.7.46a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(n) = [\tilde{x}(n), \tilde{x}(n+1), \cdots, \tilde{x}(n+m-1)]^{\mathrm{T}} \tag{5.7.46b}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(n) = [\tilde{v}(n), \tilde{v}(n+1), \cdots, \tilde{v}(n+m-1)]^{\mathrm{T}} \tag{5.7.46c}$$

则式 (5.7.32) 可写成向量形式

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}(n) + \tilde{\boldsymbol{v}}(n) \tag{5.7.47}$$

且有

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}(n+m+n_d) + \tilde{\boldsymbol{v}}(n+m+n_d) \tag{5.7.48}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}(n+m+n_d+1) + \tilde{\boldsymbol{v}}(n+m+n_d+1) \tag{5.7.49}$$

对于复谐波信号 $x(n) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)}$，其向量形式 $\boldsymbol{x}(n) = [x(n), x(n+1), \cdots, x(n+m-1)]^{\mathrm{T}}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_1(n) \tag{5.7.50}$$

式中

$$\boldsymbol{s}_1(n) = [\alpha_1 e^{j(\omega_1 n + \phi_1)}, \cdots, \alpha_p e^{j(\omega_p n + \phi_p)}]^{\mathrm{T}} \tag{5.7.51}$$

和

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} & \cdots & e^{j\omega_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j(m-1)\omega_1} & e^{j(m-1)\omega_2} & \cdots & e^{j(m-1)\omega_p} \end{bmatrix} \tag{5.7.52}
$$

是一个 $m \times p$ 维 Vandermonde 矩阵。

类似地，向量 $\boldsymbol{x}(n-k)=[x(n-k),x(n-k+1),\cdots,x(n-k+m-1)]^{\mathrm{T}}$ 可以写作

$$
\boldsymbol{x}(n-k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{-k}\boldsymbol{s}_1(n) \tag{5.7.53}
$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}^{-k}$ 是对角矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 $-k$ 次幂，而 $\boldsymbol{\Phi}$ 定义为

$$
\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}(e^{j\omega_1},\cdots,e^{j\omega_p}) \tag{5.7.54}
$$

利用式 (5.7.53) 容易得到

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{s}}(n) &= \left[\sum_{i=0}^{p} a(i)x(n-i),\cdots,\sum_{i=0}^{p} a(i)x(n+m-1-i)\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{i=0}^{p} a(i)[x(n-i),\cdots,x(n+m-1-i)]^{\mathrm{T}} = \sum_{i=0}^{p} a(i)\boldsymbol{x}(n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{p} a(i)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{-i}\boldsymbol{s}_1(n) = \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{I}+\sum_{i=1}^{p} a(i)\boldsymbol{\Phi}\right]\boldsymbol{s}_1(n)
\end{aligned} \tag{5.7.55}
$$

类似地，有

$$
\tilde{\boldsymbol{s}}(n+k)=\sum_{i=0}^{p} a(i)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{k-i}\boldsymbol{s}_1(n)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{k}\left[\boldsymbol{I}+\sum_{i=1}^{p} a(i)\boldsymbol{\Phi}^{-i}\right]\boldsymbol{s}_1(n) \tag{5.7.56}
$$

记

$$
\boldsymbol{\Phi}_1=\boldsymbol{I}+\sum_{i=1}^{p} a(i)\boldsymbol{\Phi}^{-i} \tag{5.7.57}
$$

则式 (5.7.55) 和式 (5.7.56) 可以简记作

$$
\tilde{\boldsymbol{s}}(n)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{s}_1(n) \tag{5.7.58}
$$

和

$$
\tilde{\boldsymbol{s}}(n+k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{k}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{s}_1(n) \tag{5.7.59}
$$

利用式 (5.7.58) 和式 (5.7.59)，可以将式 (5.7.47) ~ 式 (5.7.49) 改写为

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{s}_1(n) + \tilde{\boldsymbol{v}}(n) \tag{5.7.60}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d}\boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{s}_1(n) + \tilde{\boldsymbol{v}}(n+m+n_d) \tag{5.7.61}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d+1}\boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{s}_1(n) + \tilde{\boldsymbol{v}}(n+m+n_d+1) \tag{5.7.62}$$

命题 5.7.3 令 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_i}$ 是向量过程 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{y}}_i(i=1,2)$ 的互协方差矩阵，即 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_i} = \mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{y}}\tilde{\boldsymbol{y}}_i^{\mathrm{H}}\}$，其中，上标 H 表示向量的共轭转置。若令

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{s}_1(n)\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{H}}(n)\} \tag{5.7.63}$$

则

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{5.7.64}$$

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d+1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{5.7.65}$$

证明 先考虑向量噪声过程 $\tilde{\boldsymbol{v}}(n)$，则有

$$\mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{v}}(n)\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{H}}(n+m+n_d+k)\} =$$

$$\begin{bmatrix} R_{\tilde{v}}(m+n_d+k) & R_{\tilde{v}}(m+n_d+k+1) & \cdots & R_{\tilde{v}}(2m+n_d+k-1) \\ R_{\tilde{v}}(m+n_d+k-1) & R_{\tilde{v}}(m+n_d+k) & \cdots & R_{\tilde{v}}(2m+n_d+k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{\tilde{v}}(n_d+k+1) & R_{\tilde{v}}(n_d+k+2) & \cdots & R_{\tilde{v}}(m+n_d+k) \end{bmatrix}$$

由于被滤波的噪声过程 $\tilde{v}(n)$ 是一 $\mathrm{MA}(n_d)$ 过程，其自相关函数具有截尾性质，即 $R_{\tilde{v}}(\tau)=0, \forall \tau > n_d$。显然，对于任意整数 $k \geqslant 0$，上述矩阵的所有元素 $R(i,j)$ 的滞后均大于 n_d，故所有元素等于零。也即是说，

$$\mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{v}}(n)\tilde{\boldsymbol{v}}(n+m+n_d)\} = 0 \tag{5.7.66a}$$

$$\mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{v}}(n)\tilde{\boldsymbol{v}}(n+m+n_d+1)\} = 0 \tag{5.7.66b}$$

由于向量谐波过程 $\boldsymbol{x}(n)$ 与向量噪声过程 $\tilde{\boldsymbol{v}}(n)$ 独立，故式 (5.7.55) 定义的向量过程 $\tilde{\boldsymbol{s}}(n)$ 也与 $\tilde{\boldsymbol{v}}(n)$ 独立。利用这一结果，即有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1} &= \mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{s}}(n)\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{H}}(n+m+n_d)\} + \mathrm{E}\{\boldsymbol{v}(n)\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{H}}(n+m+n_d)\} \\ &= \mathrm{E}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{s}_1(n)[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{s}_1(n)]^{\mathrm{H}}\} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1\mathrm{E}\{\boldsymbol{s}_1(n)\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{H}}(n)\}\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \end{aligned}$$

这恰好是式 (5.7.64)。式 (5.7.65) 的证明与之类似，留给读者作习题。

容易证明，命题 5.7.3 中的矩阵 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}$ 和 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}$ 的结构分别为

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}=\begin{bmatrix} R_{\tilde{y}}(m+n_d) & R_{\tilde{y}}(m+n_d+1) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d-1) \\ R_{\tilde{y}}(m+n_d-1) & R_{\tilde{y}}(m+n_d) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{\tilde{y}}(n_d+1) & R_{\tilde{y}}(n_d+2) & \cdots & R_{\tilde{y}}(n_d+m) \end{bmatrix} \tag{5.7.67}$$

和

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}=\begin{bmatrix} R_{\tilde{y}}(m+n_d+1) & R_{\tilde{y}}(m+n_d+2) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d) \\ R_{\tilde{y}}(m+n_d) & R_{\tilde{y}}(m+n_d+1) & \cdots & R_{\tilde{y}}(2m+n_d-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{\tilde{y}}(n_d+2) & R_{\tilde{y}}(n_d+3) & \cdots & R_{\tilde{y}}(n_d+m+1) \end{bmatrix} \tag{5.7.68}$$

如下面的定理所述，$\{\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1},\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}\}$ 组成我们感兴趣的矩阵束。

定理 5.7.1 定义 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是与矩阵束 $\{\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1},\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}\}$ 相对应的广义特征值组成的矩阵，则下列结果为真：

(1) 式 (5.7.52) 定义的 $m\times d$ 维 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满秩的，且由式 (5.7.63) 定义的 $d\times d$ 维对角矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是非奇异的，即 $\text{rank}(\boldsymbol{A})=\text{rank}(\boldsymbol{S})=d$；

(2) $m\times m$ 维矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 之间存在如下关系：

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{5.7.69}$$

式中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵，$\boldsymbol{\Phi}$ 的对角元素的位置可能有所变化。

证明 由于谐波频率 ω_i 各不相同，所以 $m\times d$ 维 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有列都是线性独立的，即 $\boldsymbol{A}$ 具有满列秩，或 $\text{rank}(\boldsymbol{A})=d$。又因为不同频率的谐波在无穷长的时间支撑区内是正交的，故由式 (5.7.63) 和式 (5.7.50) 易知

$$\boldsymbol{S}=\text{diag}(|a_1|^2,\cdots,|a_d|^2) \tag{5.7.70}$$

它显然是非奇异的，即 $\text{rank}(\boldsymbol{S})=d$。这就证明了 (1)。

下面证明 (2) 为真。为方便计，我们记

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}_1^{\text{H}}(\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d})^{\text{H}} \tag{5.7.71}$$

利用这一符号，可以将式 (5.7.64) 和式 (5.7.65) 更加紧凑地写成

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y}\tilde{y}_1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{\text{H}} \tag{5.7.72}$$

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y}\tilde{y}_2}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Phi}^{\text{H}}\boldsymbol{A}^{\text{H}} \tag{5.7.73}$$

将式 (5.7.54) 代入式 (5.7.57)，得到

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{p} a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1}, \cdots, \sum_{k=0}^{p} a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_d}\right) \tag{5.7.74}$$

由于噪声是指数稳定的，所以它在单位圆上无极点，即 $\sum_{k=0}^{p} a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_i} \neq 0$ $(i = 1,\cdots,d)$。即是说，对角矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 非奇异. 另一方面，由式 (5.7.54) 容易看出，对角矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 非奇异，从而 $\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d}$ 也非奇异。矩阵的秩恒等关系告诉我们，一个矩阵左 (或右) 乘一个满列 (或满行) 秩矩阵时，$\boldsymbol{B}$ 的秩不变。因此，$d\times d$ 矩阵 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\Phi}^{m+n_d})^{\mathrm{H}}$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的秩相同，即有

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{S}) = d$$

记住这一关系，我们来分析矩阵束

$$\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1} - \gamma\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} - \gamma\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{5.7.75}$$

再次利用矩阵秩的恒等关系知，当 $\gamma \neq \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i}$，$i = 1,\cdots,d$ 时，

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1} - \gamma\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}) = d \tag{5.7.76}$$

这是因为矩阵 $\boldsymbol{I} - \gamma\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}$ 非奇异，并且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 分别是满列秩和满行秩的。然而，若 $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i}$ (其中 $i = 1,\cdots,d$)，则矩阵 $\boldsymbol{I} - \gamma\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}$ 的第 i 行元素全部为零，故

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{I} - \gamma\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}) = d - 1 \tag{5.7.77}$$

即

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1} - \gamma\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{I} - \gamma\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}) = d - 1$$

根据定义知，$\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i}$ (其中 $i = 1,\cdots,d$) 是矩阵束 $\{\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}, \boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}\}$ 的 d 个非零广义特征值，而其他广义特征值全部等于零。 ■

定理 5.7.1 启迪了非高斯噪声中谐波恢复的预滤波 ESPRIT 算法，它是 Zhang 与 Liang 提出的 [220]。

算法 5.7.2 (预滤波 ESPRIT 算法)

步骤 1 (累积量估计)　由观测值 $y(1),\cdots,y(N)$ 估计三阶累积量 $c_{3y}(\tau_1,\tau_2)$。

步骤 2 (噪声过程的 AR 部分建模)　用 SVD – TLS 算法及三阶累积量 $c_{3y}(\tau_1,\tau_2)$ 估计非高斯 ARMA 噪声的 AR 阶数 n_b 和 AR 参数 $b(1),\cdots,b(n_b)$。

步骤 3 (预滤波)　使用估计的 AR 参数 $b(1),\cdots,b(n_b)$ 和式 (5.7.32) 对观测数据 $y(n)$ 进行滤波，得到被滤波的观测过程 $\tilde{y}(n)$。

步骤 4 (互协方差矩阵构造) 估计被滤波过程的自相关函数 $R_{\tilde{y}}(\tau)$，并利用式 (5.7.67) 和式 (5.7.68) 构造互协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}$ 和 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}$。

步骤 5 (执行 TLS-ESPRIT 算法) 计算 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}$ 的奇异值分解 $\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_1}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$，确定其有效秩，给出谐波个数 d 的估计，与 d 个大奇异值对应的左、右奇异矩阵和奇异值矩阵分别为 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{V}_1$ 和 Σ_1。然后，计算矩阵束 $\{\Sigma_1,\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\tilde{y},\tilde{y}_2}\boldsymbol{V}_1\}$ 的 d 个非零广义特征值 $\gamma_1,\cdots,\gamma_d$。谐波频率由

$$\omega_i=\frac{1}{2\pi}\arctan[\mathrm{Im}(\gamma_i)/\mathrm{Re}(\gamma_i)],\quad i=1,\cdots,d \tag{5.7.78}$$

给定。

高斯有色噪声和非高斯有色噪声同时存在时的谐波恢复问题由 Zhang 和 Li [218] 提出并分析。

5.8 自适应滤波

在第 4 章里，我们讨论过一些典型的自适应滤波算法。应用这些算法的前提条件是加性噪声是白色的，因为所使用的代价函数 (即均方误差或加权误差平方和) 都是二阶的统计量。因此，要想在加性有色噪声的情况下进行自适应信号处理，就必须改造代价函数的形式，使用高阶统计量。

5.8.1 基于累积量的 MMSE 准则

假定使用 m 个抽头权系数 $w_1,\cdots,w_m$ 对观测数据信号 $x(n)$ 进行自适应滤波，最小均方误差 (MMSE) 准则确定最优抽头权系数的原则是使均方误差

$$J_1\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{E}\{|e(n)|^2\}=E\left\{\left|x(n)-\sum_{i=1}^{m}w_ix(n-i)\right|^2\right\} \tag{5.8.1a}$$

最小化。式中，

$$e(n)=x(n)-\sum_{i=1}^{m}w_ix(n-i) \tag{5.8.1b}$$

为误差信号。这一优化问题的解为 Weiner 滤波器

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{opt}}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r} \tag{5.8.2}$$

式中

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(n)\} \tag{5.8.3a}$$

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(n)x(n)\} \tag{5.8.3b}$$

分别是观测信号向量 $\boldsymbol{x}(n) = [x(n-1),\cdots,x(n-m)]^{\mathrm{T}}$ 的自相关矩阵和向量 $\boldsymbol{x}(n)$ 与 $x(n)$ 的互相关函数，它们对加性噪声是敏感的。

若 $x(n)$ 是一独立同分布的噪声 $v(n) \sim \mathrm{IID}(0,\sigma_v^2,\gamma_{3v})$ 激励线性系统 $H(z)$ 的输出，则功率谱 $P_x(\omega) = \sigma_v^2 H(\omega)H^*(\omega)$，并且双谱 $B(\omega_1,\omega_2) = \gamma_{3v}H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1+\omega_2)$。考查双谱的一特殊切片 $\omega_1 = \omega$ 和 $\omega_2 = 0$，显然有

$$P_x(\omega) = \frac{B(\omega,0)}{\gamma_{3v}H(0)/\sigma_v^2} = \alpha B(\omega,0) \tag{5.8.4}$$

式中 $\alpha = \sigma_v^2/[\gamma_{3v}H(0)]$ 为一常数。

对式 (5.8.4) 作 Fourier 反变换，则得

$$R_x(\tau) = \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau,m) \tag{5.8.5a}$$

这个关系式启迪了一种对加性高斯有色噪声免疫的代价函数，即将相关函数 $R_x(\tau)$ 换成式 (5.8.5a) 的形式。式 (5.8.5a) 可等价写成

$$\mathrm{E}\{x(n)x(n+\tau)\} = \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{x(n)n(n+\tau)x(n+m)\} \tag{5.8.5b}$$

特别地，若 $\tau = 0$，则

$$\mathrm{E}\{|x(n)|^2\} = \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{x(n+m)|x(n)|^2\} \tag{5.8.6}$$

仿此，定义

$$\mathrm{E}\{|e(n)|^2\} = \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{x(n+m)|e(n)|^2\} \tag{5.8.7}$$

于是，式 (5.8.1) 定义的代价函数 J_1 可以改造为

$$J_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{x(n+m)|e(n)|^2\} \tag{5.8.8}$$

式中，误差信号 $e(n)$ 由式 (5.8.1b) 定义。

代价函数 (5.8.8) 是 Delopoulos 与 Giannakis [60] 提出的, 他们还证明了 $J_2 = \alpha J_1$, 其中 $\alpha = \sigma_v^2/[\gamma_{3v}H(0)]$。

与 J_1 准则不同，准则 J_2 使用 $x(n)$ 的三阶累积量，因此，理论上不仅可以完全抑制高斯有色噪声，而且还可抑制对称分布的非高斯有色噪声，因为这种非高斯有色噪声的三阶累积量恒等于零。

5.8.2 RLS 自适应算法

使代价函数 J_2 最小化，即可获得最优滤波器。现在，考虑它的递推最小二乘 (RLS) 实现。为此，定义加权误差平方和作为代价函数

$$J_3 = \sum_{k=1}^{n} s_x(k)\left[x(k) - \sum_{i=1}^{m} w_i x(k-i)\right]^2 \tag{5.8.9a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_x(k)[x(k) - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)]^2 \tag{5.8.9b}$$

式中

$$s_x(k) = \sum_{m=-M}^{M} \beta(m)x(k-m) \tag{5.8.10a}$$

$$\boldsymbol{w} = [w_1, \cdots, w_m]^{\mathrm{T}} \tag{5.8.10b}$$

且 $\beta(m)$ 为一窗函数。

式 (5.8.9) 的解由下式确定：

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}}\sum_{k=1}^{n} s_x(k)[x(k) - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)]^2 = 0 \tag{5.8.11a}$$

或写作

$$\left[\sum_{k=1}^{n} s_x(k)\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\right]\boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{n} s_x(k)x(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{5.8.11b}$$

令

$$\boldsymbol{C}(n) = \sum_{k=1}^{n} s_x(k)\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) \tag{5.8.12a}$$

$$\boldsymbol{c}(n) = \sum_{k=1}^{n} s_x(k)x(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) \tag{5.8.12b}$$

则式 (5.8.11b) 的解为

$$\boldsymbol{w}(n) = \boldsymbol{C}^{-1}(n)\boldsymbol{c}(n) \tag{5.8.13}$$