

5.6 令 x 的概率密度函数为 $f(x) = 0.5e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$. 求 c_{kx} , $k > 2$.

5.7 令 x 是 m 个具有零均值和单位方差的独立同分布高斯随机变量之和, 则 x 的分布称为具有 m 个自由度的 χ^2 分布, 记作 χ_m^2 . 求该随机变量 x 的 k 阶累积量 c_{kx} .

5.8 已知 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是两个统计独立的高斯随机过程, 并且

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

令

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

试证明 $\{z(t)\}$ 是一高斯随机过程. 这一结论表明: 任何两个高斯随机过程之和仍为高斯随机过程.

5.9 令 $\{e(n)\}$ 是一非高斯平稳过程, 并假定 $\{e(n)\}$ 通过一冲激响应为 $\{h_i\}$ 的线性时不变稳定系统, 产生的输出序列为 $\{y(n)\}$. 试利用累积量定义建立以下关系:

- (1) 用 $\{e(n)\}$ 的累积量表示 $\{y(n)\}$ 的累积量;
- (2) 用 $\{e(n)\}$ 的多谱和冲激响应系数 $\{h_i\}$ 表示 $\{y(n)\}$ 的多谱.

5.10 $z(n) = x(n)\cos(\omega_c n) + y(n)\sin(\omega_c n)$, 其中 $x(n)$ 和 $y(n)$ 为相互独立的平稳过程, 并且 $E\{x(n)\} = E\{y(n)\} = 0$, $c_{2x}(\tau) = E\{x(n)x(n+\tau)\} = c_{2y}(\tau)$ 和 $c_{3x}(\tau_1, \tau_2) = E\{x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\} = c_{3y}(\tau_1, \tau_2)$. 试问 $z(n)$ 是平稳随机过程吗?

5.11 证明双谱的对称性:

$$B(\omega_1, \omega_2) = B^*(-\omega_2, -\omega_1) - B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2)$$

5.12 已知一线性系统的冲激响应 $\{h_i\}$ 满足绝对可求和条件, 即

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| < \infty$$

试证明由独立同分布 $e(n)$ 激励该线性系统产生的线性过程的多谱存在, 并连续.

5.13 令 $H(e^{j\omega})$ 满足条件 $H(e^{j\omega}) \neq 0, \forall \omega$, 并且 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |ih_i| < \infty$. 假定激励的

独立同分布过程的多谱不等于零, 其中 $k > 2$. 证明 $H(e^{j\omega})$ 可以从 k 阶谱 $S(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$ 得到, 至多相差一个未知的复常数尺度因子 $Ae^{j\omega m}$, 其中 A 是一个实数 (正或负), 而 m 为整数.

5.14 证明多谱公式

$$S_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \gamma_{ke} H(\omega_1) \cdots H(\omega_{k-1}) H(-\omega_1 - \cdots - \omega_{k-1})$$

5.15 假定 $H(e^{j\omega}) \neq 0, \forall \omega$, 并且 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |ih_i| < \infty$, 证明 $H(e^{j\omega})$ 的相位 $\phi(\omega)$ 是相

对于 ω 连续可导的。

5.16 令 $\{y(n)\}$ 是一个非高斯 MA(q) 过程, 其激励过程 $\gamma_{3e} \neq 0$. 求 $c_{3y}(\tau_1, \tau_2) \neq 0$ 的 τ_1, τ_2 值的范围, 并在 (τ_1, τ_2) 平面上画出 τ_1, τ_2 的支撑区。

5.17 令 $\tilde{x}_i = x_i * s_i$ 是 x_i 和 s_i 的卷积输出, 其中 x_i 和 h_j 分别为一独立同分布过程和时不变系统冲激响应。证明以下关系式:

$$E\{|\tilde{x}_i|^2\} = E\{|x_i|^2\} \sum_j |s_j|^2$$

和

$$K(\tilde{x}_i) = K(x_i) \sum_j |s_j|^4$$

式中 $K(x_i)$ 是 x_i 的峰度, 即有

$$K(x_i) = E\{|x_i|^4\} - 2E^2\{|x_i|^2\} - |E\{x_i^2\}|^2$$

5.18 令 x 表示一各时刻取值为独立同分布的随机过程, 而 $\tilde{x} = x * h_j$ 是 x 与线性时不变系统冲激响应 $\{h_j\}$ 的卷积。证明: 若 $E\{|\tilde{x}|^2\} = E\{|x|^2\}$, 则以下关系式成立:

$$(1) |K(\tilde{x})| \leq |K(x)|;$$

(2) $|K(\tilde{x})| = |K(x)|$ 当且仅当 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots]^T$ 是一个只有一个非零元素 (其幅度为 1) 的向量。

(提示: 利用题 5.16 的结果)

5.19 考虑一 MA(1) 过程

$$x(n) = w(n) - w(n-1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中 $\{w(n)\}$ 是一独立同分布随机过程, 并且 $E\{e(n)\} = 0, E\{w^2(n)\} = 1$ 和 $E\{w^3(n)\} = 1$. 求 $\{x(n)\}$ 的功率谱和双谱。

5.20 令

$$P_{1x}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{4x}(\tau, 0, 0) e^{-j\omega\tau}$$

表示 $\{x(n)\}$ 的特殊四阶累积量 $c_{4x}(\tau, 0, 0)$ 的功率谱。考虑复谐波过程

$$x(n) = \alpha e^{j\omega_0 n}$$

式中 ω_0 为常数, α 是一随机变量, 且 $E\{\alpha\} = 0$, $E\{\alpha^2\} = Q$, $E\{\alpha^3\} = 0$ 和 $E\{\alpha^4\} = \mu$ 。若复谐波过程的四阶累积量定义为

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \text{cum}[x(n), x^*(n + \tau_1), x(n + \tau_2), x^*(n + \tau_3)]$$

证明

$$P_{1x}(\omega) = \frac{\gamma}{Q} S_x(\omega)$$

式中 $\gamma = \mu - 3Q^2$, 而 $S_x(\omega)$ 是 $\{x(n)\}$ 的功率谱。

5.21 一阶 FIR 系统的冲激响应为

$$h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

令 $\{x(n)\}$ 是使用独立同分布过程 $\{e(n)\}$ 激励该 FIR 系统得到的输出序列, 其中 $E\{e(n)\} = 0$, $E\{e^2(n)\} = \sigma_e^2$ 和 $\gamma_{3e} = E\{e^3(n)\} \neq 0$ 。证明 $\{x(n)\}$ 的双谱的特殊切片 $S_{3x}(\omega, 0)$ 与功率谱 $S_x(\omega)$ 之间存在下列关系:

$$S_{3x}(\omega, 0) = \frac{\gamma_{3e}}{\sigma_e^2} H(0) S_x(\omega)$$

式中 $H(0)$ 是 FIR 系统频率传递函数 $H(\omega)$ 在零频率的值。

5.22 考虑实值谐波信号

$$x(n) = \sum_{k=1}^p A_k \cos(\omega_k n + \phi_k)$$

式中 ϕ_k 为独立的均匀分布 $U[-\pi, \pi)$, 且 $A_k > 0$, 证明 $x(n)$ 的四阶累积量为

$$\begin{aligned} c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 [\cos(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \cos(\tau_2 - \tau_3 - \tau_1) + \cos(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2)] \end{aligned}$$

5.23 令

$$s(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)e(n-i)$$

为信号, 而

$$\begin{aligned}x(n) &= s(n) + w_1(n) \\y(n) &= s(n - D) + w_2(n)\end{aligned}$$

分别为观测过程。定义准则函数

$$J_1(d) = \frac{|\text{cum}[x(n-d), x(n-d), y(n), y(n)]|}{\sqrt{|\text{CUM}_4[x(n)]||\text{CUM}_4[y(n)]|}}$$

式中 $\text{CUM}_4[x(n)] = \text{cum}[x(n), x(n), x(n), x(n)]$ 。证明下列结果成立:

- (1) $0 \leq J_1(d) \leq 1, \forall d$;
- (2) $J_1(d) = 1$ 当且仅当 $d = D$ 。

注: 准则 $J_1(d)$ 给出了时延估计的一种四阶累积量方法。

5.24 信号 $s(n)$ 和观测过程 $x(n), y(n)$ 问题 5.19, 定义准则函数

$$J_2(d) = \frac{|\text{CUM}_4[x(n-d) + y(n)]|}{16\sqrt{|\text{CUM}_4[x(n)]||\text{CUM}_4[y(n)]|}}$$

式中 $\text{CUM}_4[x(n)] = \text{cum}[x(n), x(n), x(n), x(n)]$ 。证明下列结果成立:

- (1) $0 \leq J_2(d) \leq 1, \forall d$;
- (2) $J_2(d) = 1$ 当且仅当 $d = D$ 。

注: 准则 $J_2(d)$ 给出了时延估计的另一种四阶累积量方法。

5.25 一非最小相位 MA 模型由

$$x(n) = w(n) + 0.9w(n-1) + 0.385w(n-2) - 0.771w(n-3)$$

给定, 其中 $w(n)$ 是一个零均值、方差为 1、三阶累积量 $\gamma_{3w} = 1$ 的独立同分布随机过程。观测数据为

$$y(n) = x(n) + v(n)$$

式中 $v(n)$ 是一个零均值、方差可调的高斯有色噪声。调整 $v(n)$ 的方差分别获得 0dB 和 10dB 的信噪比, 并使用 Giannakis-Mendel 算法和累积量算法分别估计 MA 参数。对每种算法, 在不同的信噪比情况下, 各独立进行 50 次计算机仿真实验, 试统计出两种算法的参数估计结果。

第 6 章 时频信号分析 —— 线性变换

在前面几章中，信号的分析要么在时域，要么在频域展开。它们构成了信号的时域分析或频域分析方法，使用的主要数学工具是 Fourier 变换，只适用统计量不随时间变化的平稳信号。然而，实际信号却往往有某个统计量是时间的函数，这类信号统称非平稳信号。很多人工信号和自然界的信号都是非平稳信号。例如，当飞机作机动飞行时，雷达的观测信号就是非平稳信号。

虽然 Kalman 滤波、RLS 算法等自适应滤波也适合非平稳信号，但只限于慢时变信号的跟踪，并不能得到一般时变信号的统计量等结果（如功率谱等）。换言之，这些信号处理方法不能满足非平稳信号分析的特殊要求。因此，需要对非平稳信号的分析与处理方法加以专门讨论。既然非平稳信号的统计特性是随时间变化的，那么对非平稳信号的主要兴趣便很自然地在其局部统计性能上。对非平稳信号而言，Fourier 变换不再是有效的数学分析工具，因为它是信号的全局变换，而信号局部性能的分析必须依靠信号的局部变换。另一方面，信号的局部性能需要使用时域和频域的二维联合表示，才能得到精确的描述。在这一意义上，常将非平稳信号的二维分析称为时频信号分析。

非平稳信号的时频分析可以分为线性变换和非线性变换两大类。本章讨论时频信号分析的线性变换，而时频信号分析的非线性变换的有关讨论则留在下一章里展开。

6.1 信号的局部变换

Fourier 变换 \mathcal{F} 和 Fourier 反变换 \mathcal{F}^{-1} 作为桥梁建立了信号 $s(t)$ 与其频谱 $S(f)$ 之间的一一对应关系：

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{Fourier 变换}) \quad (6.1.1a)$$

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (\text{Fourier 反变换}) \quad (6.1.1b)$$

这一 Fourier 变换对也可用角频率表示为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Fourier 变换}) \quad (6.1.2a)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{Fourier 反变换}) \quad (6.1.2b)$$

式 (6.1.1a) 和式 (6.1.1b) 分别称为信号的频域表示和时域表示, 图 6.1.1 示出了一信号的时域表示和频域表示之间的变换关系。从图中可看出, 时域和频域构成了观察一个信号的两种方式。Fourier 变换是在整体上将信号分解为不同的频率分量, 而缺乏局域性信息, 即它并不能告之某种频率分量发生在哪些时间内, 而这对非平稳信号是十分重要的。

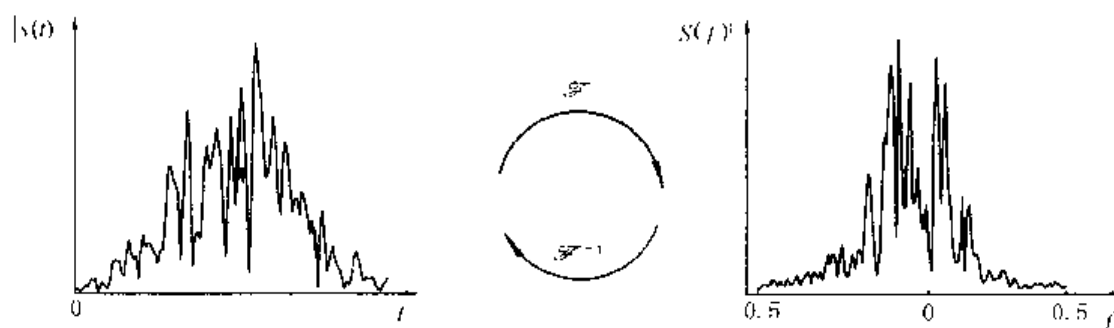


图 6.1.1 信号的时域表示与频域表示之间的关系

在讨论一种线性变换的时候, 将它写成被变换函数和变换核函数之间的内积形式, 往往会带来诸多的方便。为此, 定义复函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积为

$$\langle f(x), g(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx \quad (6.1.3)$$

则式 (6.1.1) 的 Fourier 变换对可用内积形式简洁表示为

$$S(f) = \langle s(t), e^{j2\pi ft} \rangle \quad (\text{Fourier 变换}) \quad (6.1.4a)$$

$$s(t) = \langle S(f), e^{-j2\pi ft} \rangle \quad (\text{Fourier 反变换}) \quad (6.1.4b)$$

显然, Fourier 变换的核函数为指数函数。

从式 (6.1.4) 可以看出, Fourier 变换的原函数 $s(t)$ 和核函数 $e^{j2\pi ft}$ 的时间长度均取 $(-\infty, \infty)$, 而 Fourier 反变换的原函数 $S(f)$ 和核函数 $e^{-j2\pi ft}$ 也在整个频率轴上取值。从这个意义上讲, Fourier 变换本质上是信号 $s(t)$ 的全局变换, 而 Fourier 反变换则是频谱 $S(f)$ 的全局变换。虽然 Fourier 变换及其反变换是信号分析的有力工

具，但是正如 Gabor 于 1946 年在其经典论文 “Theory of Communication” 中所指出的那样^[69]。

迄今为至，通信理论的基础是由信号分析的两种方法组成的：一种将信号描述成时间的函数，另一种将信号描述成频率的函数 (Fourier 分析)。这两种方法都是理想化的，……。然而，我们每一天的经历——特别是我们的听觉——却一直是用时间和频率二者描述信号的。

为了同时使用时间和频率描述信号，很自然地需要对非平稳信号 $s(t)$ 采用联合时频表示形式 $S(t, f)$ 。那么，如何建立 $s(t)$ 和 $S(t, f)$ 之间的变换关系呢？显然，我们不能还是使用 Fourier 变换这一全局变换方式，而应该改用信号的局部变换。

由于任何一种信号变换都可以写成该信号与某个选定的核函数之间的内积，因此，我们不难联想到信号局部变换可以利用两种基本形式来构造：

$$\text{信号 } s(t) \text{ 的局部变换} = \langle \text{取信号 } s(t) \text{ 的局部, 核函数无穷长} \rangle \quad (6.1.5a)$$

或

$$\text{信号 } s(t) \text{ 的局部变换} = \langle \text{取信号 } s(t) \text{ 的全部, 核函数局域化} \rangle \quad (6.1.5b)$$

下面是信号局部变换的几个典型例子。

(1) 短时 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \text{STFT}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(u)g^*(u-t)]e^{-j2\pi fu} du \\ &= \langle s(u)g^*(u-t), e^{j2\pi fu} \rangle \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

式中 $g(t)$ 是一“窄的”窗函数。

(2) Wigner-Ville 时频分布

$$\begin{aligned} P(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \left\langle z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right), e^{j2\pi f\tau} \right\rangle \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

(3) 小波变换

$$\begin{aligned} \text{WT}(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)h^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)h_{ab}^*(t)dt = \langle s(t), h_{ab}(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

式中, 变换核函数

$$h_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (6.1.9)$$

称为小波基函数。

(4) Gabor 变换

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \gamma^*(t - mT) e^{-i2\pi(nF)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \gamma_{mn}^*(t) dt = \langle s(t), \gamma_{mn}(t) \rangle \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

式中

$$\gamma_{mn}(t) = \gamma(t - mT) e^{i2\pi(nF)t} \quad (6.1.11)$$

称为 Gabor 基函数。

容易看出, 短时 Fourier 变换和 Wigner-Ville 分布属于第一种局部变换 (6.1.5a), 而小波变换和 Gabor 变换属于第二种信号局部变换 (6.1.5b)。

除了以上四种典型形式外, 还有其他多种局部变换形式, 如 Radon-Wigner 变换、分数阶 Fourier 变换等^[229]。在本书中, 我们主要讨论上面列举的四种局部变换。

以上四种局部变换习惯称为信号的时频表示。根据是否满足叠加原理或线性原理, 时频表示又分为线性时频表示和非线性时频表示两大类。具体说来, 若信号 $s(t)$ 是几个分量的线性组合, 并且 $s(t)$ 的时频表示 $T_s(t, f)$ 是每个信号分量的时频表示的相同线性组合, 则 $T_s(t, f)$ 称为线性时频表示; 否则, 称为非线性时频表示。以两个分量的信号 $z(t)$ 为例, 即当

$$s(t) = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) \rightarrow T_s(t, f) = c_1 T_{s_1}(t, f) + c_2 T_{s_2}(t, f) \quad (6.1.12)$$

时, $T_s(t, f)$ 为线性时频表示。

短时 Fourier 变换、小波变换和 Gabor 变换都是时频信号分析的线性变换或线性时频表示, 而 Wigner-Ville 分布则属于时频信号分析的非线性变换 (这里为二次型变换)。可以这样说, 非平稳信号的时频分析采用的是广义或修正的 Fourier 变换。

正如典型的平稳信号为高斯信号一样, 非平稳信号也有典型的信号, 这就是线性调频 (LFM: linear frequency modulation) 信号^①。顾名思义, LFM 信号就是频率按照线性规律随时间变化的信号。现在, 已广泛认识到, 任何一种时频分析如果不

① LFM 信号有时也写作 chirp 信号。

能为 LFM 信号提供良好的时频聚集性能, 那么它便不适合用作非平稳信号时频分析的工具。

6.2 解析信号与瞬时物理量

在非平稳信号的分析与处理中, 实际信号往往是实的, 但却需要把它转换成复信号后进行数学表示与分析。特别是, 某些重要的瞬时物理量和时频表示就直接使用待分析实信号的复信号形式作定义。那么, 为什么需要这样的转换呢?

当信号 $s(t)$ 为实信号时, 其频谱

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.2.1)$$

具有共轭对称性, 因为

$$S^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j2\pi ft} dt = S(-f) \quad (6.2.2)$$

从有效信息的利用角度看问题, 实信号的负频率频谱部分完全是冗余的, 因为它可以从正频率的频谱获得。将实信号的负频率频谱部分去掉, 只保留正频率频谱部分, 信号占有的频带减少一半, 有利于无线通信 (称为单边带通信) 等。只保留正频率频谱部分的信号, 其频谱不再存在共轭对称性, 所对应的时域信号应为复信号。

复数变量最常用的表示方法是使用实部和虚部两个分量。复信号也一样, 必须用实部和虚部两路信号来表示它。当然, 两路信号在传输中会带来麻烦, 因此实际信号的传输总是用实信号, 而在接收信号的处理中则使用复信号。下面讨论常用的两种复信号: 解析信号和基带信号。

6.2.1 解析信号

表示复信号 $z(t)$ 的最简单方法是用所给定的实信号 $s(t)$ 作其实部, 并另外构造一“虚拟信号” $\hat{s}(t)$ 作其虚部, 即

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (6.2.3)$$

构造虚拟信号 $\hat{s}(t)$ 的最简单的方法莫过于用原实信号 $s(t)$ 去激励一滤波器, 用其输出作虚拟信号。不妨令滤波器的冲激响应为 $h(t)$, 则

$$\hat{s}(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-u)h(u)du \quad (6.2.4)$$

即复信号可表示为

$$z(t) = s(t) + js(t) * h(t) \quad (6.2.5)$$

式中 * 表示函数的卷积。对上式两边作 Fourier 变换, 则得频谱表达式为

$$Z(f) = S(f) + jS(f)H(f) = S(f)[1 + jH(f)] \quad (6.2.6)$$

对于窄带信号这种特殊情况, 常保留该信号频谱的正频率部分, 而剔除负频率部分 (为使信号总能量不变, 需要将正频率的频谱幅值加倍)。这意味复信号 $z(t)$ 的频谱应该具有下列形式:

$$Z(f) = \begin{cases} 2S(f), & f > 0 \\ S(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (6.2.7)$$

比较式 (6.2.6) 与式 (6.2.7) 容易看出, 只要选择滤波器的传递函数满足下式即可:

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \quad (6.2.8a)$$

$$= -j \operatorname{sgn}(f) \quad (6.2.8b)$$

式中

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} +1, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \quad (6.2.9)$$

为符号函数。

对式 (6.2.8) 两边进行 Fourier 反变换, 可获得滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{\pi t} \quad (6.2.10)$$

将式 (6.2.10) 代入式 (6.2.4), 又有

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}[s(t)] = s(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (6.2.11a)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (6.2.11b)$$

式中 t 和 τ 为实的变量, 而 $\mathcal{H}[s(t)]$ 表示实信号 $s(t)$ 的 Hilbert 变换。由于式 (6.2.10) 所示的冲激响应 $h(t)$ 的作用是使实信号 $s(t)$ 变成它的 Hilbert 变换, 所以 $h(t)$ 或 $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ 称为 Hilbert 变换器, 也称 Hilbert 滤波器。