

如果已知 Hilbert 变换 $\hat{s}(t)$, 则也可由它恢复原实信号:

$$s(t) = \frac{-1}{\pi t} * \hat{s}(t) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (6.2.12)$$

式 (6.2.8) 说明, Hilbert 滤波器 $H(f)$ 是一个全通滤波器, 因为 $|H(f)| = 1, \forall f \neq 0$, 见图 6.2.1 (a), 而图 6.2.1(b) 是 Hilbert 滤波器 $H(f)$ 的相位特性。

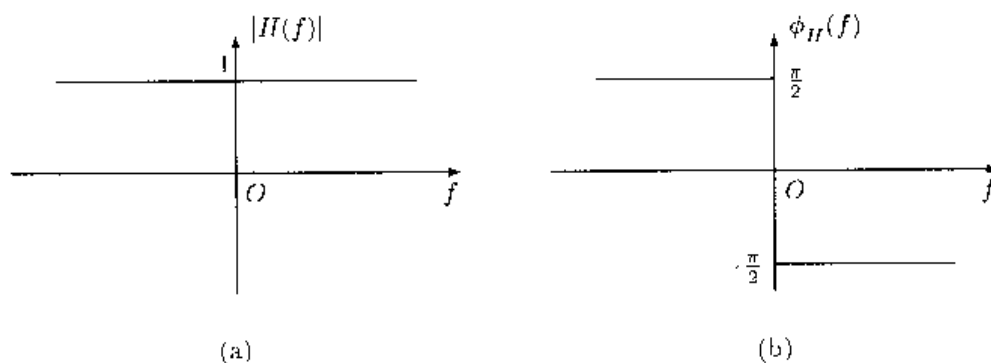


图 6.2.1 Hilbert 滤波器的传递函数

定义 6.2.1 (解析信号) 与实信号 $s(t)$ 对应的解析信号 (analytic signal) $s_A(t)$ 定义为 $s_A(t) = A[s(t)]$, 其中 $A[s(t)] = s(t) + j\mathcal{H}[s(t)]$ 是构成解析信号的算子, 且 $\hat{s}(t) = \mathcal{H}[s(t)]$ 是 $s(t)$ 的 Hilbert 变换。

Hilbert 变换具有以下性质:

性质 1 信号 $s(t)$ 通过 Hilbert 变换器后, 信号频谱的幅度不发生变化。

证明 显然。这是因为 Hilbert 变换器是全通滤波器, 对信号频谱的幅值没有任何影响, 引起频谱变化的只是其相位。 ■

性质 2 $s(t) = -\mathcal{H}[\hat{s}(t)]$ 。

证明 由于 $s_A(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$ 是 $s(t)$ 的解析信号, 所以 $z(t) = js_A(t) = -\hat{s}(t) + js(t)$ 也是 $s(t)$ 的解析信号。这意味着, $s(t)$ 是 $-\hat{s}(t)$ 的 Hilbert 变换, 故性质 2 成立。 ■

性质 3 若 $x(t), x_1(t), x_2(t)$ 的 Hilbert 变换分别为 $\hat{x}(t), \hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)$, 且 $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$, 则

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)$$

证明 由式 (6.2.11) 易知

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} = [x_1(t) * x_2(t)] * \frac{1}{\pi t} \\ &= \left[x_1(t) * \frac{1}{\pi t} \right] * x_2(t) = \hat{x}_1(t) * x_2(t) \end{aligned}$$

同理可证 $\hat{x}(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)$. ■

性质 4 $s(t) = -\mathcal{H}^2[s(t)]$, 其中 $\mathcal{H}^2[s(t)] = \mathcal{H}\{\mathcal{H}[s(t)]\}$.

证明 此性质可由性质 2 直接得到. ■

容易验证, Hilbert 变换还具有以下的线性、时移不变性和尺度不变性:

$$x(t) = as_1(t) + bs_2(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = a\hat{s}_1(t) + b\hat{s}_2(t)$$

$$x(t) = s(t-a) \Rightarrow \hat{x}(t) = \hat{s}(t-a)$$

$$x(t) = s(at), a > 0 \Rightarrow \hat{x}(t) = \hat{s}(at)$$

$$x(t) = s(-at) \Rightarrow \hat{x}(t) = -\hat{s}(-at)$$

表 6.2.1 列出了一些典型信号及其 Hilbert 变换^[15].

表 6.2.1 Hilbert 变换对

名 称	函 数	Hilbert 变换
常 数	n	零
正 弦	$\sin(\omega t)$	$-\cos(\omega t)$
余 弦	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$
指 数	$e^{j\omega t}$	$-j\operatorname{sgn}(\omega)e^{j\omega t}$
方波脉冲	$p_a(t) = \begin{cases} 1, & t \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{t+a}{t-a} \right $
双极性脉冲	$p_a(t)\operatorname{sgn}(t)$	$-\frac{1}{\pi} \ln \left 1 - \frac{a^2}{t^2} \right $
双三角	$tp_a(t)\operatorname{sgn}(t)$	$-\frac{1}{\pi} \ln \left 1 - \frac{a^2}{t^2} \right $
三 角	$\operatorname{Tri}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a}, & t \leq a \\ 0, & t > a \end{cases}$	$-\frac{1}{\pi} \left[\ln \left \frac{t-a}{t+a} \right + \frac{t}{a} \left \frac{t^2}{t^2-a^2} \right \right]$
Cauchy 脉冲	$\frac{a}{a^2+t^2}$	$\frac{t}{a^2+t^2}$
高斯脉冲	$e^{-\pi t^2}$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4\pi}\omega^2} \sin(\omega t) d\omega$
对称指数	$e^{-a t }$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2a}{a^2+\omega^2} \sin(\omega t) d\omega$
sinc	$\frac{\sin(at)}{at}$	$\frac{\sin^2(at/2)}{(at/2)} = \frac{1-\cos(at)}{at}$
反对称指数	$\operatorname{sgn}(t)e^{-a t }$	$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2a}{a^2+\omega^2} \cos(\omega t) d\omega$

6.2.2 基带信号

对通信和雷达一类信息系统,常用的信号是实的窄带信号,即

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \\ &= \frac{1}{2} a(t) \left(e^{j[2\pi f_c t + \phi(t)]} + e^{-j[2\pi f_c t + \phi(t)]} \right) \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

式中, f_c 为载波频率。上述窄带信号的正、负频分量明显分开,负频分量容易被滤除。保留其正频部分,并将幅度加倍,即可得到其解析信号为

$$s_A(t) = a(t)e^{j\phi(t)}e^{j2\pi f_c t} \quad (6.2.14)$$

式中 $e^{j2\pi f_c t}$ 为复数,它作为信息的载体而不含有用的信息。上式两边同乘以 $e^{-j2\pi f_c t}$,即可将信号频率下移 f_c ,变成零载频,得到一新信号为

$$s_B(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (6.2.15)$$

这种零载频的信号称为基带信号 (baseband signal), 或称零中频信号。

图 6.2.2 画出了从实信号得到基带信号的示意图。

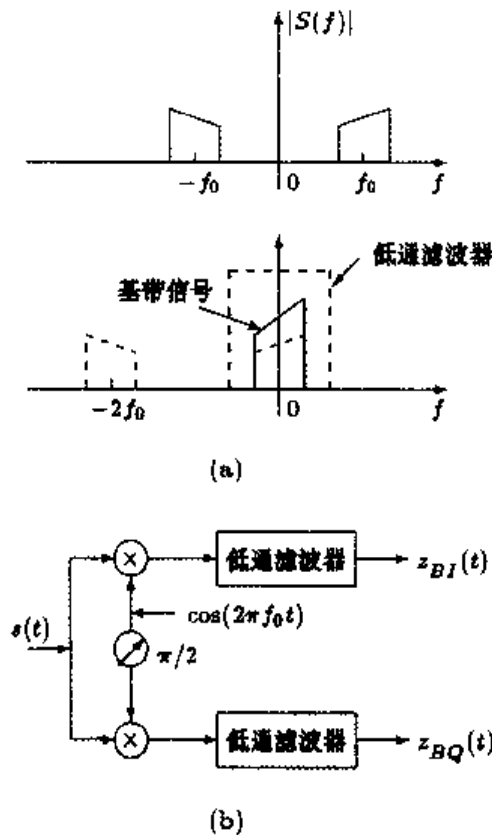


图 6.2.2 从实信号得到基带信号

从以上讨论可知,作复信号处理后,得到单边谱,后面再作任意的变频处理,也只是载波频率 f_c 的搬移,包络信息则保持不变。与复信号不同,实信号不能将载频下移很低,否则正、负谱的混叠会使包络失真。

对比式 (6.2.15) 和式 (6.2.14) 可知,解析信号与基带信号存在以下关系:

$$s_A(t) = s_B(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (6.2.16)$$

这表明:基带信号 $s_B(t)$ 就是解析信号 $s_A(t)$ 的复包络,它和 $s_A(t)$ 一样是复信号。

需要注意的是,基带信号 $s_B(t)$ 的中频为零,它既有正频分量,又有负频分量,但是由于它是复信号,其频谱不具有共轭对称性质。因此,若对基带信号剔除负频分量,就会造成有用信息的损失。另一方面,我们容易看出,式 (6.2.15) 的基带信号只不过是式 (6.2.14) 的解析信号的频移形式,因此在很多场合(如时频分析等),使用基带信号和使用解析信号一样合适。特别是在通信信号处理中,基带信号比解析信号使用起来更方便,因为基带信号不含载波,解析信号含载波,而载波的作用只是作为信息信号的一种载体,不含有任何有用的信息。

6.2.3 瞬时频率与群延迟

信号的重要特性包括

- 带宽 $B = f_{\max} - f_{\min}$;
- 存在于带宽 B 内的所有频率(从最低频率 $f_{\min}$ 到最高频率 $f_{\max}$);
- 在这些频率处的信号相对幅值;
- 所有频率发生的时间;
- 信号的持续时间 T , 简称时宽。

所有实际的信号都有一个起点和一个终点。时宽 T 在时域的作用和带宽 B 在频域的作用相同。对于 $0 < t < T$, 我们希望知道信号的能量是如何分布的。这就是信号的所谓频率特性。

为了描述非平稳信号随时间变化的频率特性,瞬时物理量往往起着重要的作用。瞬时频率和群延迟就是这样两个物理量。

“频率”是我们在工程和物理学乃至日常生活中最常用的技术术语之一。在平稳信号的分析与处理中,当我们提到频率时,指的是 Fourier 变换的参数——圆频率 f 或角频率 ω , 它们与时间无关。然而,对于非平稳信号而言,Fourier 频率不再是合适的物理量。这里有两个原因:(1) 非平稳信号不再简单地用 Fourier 变换作分析工具,(2) 非平稳信号的频率是随时间变化的。因此,我们需要使用另一种频率概念,它就是瞬时频率。

从物理学的角度, 信号可分为单分量和多分量信号两大类。单分量信号在任意时刻都只有一个频率, 该频率称为信号的瞬时频率。多分量信号则在某些时刻具有多个不同的瞬时频率。瞬时频率最早是由 Carson^[37] 和 Gabor^[69] 分别定义的, 而且两种定义不同。后来, Ville^[200] 统一了这两种不同的定义, 将信号 $s(t) = a(t) \cos[\phi(t)]$ 的瞬时频率定义为

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)] \quad (6.2.17)$$

式中, 下标 i 代表瞬时 (instantaneous), 而 $z(t)$ 是实信号 $s(t)$ 的解析信号。即是说, 瞬时频率定义为解析信号 $z(t)$ 的相位的导数。式 (6.2.16) 有很明确的物理意义: 解析信号 $z(t)$ 表示复平面的一向量, 而瞬时频率则表示该向量幅角的转速 (以单位时间转动多少周计, 如以弧度为单位, 则应乘以 2π)。Ville 进一步注意到: 由于瞬时频率是时变的, 所以应该存在有与瞬时频率相对应的瞬时谱, 并且该瞬时谱的平均频率即为瞬时频率。

令 E 代表信号 $z(t)$ 的总能量, 即

$$\|z(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df = E \quad (6.2.18)$$

因此, 归一化的函数 $|z(t)|^2/E$ 和 $|Z(f)|^2/E$ 即可分别想象成信号 $z(t)$ 在时域和频域的能量密度函数。此时, 便可以使用概率论中的矩的概念来量化描述信号的性能。例如, 可以使用一阶矩定义信号谱的平均频率:

$$\bar{f} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} f |Z(f)|^2 df = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f |Z(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df} \quad (6.2.19a)$$

和瞬时频率的时间平均

$$\bar{f}_i = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) |z(t)|^2 dt = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) |z(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt} \quad (6.2.19b)$$

利用 Gabor 的平均测度^[69], Ville^[200] 证明了: 信号谱的平均频率等于瞬时频率的时间平均, 即 $\bar{f} = \bar{f}_i$ 。

式 (6.2.17) 的瞬时频率也可写成差分形式:

$$f_i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\delta t} \{ \arg[z(t + \delta t)] - \arg[z(t - \delta t)] \} \quad (6.2.20)$$

令离散采样频率为 f_s , 则上式给出离散时间信号 $s(n)$ 情况下的瞬时频率定义:

$$f_i(n) = \frac{f_s}{4\pi} \{ \arg[z(n+1)] - \arg[z(n-1)] \} \quad (6.2.21)$$

与时域信号 $z(t)$ 对应的瞬时物理量为瞬时频率, 而与频域信号 $Z(f)$ 对应的瞬时物理量称为群延迟 $\tau_g(f)$ 。群延迟表示频谱 $Z(f)$ 中频率为 f 的各个分量的延迟, 定义为

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arg[Z(f)] \quad (6.2.22)$$

式中 $\arg[Z(f)]$ 为信号 $z(t)$ 的相位谱。若 $Z(f) = A(f)e^{j\theta(f)}$, 则 $\arg[Z(f)] = \theta(f)$ 。

类似于式 (6.2.20), 群延迟也可以定义为

$$\tau_g(f) = \lim_{\delta f \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\delta f} (\arg[Z(f+\delta f)] - \arg[Z(f-\delta f)]) \quad (6.2.23)$$

而离散时间信号 $z(n)$ 的群延迟则定义为

$$\tau_g(k) = \frac{1}{4\pi} (\arg[Z(k+1)] - \arg[Z(k-1)]) \quad (6.2.24)$$

和瞬时频率一样, 群延迟也有自己的物理解释。如果信号为线性相位, 且其初始相位为零, 则信号作不失真的延迟, 其延迟时间为该线性相位特性的负斜率即式 (6.2.22)。虽然一般信号并不具有线性相位特性, 但某一频率附近很窄的频带内的相位特性仍然可以近似看成是线性的, 所以用其相位特性的斜率作这些分量的群延迟是合理的。

6.2.4 不相容原理

非平稳信号分析既然采用联合的时频表示, 那么是否可以同时得到理想的时间分辨率和频率分辨率呢? 这个问题的答案是否定的。

令 $s(t)$ 是一个具有有限能量的零均值信号, 而 $h(t)$ 为一窗函数。信号 $s(t)$ 的平均时间 $\bar{t}_s$ 和平均频率 $\bar{\omega}_s$ 定义为

$$\bar{t}_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt \quad (6.2.25a)$$

$$\bar{\omega}_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega \quad (6.2.25b)$$

式中 $S(\omega)$ 是 $s(t)$ 的 Fourier 变换。

类似地, 窗函数 $h(t)$ 的平均时间和平均频率定义为

$$\bar{t}_h \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt \quad (6.2.26a)$$

$$\bar{\omega}_h \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |H(\omega)|^2 d\omega \quad (6.2.26b)$$

信号 $s(t)$ 的有限宽度 T_s 和频谱的有限宽度 B_s 分别称为该信号的时宽和带宽, 它们的定义为^[54]

$$T_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t}_s)^2 |s(t)|^2 dt \quad (6.2.27a)$$

$$B_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega}_s)^2 |S(\omega)|^2 d\omega \quad (6.2.27b)$$

时宽和带宽也可定义为

$$T_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} \quad (6.2.28a)$$

$$B_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega} \quad (6.2.28b)$$

它们分别称为信号 $s(t)$ 的有效时宽和有效带宽。

能量近似分布在时宽 $[-T/2, T/2]$ 和带宽 $[-B/2, B/2]$ 内的信号称为“有限能量信号”。

考虑时宽和带宽之间的变化关系。令信号 $s(t)$ 的能量完全位于时宽 $[-T/2, T/2]$ 内, 即信号具有严格意义下的时宽 T 。让我们在不改变信号幅值的条件下沿时间轴拉伸 $s(t)$, 看看会发生什么情况。不妨令 $s_k(t) = s(kt)$ 代表拉伸后的信号, 其中 k 为拉伸比 ($k < 1$ 对应信号时间区域的压缩, $k > 1$ 对应信号时区的拉伸)。由时宽 T_s 的定义式知, 拉伸信号的时宽是原信号时宽的 k 倍, 即 $T_{s_k} = kT_s$ 。另外, 计算拉伸信号的 Fourier 变换得到 $S_k(\omega) = \frac{1}{k} S(\frac{\omega}{k})$, $k > 0$ 。再由带宽 B_s 的定义立即知, 拉伸信号的带宽是原信号带宽的 $\frac{1}{k}$ 倍, 即 $B_{s_k} = \frac{1}{k} B_s$ 。显而易见, 拉伸信号的时宽—带宽乘积与原信号的时宽—带宽乘积相同, 即 $T_{s_k} B_{s_k} = T_s B_s$ 。这一结论说明了对于任意信号恒有关系式 $T_s B_s = \text{常数}$ 的可能性。一个信号的时宽和带宽之间的这种基本关系可以用数学语言叙述如下。

命题 6.2.2 (不相容原理) 对于有限能量的任意信号 $s(t)$ 或窗函数 $h(t)$, 其时宽和带宽的乘积总是满足下面的不等式:

$$\text{时宽-带宽乘积} = T_s B_s = \Delta t_s \Delta \omega_s > \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad T_h B_h = \Delta t_h \Delta \omega_h > \frac{1}{2} \quad (6.2.29)$$

不相容原理也称测不准原理或 Heisenberg 不等式。

式 (6.2.29) 中的 Δt 和 $\Delta \omega$ 分别称为时间分辨率和频率分辨率。顾名思义, 时间分辨率和频率分辨率分别是信号在两个时间点和两个频率点之间的区分能力。不相容原理表明, 时宽和带宽 (即时间分辨率和频率分辨率) 是一对矛盾的量, 我们不可能同时得到任意高的时间分辨率和频率分辨率。两个极端的例子是: 冲激信号 $s(t) = \delta(t)$ 的时宽为零, 而其带宽为无穷大 (其频谱恒等于 1); 单位直流信号 $s(t) = 1$ 的带宽为零 (其频谱为冲激函数), 但其时宽无穷大。只有当信号为高斯函数 $e^{-\pi t^2}$ 时, 式 (6.2.29) 才取等号。

窗函数在非平稳信号处理中起着重要的作用: 窗函数是否具有高的时间分辨率和频率分辨率与待分析的信号的非平稳特性有关。根据以上分析, 如果我们使用冲激信号作窗函数, 则相当于只取非平稳信号在 t 时刻的值进行分析, 时间分辨率最高, 但却完全丧失了频率分辨率。相反, 如果取单位直流信号作窗函数, 即像 Fourier 变换那样取无穷长的信号进行分析, 则其频率分辨率最高, 但却完全没有了时间分辨率。这预示着, 对于非平稳信号, 局部变换的窗函数必须在信号的时间分辨率和频率分辨率之间作适当的折中选择。值得强调指出的是, 对非平稳信号作加窗的局域处理, 窗函数内的信号必须是基本平稳的, 即窗宽必须与非平稳信号的局部平稳性相适应。因此, 非平稳信号分析所能获得的频率分辨率与信号的“局域平稳长度”有关。该长度很短的非平稳信号是不可能直接得到高的频率分辨率的。

窗函数与局域平稳长度间的上述关系告诉我们, 时频分析适合局域平稳长度比较大的非平稳信号; 若局域平稳长度很小, 则时频分析的效果较差。这一点在进行时频信号分析时是必须注意的。有关窗宽选择与时频分析分辨率之间的关系, 我们在后面还将进一步具体讨论。

6.3 短时 Fourier 变换

瞬时频率和群延迟虽然是描述非平稳信号局部特性的两个有用的物理量, 但是它们却不适用于多分量信号。例如, 若 $z(t) = A(t)e^{j\phi(t)} = \sum_{i=1}^p z_i(t)$ 是一个 p 分量信号, 我们就无法从相位 $\phi(t)$ 的导数得到各个分量信号的瞬时频率。为了获得各分量

的瞬时频率,一种直观的方法是引入“局部频谱”的概念:使用一个很窄的窗函数取出信号,并求其 Fourier 变换。由于这一频谱是信号在窗函数一个窄区间内的频谱,剔除了窗函数以外的信号频谱,故称其为信号的局部频谱是合适的。使用窄窗函数的 Fourier 变换习惯称为短时 Fourier 变换,它是加窗 Fourier 变换的一种形式。加窗 Fourier 变换最早由 Gabor 于 1946 年提出^[69]。

6.3.1 连续短时 Fourier 变换

令 $g(t)$ 是一个时间宽度很短的窗函数,它沿时间轴滑动。于是,信号 $z(t)$ 的短时 Fourier 变换 (缩写作 STFT) 定义为

$$\text{STFT}_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} [z(u)g^*(u-t)]e^{-j2\pi fu}du \quad (6.3.1)$$

式中 $*$ 代表复数共轭。显然,如果取无穷长 (全局) 的矩形窗函数 $g(t) = 1, \forall t$, 则短时 Fourier 变换退化为传统 Fourier 变换。

由于信号 $z(u)$ 乘一个相当短的窗函数 $g(u-t)$ 等价于取出信号在分析时间点 t 附近的一个切片,所以 $\text{STFT}(t, f)$ 可以理解为信号 $z(t')$ 在“分析时间” t 附近的 Fourier 变换 (称之为“局部频谱”),如图 6.3.1 所示。

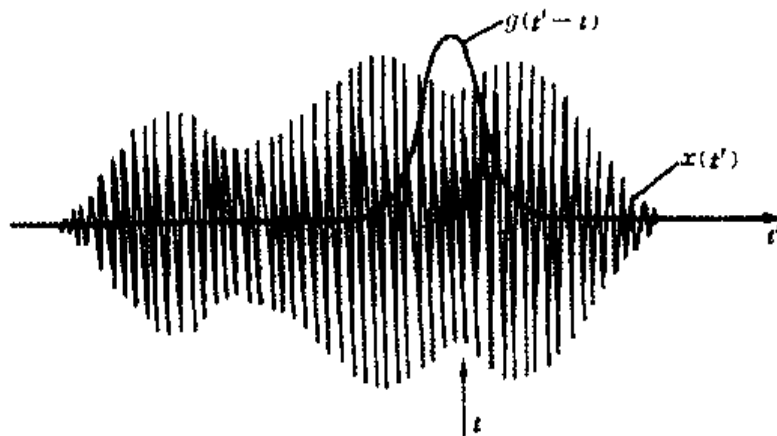


图 6.3.1 短时 Fourier 变换可视为一局部频谱

连续短时 Fourier 变换具有以下基本性质 (证明见习题 6.1)。

性质 1 短时 Fourier 变换是一种线性时频表示。

性质 2 短时 Fourier 变换具有频移不变性:

$$\tilde{z}(t) = z(t)e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \text{STFT}_{\tilde{z}}(t, f) = \text{STFT}_z(t, f - f_0) \quad (6.3.2)$$

但不具有时移不变性:

$$\tilde{z}(t) = z(t - t_0) \rightarrow \text{STFT}_{\tilde{z}}(t, f) = \text{STFT}_z(t - t_0, f)e^{-j2\pi t_0 f} \quad (6.3.3)$$

即不满足 $\text{STFT}_z(t, f) = \text{STFT}_z(t - t_0, f)$ 。

在信号处理中, 传统的 Fourier 变换称为 Fourier 分析, 而 Fourier 反变换称为 Fourier 综合, 因为 Fourier 反变换是利用 Fourier 频谱来重构或综合原信号的。类似地, 短时 Fourier 变换也有分析和综合之分。很显然, 为了使 STFT 真正是一种有实际价值的非平稳信号分析工具, 信号 $z(t)$ 应该能够由 $\text{STFT}_z(t, f)$ 完全重构出来。

设重构公式为

$$p(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}_z(t, f) \gamma(u - t) e^{j2\pi f u} dt df \quad (6.3.4)$$

将式 (6.3.1) 代入式 (6.3.4) 容易证明

$$\begin{aligned} p(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(t' - u)} df \right] z(t') g^*(t' - t) \gamma(u - t) dt' dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(t') g^*(t' - t) \gamma(u - t) \delta(t' - u) dt' dt \end{aligned}$$

这里使用了大家熟知的积分结果 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(t' - u)} df = \delta(t' - u)$ 。利用 δ 函数的性质, 立即有

$$p(u) = z(u) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(u - t) \gamma(u - t) dt = z(u) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \gamma(t) dt$$

当重构结果 $p(u)$ 恒等于原始信号 $z(t)$ 时, 我们称这样的重构为“完全重构”。由上式可以看出, 为了实现完全重构即为了使 $p(u) = z(u)$, 则要求窗函数 $g(t)$ 和 $\gamma(t)$ 必须满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \gamma(t) dt = 1 \quad (6.3.5)$$

称之为短时 Fourier 变换的完全重构条件。

完全重构条件是一个很宽的条件, 对于一个给定的分析窗函数 $g(t)$, 满足条件式 (6.3.5) 的综合窗函数 $\gamma(t)$ 可以有无穷多种可能的选择。那么, 如何选择一个合适的综合窗函数 $\gamma(t)$ 呢? 这里有三种最简单的选择: (1) $\gamma(t) = g(t)$; (2) $\gamma(t) = \delta(t)$; (3) $\gamma(t) = 1$ 。

我们最感兴趣的是第一种选择 $\gamma(t) = g(t)$, 与之对应的完全重构条件式 (6.3.5) 变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (6.3.6)$$

这一公式称为能量归一化。此时, 式 (6.3.4) 可写成

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}_z(t', f') g(t - t') e^{j2\pi f' t'} dt' df' \quad (6.3.7)$$