

上式可视为广义短时 Fourier 反变换。与 Fourier 变换和 Fourier 反变换都是一维变换不同, 短时 Fourier 正变换 (6.3.1) 是一维变换, 而广义短时 Fourier 反变换 (6.3.7) 则为二维变换。

综上所述, 短时 Fourier 变换可视为非平稳信号的时频分析, 而广义短时 Fourier 反变换则为非平稳信号的时频综合。这就是为什么把 $g(t)$ 和 $\gamma(t)$ 分别称为分析窗函数和综合窗函数的原因。

下面对短时 Fourier 变换的时域定义式 (6.3.1) 的表述方式作进一步的讨论。

函数 $\text{STFT}_z(t, f)$ 可以看作是信号 $z(t)$ 与窗函数 $g(u)$ 的时间平移—频率调制形式 $g_{t,f}(u)$ 的内积, 即

$$\text{STFT}_z(t, f) = \langle z, g_{t,f} \rangle \quad (6.3.8)$$

式中

$$g_{t,f}(u) = g(u - t)e^{j2\pi fu} \quad (6.3.9)$$

而

$$\langle z, g_{t,f} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z(u)g_{t,f}^*(u)du \quad (6.3.10)$$

原则上, 分析窗函数 $g(t)$ 可以在平方可积分空间即 $L^2(R)$ 空间内任意选择。不过, 在实际应用中, 我们希望选择的窗函数 $g(t)$ 是一个“窄的”时间函数, 以使得式 (6.3.1) 的积分仅受到 $z(t)$ 及其附近的值的影响。自然地, 我们还希望 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $G(f)$ 也是个“窄的”函数。为了看出这一要求的必要性, 我们不妨回忆一下卷积定理: 两个函数在时域的乘积 $z(t)g(t)$ 等价于它们在频域的卷积 $Z(f) * G(f)$ 。如果 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $G(f)$ 很宽, 则信号的 Fourier 变换 $Z(f)$ 通过卷积后, 在很宽的频率范围内将受到 $G(f)$ 的作用。这正是我们希望避免的。遗憾的是, 根据前面的不相容原理, 窗函数 $g(t)$ 的有效时宽 τ_{eff} 和带宽 ω_{eff} 不可能任意小, 因为它们的乘积服从 Heisenberg 不等式: $\tau_{\text{eff}}\omega_{\text{eff}} \geq 0.5$, 并且当窗函数取高斯函数即 $g(t) = e^{-\pi t^2}$ 时, $\tau_{\text{eff}}\omega_{\text{eff}} = 0.5$ 。即是说, 高斯窗函数具有最好 (即最小) 的时宽—带宽乘积。为了使窗函数还具有单位能量, 常取

$$g^0(t) = 2^{1/4}e^{-\pi t^2} \quad (6.3.11)$$

所得到的基函数 $g_{t,f}^0(t') = g^0(t' - t)e^{j2\pi ft'}$ 在物理学中叫做“标准相干态”, 而在工程中, 则是 Gabor 在提出加窗 Fourier 变换时引入的。因此, 常将 $g^0(t)$ 称为 Gabor 原子, 称 $g_{t,f}^0(t')$ 为 Gabor 基函数。Gabor 基函数 $g_{t,f}^0$ 在时频平面上高度聚集在时频点 (t, f) 附近。

提出短时 Fourier 变换的实际目的主要是了解信号的局域频率特性。上面一再提到“局部频谱”，那么“局部频谱”与基于(整体) Fourier 变换的“全局频谱”之间究竟有怎样的关系呢？从式 (6.3.1) 可知，一定时刻 t 的 $\text{STFT}_z(t, f)$ 即 $z(t')g^*(t'-t)$ 的 Fourier 变换不仅决定于 t 时刻附近窗函数内的信号，而且还和窗函数 $g(t)$ 本身有关。以频率为 f_0 的单频信号为例，基于 Fourier 变换的全局频谱为位于 f_0 的冲激函数 $\delta(f_0)$ 。这样的非时变信号若以时频表示(时间为横轴，频率为纵轴)描述之，按理说信号在时频平面的“局部频谱”应是在 f_0 的一条水平的冲激线函数，即任一时刻 t 的切片均为同一冲激谱。然而，实际情况并非如此，因为按照式 (6.3.1) 求得的“局部频谱”等于 $G(f-f_0)e^{j2\pi ft}$ ，其中 $G(f)$ 代表分析窗函数 $g(t)$ 的频谱。因此，单频信号的局部特性表现在相位因于 $e^{j2\pi ft}$ 里，并且局部谱被分析窗函数的频谱 $G(f)$ 展宽了，而且窗口越窄，频谱 $G(f)$ 就越宽，单频信号的局部频谱也就越宽。这说明分析谱的引入会降低局部频谱的分辨率。为了保持局部频谱的分辨率，分析窗就应该宽，但是当窗宽超过非平稳信号的局域平稳长度时，窗函数内的信号将是非平稳的，又会使相邻的频谱混叠，从而不能正确表现局部频谱。换句话说，窗宽应该与信号的局域平稳长度相适应。

6.3.2 离散短时 Fourier 变换

以上讨论了连续短时 Fourier 变换。对于任何实际应用而言，需要将 $\text{STFT}_z(t, f)$ 离散化，即将 $\text{STFT}_z(t, f)$ 在等间隔时频网格点 (mT, nF) 处采样，其中 $T > 0$ 和 $F > 0$ 分别是时间变量和频率变量的采样周期，而 m 和 n 为整数。为简便计，引入符号 $\text{STFT}(m, n) = \text{STFT}(mT, nF)$ 。于是，对于离散信号 $z(k)$ ，很容易得到短时 Fourier 变换公式 (6.3.1) 的离散化形式

$$\text{STFT}(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(k)g^*(kT - mT)e^{-j2\pi(nF)k} \quad (6.3.12)$$

和广义短时 Fourier 反变换公式 (6.3.4) 的离散化形式

$$z(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{STFT}(m, n)\gamma(kT - mT)e^{j2\pi(nF)k} \quad (6.3.13)$$

需要注意的是，与完全重构约束条件 (6.3.5) 相对应，采样周期 T 和 F 、离散分析窗 $g(k)$ 和离散综合窗 $\gamma(k)$ 之间也应满足离散情况的“完全重构条件”：

$$\frac{1}{F} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(kT + n\frac{1}{F} - mT\right)\gamma^*(kT - mT) = \delta(n), \quad \forall k \quad (6.3.14)$$

式中 $\delta(n)$ 为单位冲激函数，即 $\delta(0) = 1$ ，否则为 0。显然，上述条件要比连续情况的

完全重构条件 $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\gamma^*(t)dt = 1$ 苛刻。特别地, 若选择 $\gamma(k) = g(k)$, 则离散短时 Fourier 反变换为

$$z(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{STFT}(m, n)g(kT - mT)e^{j2\pi(nF)k} \quad (6.3.15)$$

短时 Fourier 变换在语音信号处理中有着重要的应用, 因为信号频率分量随时间变化快而且复杂的典型例子当推人的语音。为了分析语音信号, Koenig 等人^[103] 和 Potter 等人^[150] 早在半个世纪之前就相继提出了声谱图方法, 而谱图 (spectrogram) 定义为信号短时 Fourier 变换的模值平方, 即有

$$\text{SPEC}(t, \omega) = |\text{STFT}(t, \omega)|^2 \quad (6.3.16)$$

由于谱图为二维函数, 所以谱图的平均时间和平均频率定义为

$$\bar{t}_{\text{SPEC}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t |\text{SPEC}(t, \omega)|^2 dt d\omega \quad (6.3.17a)$$

$$\bar{\omega}_{\text{SPEC}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\text{SPEC}(t, \omega)|^2 dt d\omega \quad (6.3.17b)$$

利用这些物理量, 可以定义谱图的时宽和带宽分别为

$$T_{\text{SPEC}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t}_{\text{SPEC}})^2 |\text{SPEC}(t, \omega)|^2 dt d\omega \quad (6.3.18a)$$

$$B_{\text{SPEC}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega}_{\text{SPEC}})^2 |\text{SPEC}(t, \omega)|^2 dt d\omega \quad (6.3.18b)$$

通过直接计算, 容易验证

$$\bar{t}_{\text{SPEC}} = \bar{t}_z - \bar{t}_g \quad (6.3.19)$$

$$\bar{\omega}_{\text{SPEC}} = \bar{\omega}_z + \bar{\omega}_g \quad (6.3.20)$$

$$T_{\text{SPEC}}^2 = T_z^2 + T_g^2 \quad (6.3.21)$$

$$B_{\text{SPEC}}^2 = B_z^2 + B_g^2 \quad (6.3.22)$$

最后两式是谱图、信号、窗函数三者的时宽和带宽之间的关系。

短时 Fourier 变换可视为一种窗函数很短的加窗 Fourier 变换。当窗函数取其他形式时, 可以得到其他类型的加窗 Fourier 变换。下一节将介绍的 Gabor 变换就是另外一种典型的加窗 Fourier 变换。

6.4 Gabor 变换

使用级数作为信号或函数的展开形式是一种重要的信号处理手段。根据基函数是否正交,级数展开分为正交级数展开和非正交级数展开。Fourier 分析中的 Fourier 级数就是一种典型的正交级数展开。在这一节里,我们介绍信号的一种非正交展开——Gabor 展开,它是 Gabor^[69]于 1946 年提出的。Gabor 展开系数的积分表示公式则称作 Gabor 变换。现在,Gabor 展开和 Gabor 变换已被公认是通信和信号处理中信号表示尤其是图像表示的最好方法之一。

6.4.1 连续 Gabor 变换

令 $\phi(t)$ 是我们感兴趣的实连续时间信号,并以时间间隔 T 对信号采样。引入信号 $\phi(t)$ 的时间和频率联合函数 Φ , 定义为

$$\Phi(t, f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi(t + mT) e^{-j2\pi f mT} \quad (6.4.1)$$

并称之为信号 $\phi(t)$ 的复谱图。假定 $g(t)$ 是一加给信号 $\phi(t)$ 的窗函数,且

$$G(t, f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t + mT) e^{-j2\pi f mT} \quad (6.4.2)$$

定义为窗函数 $g(t)$ 的复谱图。

那么,如何用窗函数的复谱图 $G(t, f)$ 表示信号的复谱图 $\Phi(t, f)$ 呢? 一种简单的方法是取

$$\Phi(t, f) = A(t, f) G(t, f) \quad (6.4.3)$$

式中 $A(t, f)$ 定义为

$$A(t, f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{-j2\pi(mTf - nEt)} \quad (6.4.4)$$

这里 F 代表信号 $\phi(t)$ 的频率采样间隔。

将式 (6.4.1)、式 (6.4.2) 和式 (6.4.4) 一并代入式 (6.4.3) 中,然后比较左右两边同幂次的系数,即得

$$\phi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_{mn}(t) \quad (6.4.5)$$

式中

$$g_{mn}(t) = g(t - mT)e^{j2\pi n Ft} \quad (6.4.6)$$

式 (6.4.5) 就是 Gabor^[69] 在半个世纪前提出的信号 $\phi(t)$ 的展开形式, 现在习惯称之为 (连续) 信号 $\phi(t)$ 的连续 Gabor 展开, 系数 a_{mn} 称为 Gabor 展开系数, 而 $g_{mn}(t)$ 则称为 (m, n) 阶 Gabor 基函数或 Gabor 原子。

由于 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 只是由母函数 $g(t)$ 的平移和调制这两种基本运算构造的, 所以若 $g(t)$ 是非正交的函数, 则 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 也是非正交的。因此, Gabor 展开是一种非正交的级数展开。在数学上, 函数的非正交级数展开称为原子展开; 而在物理学中, 非正交展开则是相对于相干态离散集合的级数展开。这就是为什么 Gabor 基函数也称 Gabor 原子的原因。

应当指出, Gabor 当时在推导式 (6.4.5) 时曾假定以下两个条件:

- 时间采样间隔 T 和频率采样间隔 F 满足关系 $TF = 1$;
- 窗函数 $g(t)$ 为高斯函数。

事实上, 现在的 Gabor 展开已不再受这两个条件的限制。

满足 $TF = 1$ 条件的采样称为临界采样, 与之对应的 Gabor 展开称为临界采样 Gabor 展开。此外, 还存在另外两种 Gabor 展开:

- (1) 欠采样 Gabor 展开: $TF > 1$;
- (2) 过采样 Gabor 展开: $TF < 1$ 。

业已证明^[57], 欠采样 Gabor 展开会导致数值上的不稳定, 所以它不是一种具有实际意义的方法, 本书将不讨论它。

下面讨论临界采样和过采样情况下的 Gabor 展开与 Gabor 变换。

1. 临界采样 Gabor 展开

虽然临界采样 Gabor 展开早在 1946 年就已问世, 但如何确定 Gabor 展开系数的问题却迟迟未有好的方法, 以至于它沉睡了 30 多年。只是到了 1981 年, 才由 Bastiaans^[15] 提出了一种简单而有效的方法, 使得 Gabor 展开获得了迅速的发展。

Bastiaans 的这一方法称为 Bastiaans 解析法, 其基本思想是: 在 $G(t, f)$ 可以作除法的假设下, 引入辅助函数 $\Gamma(t, f)$, 它是 $G(t, f)$ 共轭倒数的 $1/T$ 倍, 即

$$\Gamma(t, f)G^*(t, f) = \frac{1}{T} = F \quad (6.4.7)$$

式中

$$\Gamma(t, f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma(t + mT)e^{-j2\pi f mT} \quad (6.4.8)$$

将式 (6.4.3) 代入式 (6.4.7) 后得

$$\frac{1}{T}A(t, f) = \Phi(t, f)\Gamma(t, f) \quad (6.4.9)$$

再将式 (6.4.3)、式 (6.4.4) 和式 (6.4.8) 一起代入式 (6.4.9), 并比较等该式左边、右两边同幕次的系数, 即得到一个重要的公式:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\gamma^*(t-mT)e^{-j2\pi nFt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\gamma_{mn}^*(t)dt \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

式中

$$\gamma_{mn}(t) = \gamma(t-mT)e^{j2\pi nFt} \quad (6.4.11)$$

式 (6.4.10) 称为信号 $\phi(t)$ 的 Gabor 变换。它表明, 当信号 $\phi(t)$ 和辅助函数 $\gamma(t)$ 给定时, Gabor 展开系数 a_{mn} 可以利用 Gabor 变换求出。

综上所述, 利用式 (6.4.5) 对信号 $\phi(t)$ 作 Gabor 展开时, 需要解决的两个重要问题便是:

- (1) 选择窗函数 $g(t)$, 以使用式 (6.4.6) 构造 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$;
- (2) 选择辅助函数 $\gamma(t)$, 计算 Gabor 变换公式 (6.4.10), 得到 Gabor 展开系数

a_{mn} 。

显然, Gabor 展开的关键是窗函数 $g(t)$ 和辅助函数 $\gamma(t)$ 的选择。

下面讨论这两个函数之间的关系。先考查 $\gamma_{mn}(t)$ 与 $g_{mn}(t)$ 之间的关系。为此, 将式 (6.4.10) 代入到式 (6.4.5) 得

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t')\gamma_{mn}^*(t')g_{mn}(t)dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t') \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mn}(t)\gamma_{mn}^*(t')dt' \end{aligned}$$

这就是信号的重构公式。如果上式对所有时间 t 恒成立, 我们就称信号 $\phi(t)$ 是完全重构的。此时, 要求 $g_{mn}(t)$ 和 $\gamma_{mn}(t)$ 满足条件

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mn}(t)\gamma_{mn}^*(t') = \delta(t-t') \quad (6.4.12)$$

上式常被称为完全重构公式。

式 (6.4.12) 虽然重要, 但使用不方便。更实用的是 $g(t)$ 与 $\gamma(t)$ 之间的关系。可以证明^[230], 它们应该满足关系式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\gamma^*(t-mT)e^{-j2\pi nFt}dt = \delta(m)\delta(n) \quad (6.4.13)$$

这一关系称为窗函数 $g(t)$ 与辅助窗函数 $\gamma(t)$ 之间的双正交关系。所谓双正交, 意即只要 m, n 中有一个不为零, $\gamma(t)$ 便与 $g(t)$ 正交。由此, 常称辅助函数 $\gamma(t)$ 是窗函数 $g(t)$ 的双正交函数。

综上所述, 在选择了合适的 Gabor 基函数 $g(t)$ 之后, 确定 Gabor 展开系数的解析法可分两步进行:

- 求解双正交方程 (6.4.13) 得到辅助函数 $\gamma(t)$;
- 计算 Gabor 变换 (6.4.10) 得到 Gabor 展开系数 a_{mn} 。

可见, 辅助函数 $F(t, f)$ 的引入使得 Gabor 展开系数 a_{mn} 的确定变得很简单, 从而解决了长期困扰 Gabor 展开的一个难题!

有意思的是, 将函数 $g(t)$ 和 $\gamma(t)$ 互换后, 双正交关系式 (6.4.13) 仍然成立。推而广之, 上述讨论得到的各有关公式中的函数 $g(t)$ 和 $\gamma(t)$ 均可以互换。也就是说, 信号 $\phi(t)$ 的 Gabor 展开式 (6.4.5) 和 Gabor 变换式 (6.4.10) 也可以取下面的对偶形式:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}\gamma(t-mT)e^{j2\pi nFt} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}\gamma_{mn}(t) \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

和

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)g^*(t-mT)e^{-j2\pi nFt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)g_{mn}^*(t)dt \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

因此, 常称 $\gamma(t)$ 是 $g(t)$ 的对偶函数。显然, $\gamma_{mn}(t)$ 与 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 之间因此也是对偶的, 故又将 $\gamma_{mn}(t)$ 称为对偶 Gabor 基函数。

下面是窗函数 $g(t)$ 及其对偶函数 $\gamma(t)$ 的几种选择例子^[229]。

(1) 矩形窗函数

$$g(t) = \left(\frac{1}{T}\right)^{1/2} p\left(2\frac{t}{T}\right) \quad (6.4.16a)$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{T}\right)^{1/2} p\left(2\frac{t}{T}\right) \quad (6.4.16b)$$

(2) 广义矩形窗函数

$$g(t) = \left(\frac{1}{T}\right)^{1/2} p\left(2\frac{t}{T}\right) f(t) \quad (6.4.17a)$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{T}\right)^{1/2} p\left(2\frac{t}{T}\right) \frac{1}{f^*(t)} \quad (6.4.17b)$$

式中 $f(t)$ 是 t 的任意函数。

(3) 高斯窗函数

$$g(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{T}\right)^{1/2} e^{-\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2} \quad (6.4.18a)$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}T}\right)^{1/2} e^{\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2} \sum_{n: \frac{1}{2} > \frac{n}{T}} (-1)^n e^{-\pi\left(n + \frac{t}{T}\right)^2} \quad (6.4.18b)$$

典型的 Gabor 基函数取作

$$g_{mn}(t) = g_T(t - mT)e^{j2\pi nFt} \quad (6.4.19)$$

式中 $g_T(t)$ 为高斯函数, 即

$$g_T(t) = e^{-\pi(t/T)^2} \quad (6.4.20)$$

2. 过采样 Gabor 展开

对于过采样情况, 令时间采样间隔为 T_1 、频率采样间隔为 F_1 , 且 $T_1 F_1 < 1$ 。过采样 Gabor 展开及 Gabor 变换的公式和临界采样 Gabor 展开及 Gabor 变换的公式具有相同的形式:

$$\phi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} g_{mn}(t) \quad (6.4.21)$$

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \gamma^*(t) dt \quad (6.4.22)$$

而 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 和对偶 Gabor 基函数 $\gamma_{mn}(t)$ 定义为

$$g_{mn}(t) = g(t - mT_1)e^{j2\pi mF_1t} \quad (6.4.23)$$

$$\gamma_{mn}(t) = \gamma(t - mT_1)e^{j2\pi mF_1t} \quad (6.4.24)$$

过采样和临界采样情况的主要不同体现在 Gabor 基函数 $g(t)$ 与其对偶函数 $\gamma(t)$ 之间的关系需要加以修正。具体而言, 临界采样的双正交公式 (6.4.13) 需修正为^[202]

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\gamma^*(t - mT_0)e^{-j2\pi nF_0t} dt = \frac{T_1}{T_0}\delta(m)\delta(n), \quad T_0 = \frac{1}{F_1}, \quad F_0 = \frac{1}{T_1} \quad (6.4.25)$$

而临界采样的完全重构公式 (6.4.12) 则需要修正为^[202]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_1)\gamma^*(t - mT_1 + nT_0) = \frac{1}{T_0}\delta(n) \quad (6.4.26)$$

由于式 (6.4.25) 右边与一个非 1 的因子相乘, 所以常将式 (6.4.25) 称为似双正交公式。同理, 式 (6.4.26) 称作似正交公式。

值得指出的是, 临界采样 Gabor 展开和 Gabor 变换不含冗余, 这体现在当 $g(t)$ 给定时, 满足完全重构条件 (6.4.12) 的对偶函数 $\gamma(t)$ 是惟一确定的。然而, 过采样 Gabor 展开和 Gabor 变换会带来冗余, 因为对于一个给定的 $g(t)$, 满足完全重构条件式 (6.4.26) 的对偶函数 $\gamma(t)$ 具有多个可能的解。

定义矩阵

$$\mathbf{W}(t) = \{w_{ij}(t)\} \quad \text{和} \quad \tilde{\mathbf{W}}(t) = \{\tilde{w}_{ij}(t)\} \quad (6.4.27)$$

式中

$$w_{ij}(t) = g[t + (iT_1 - jT_0)] \quad \text{和} \quad \tilde{w}_{ij}(t) = T_1\gamma^*[t - (iT_0 - jT_1)] \quad (6.4.28)$$

这里 $i, j = -\infty, \dots, \infty$ 。注意, $\mathbf{W}(t)$ 和 $\tilde{\mathbf{W}}(t)$ 均是无穷维矩阵。容易验证, 完全重构条件式 (6.4.26) 可以写作

$$\mathbf{W}(t)\tilde{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{I} \quad (6.4.29)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

对于一个 $m \times n$ ($m < n$) 矩阵 $\mathbf{A}$, 满足 $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ 的 $n \times m$ 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的右逆矩阵。注意, 右逆矩阵是非惟一的。例如, 若令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则容易

验证

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

都是 $\mathbf{A}$ 的右逆矩阵, 因为它们均满足 $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{I}$, 其中 $i = 1, 2$ 。如果考虑矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的求解, 则在所有的右逆矩阵中, 只有右伪逆矩阵 $\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}$ 给出惟一的最小范数解 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{b}$ 。因此, 矩阵方程式 (6.4.29) 的最小范数解由

$$\tilde{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}^\top(t)[\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^\top(t)]^{-1} \quad (6.4.30)$$

给出。与矩阵 $\tilde{\mathbf{W}}(t)$ 对应的辅助函数 $\gamma(t)$ 称为 $g(t)$ 的最优双正交函数。

定义 $g(t)$ 的 Zak 变换为

$$\text{Zak}[g(t)] = \hat{g}(t, f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t-k)e^{-j2\pi kf} \quad (6.4.31)$$

则可以证明^[202], $g(t)$ 的双正交函数 $\gamma(t)$ 可以计算为

$$\gamma(t) = 2\pi \int_0^1 \frac{df}{\hat{g}^*(t, f)} \quad (6.4.32)$$

一旦获得 $\gamma(t)$ 后, 便可利用式 (6.4.22) 直接计算 Gabor 变换。

在将一连续时间信号 $\phi(t)$ 作 Gabor 展开时, 通常要求 Gabor 基函数 $g_{mn}(t)$ 服从能量归一化条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_{mn}(t)|^2 dt = 1 \quad (6.4.33)$$

有必要对 Gabor 变换与短时 Fourier 变换之间的异同点作一比较。将式 (6.4.10) 与式 (6.3.1) 作比较后知, Gabor 变换与短时 Fourier 变换在形式上颇为相似, 但两者之间存在本质区别:

- 短时 Fourier 变换的窗函数 $g(t)$ 必须是窄窗, 而 Gabor 变换的窗函数 $\gamma(t)$ 却无此限制。从这个意义上, 可以将 Gabor 变换看作是一种加窗 Fourier 变换, 它的适用范围比短时 Fourier 变换的适用范围更广泛;
- 短时 Fourier 变换 STFT(t, f) 是信号的时频二维表示, 而 Gabor 变换系数 a_{mn} 则是信号的时间移位—频率调制二维表示, 因为从式 (6.4.10) 可以看出, 参数 m 相当于信号 $\phi(t)$ 时间移位 mT 单位, 而 n 的作用则体现在使用指数函数 $e^{j2\pi nFt}$ 对信号 $\phi(t)$ 进行频率调制。