

而离散化小波变换 $WT_f(a_0^j, ka_0^j b_0)$ 简记为 $WT_f(j, k)$, 并称

$$c_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} WT_f(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (6.5.14)$$

为离散小波变换系数, 简称小波系数.

将式 (6.5.13) 和式 (6.5.14) 代入到式 (6.5.8), 立即得到实际数值计算时使用的信号重构公式:

$$f(t) = c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (6.5.15)$$

式中 c 是一个与信号无关的常数, 常取 $c = 1$.

那么, 怎样选择 a_0 和 b_0 , 才能够保证重构信号的精度呢? 显然, 网格点应尽可能密 (即 a_0 和 b_0 尽可能小), 因为如果网格点越稀疏, 使用的小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 和离散小波系数 $c_{j,k}$ 就越少, 信号重构的精确度也就会越低. 这暗示存在网格参数的阈值.

为了使小波变换具有可变化的时间和频率分辨率, 适应待分析信号的非平稳特性, 很自然地需要改变 a 和 b 的大小, 以使小波变换具有“变焦距”的功能. 换言之, 在实际中采用的是动态的采样网格. 最常用的是二进制的动态采样网格: $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, 如图 6.5.4 所示, 每个网格点对应的尺度为 2^j , 而平移为 $2^j k$. 特别地, 当离散化参数取作 $a_0 = 2$ 和 $b_0 = 1$ 时, 离散化小波

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in Z \quad (6.5.16)$$

称为二进小波基函数, 其中 Z 表示整数域.

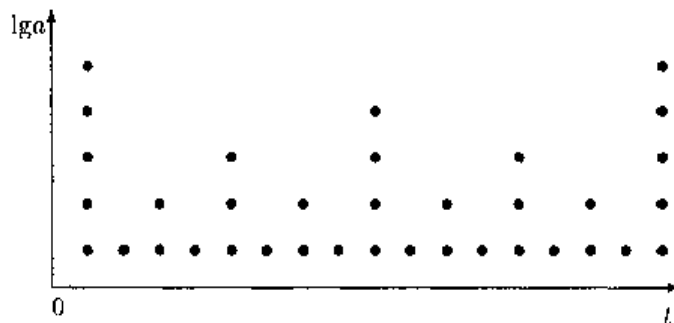


图 6.5.4 时间—尺度平面内的动态采样网格点

二进小波对信号的分析具有变焦距的作用, 这一点形象地表现在图 6.5.4 中. 假定一开始选择一个放大倍数 2^j , 它对应为观测到信号的某部分内容. 如果想进一步观看信号更小的细节, 就需要增加放大倍数即减小 j 值; 反之, 若想了解信号更

粗的内容, 则可减小放大倍数即加大 j 值。在这个意义上, 小波变换被称为数学显微镜。

6.6 小波分析与框架理论

Fourier 分析是平稳信号分析的有力数学工具。同样地, 小波分析是非平稳信号分析的一种有力数学工具。

6.6.1 小波分析

与 Fourier 分析包括了“Fourier (积分) 变换”和“Fourier 级数”一样, 非平稳信号的小波分析也由两个重要的数学实体“小波 (积分) 变换”和“小波级数”组成。

在 Fourier 分析中, 任何一个平方可积分的实函数 $f(t) \in L^2(R)$ 都具有一个 Fourier 级数表达式:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \quad (6.6.1)$$

式中, 展开常数

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (6.6.2)$$

称为实函数 f 的 Fourier 系数, 它是平方可求和的:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \quad (6.6.3)$$

类似地, 我们也可以定义小波分析: 任何一个平方可积分的实函数 $f(t) \in L^2(R)$ 都具有一个小波级数表达式:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (6.6.4)$$

式中, 小波系数 $\{c_{j,k}\}$ 由式 (6.5.14) 定义, 它是平方可求和的序列, 即

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty \quad (6.6.5)$$

小波级数展开式 (6.6.4) 的基函数 $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$ 称为小波基函数 $\psi_{j,k}(t)$ 的对偶基, 定义为

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j t - k), \quad j, k \in Z \quad (6.6.6)$$

式中 $\tilde{\psi}(t)$ 是小波 $\psi(t)$ 的对偶小波 (定义 6.5.1)。特别地, 当小波与其对偶小波相等即 $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$ 时, 小波基函数与其对偶小波基函数也相等, 即 $\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \psi_{j,k}(t)$ 。在这种情况下, 式 (6.6.4) 退化为 6.5 节的式 (6.5.15)。

在 Fourier 分析与小波分析中, 基函数起着重要的作用。

定义 6.6.1^[203,p.13] (标准正交基) 令 H 是一完备的内积空间即 Hilbert 空间, 离散序列族 $\{\phi_n(t) : n \in Z\}$ (其中 Z 为整数域) 称为 H 内的标准正交基或 Hilbert 基, 若下面条件满足:

- (1) 正交性: 若 $m, n \in Z$ 和 $m \neq n$, 则 $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0$;
- (2) 归一化: 对每个 $n \in Z$ 有 $\|\phi_n\| = 1$;
- (3) 完备性: 若 $f \in H$ 和 $\langle f, \phi_n \rangle = 0, \forall n \in Z$, 则 $f = 0$ 。

若离散序列族 $\{\phi_n(t)\}$ 只满足第一和第三个条件, 则称之为正交基。只满足前两个条件, 但不一定满足第三个条件的集合称为标准正交系。如果只满足第一个条件, 则称该集合为正交系。

若一 Hilbert 空间的基的个数是可数的, 则称它是可分离的 Hilbert 空间。可分离 Hilbert 空间的完备性的另外一种表述叫做稠密性。

定义 6.6.2 (稠密性) 离散序列族 $\{\phi_n : n \in Z\}$ 在 H 内是稠密的, 若对每一个 $f \in H$ 和 $\epsilon > 0$, 可以找到一个足够大的整数 N 和常数 $c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_{N-1}, c_N$ 使得 $\|f - \sum_{k=-N}^N c_k \phi_k\| < \epsilon$ 。或者说, 任何一个函数 $f \in H$ 都可以用函数族 $\{\phi_n : n \in Z\}$ 的有限个线性组合充分逼近, 则称 $\{\phi_n : n \in Z\}$ 在 H 内是稠密的。

一个标准正交系 $\{\phi_n\}$ 是稠密的, 当且仅当它是完备的。换句话说, 一个稠密的标准正交系为标准正交基。

Fourier 分析的 Fourier 基 e^{ikt} 是一个标准正交基, 它的选择是惟一的。前面提到, 小波变换的冗余度增加了分析和解释小波变换结果的困难, 因此希望小波变换的冗余度尽可能小, 这意味着应该减少小波之间的线性相关。换言之, 希望小波族 $\psi_{j,k}(t)$ 具有线性独立性。从信号重构的精度考虑, 正交基是信号重构最理想的基函数, 所以更希望小波是正交小波。然而, 小波的选择还必须作其他重要方面的考虑。

正如 Sweldens^[184]所指出的那样, 为了使小波变换成为一种有用的信号处理工具, 小波必须满足以下三个基本要求:

- 小波是一般函数的积木块: 小波能够作为基函数, 对一般函数进行小波级数展开。
- 小波具有时频聚集性: 通常, 要求小波的大部分能量聚集在一个有限的区间内。理想情况下, 在该区间外, 小波函数 $\psi(t)$ 的能量应等于零, 即小波在频域应该是紧支撑函数。但由不相容原理知, 一个在频域紧支撑的函数, 它在时域的支

撑区将是无穷的。因此,小波函数应该在时域是紧支撑的,在频域能够快速衰减。

- 小波具有快速变换算法:为了使小波函数易于计算机实现,希望小波变换和 Fourier 变换一样有快速算法。

可以说,这三个基本要求的实现构成了小波变换的核心内容。我们先来看小波的时频聚集性。

一个小波函数向高频率的衰减对应为该小波的光滑性。小波越光滑,它向高频率的衰减就越快。若衰减是指数的,则小波将是无穷次可求导的。

一个小波函数向低频率的衰减对应为该小波的消失矩的阶数(定义在稍后给出)。

因此,借助小波函数的光滑性和消失矩,就可以保证小波的“频率聚集性”,从而获得所希望的时频聚集性。

若函数 $f(t)$ 具有 $N-1$ 阶连续的导数,并且它在点 t_0 的邻域内的 N 阶导数是有限的,则复变函数理论的 Taylor 定理告诉我们,对在该邻域的每一点 t ,皆可在该邻域找到 $\tau, t_1 = t_1(t)$,使得

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k + \frac{f^{(N)}(t_1)}{N!} (t-t_0)^N \quad (6.6.7)$$

若该邻域很小,并且 N 阶导数不可能太大,则未知的残余项 $\frac{f^{(N)}(t_1)}{N!} (t-t_0)^N$ 将很

小,即函数 $f(t)$ 可以用 $f(t_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k$ 充分逼近。

定义 6.6.3 我们称小波 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩,若

$$\int (t-t_0)^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.6.8a)$$

$$\int (t-t_0)^N \psi(t) dt \neq 0 \quad (6.6.8b)$$

消失矩决定函数的光滑性。如果 $\psi(t)$ 在零点 $t_0 = 0$ 具有 N 阶消失矩,则其 Fourier 变换 $\Psi(\omega)$ 在零点 $\omega = 0$ 是 N 次可微分的,并且 $\Psi^{(k)}(0) = 0$, 其中 $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。

现在假定信号 $f(t)$ 在 t_0 的邻域具有 N 阶连续导数,且 $|f^{(N)}(t)| \leq M < \infty$ 在该邻域有界。再令 $\psi(t)$ 是一实小波,其支撑区为 $[-R, R]$,并在零点具有 N 阶消失矩。若用 $\psi_a(t) = a\psi(at-t_0)$ 生成小波族函数 $\{\psi_a(t)\}$,并使用式 (6.6.7) 和式 (6.6.8),

即可得到

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_a \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) a \psi(at - t_0) dt \\ &= f(t_0) + \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(N)}(t_1(t))(t - t_0)^N a \psi(at - t_0) dt\end{aligned}$$

上式又可写成三角不等式:

$$|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)| \leq \frac{2M}{N!} \left(\frac{R}{a}\right)^N \quad (6.6.9)$$

式 (6.6.9) 表明了以下重要事实:

- 小波变换逼近原信号 $f(t)$ 的精度 $|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)|$ 取决于小波函数 $\psi(t)$ 的支撑区 R 和尺度参数 a 。一个函数的支撑指的是该函数定义域的闭区间。若它的支撑区是有限的闭区间 (这种支撑称为紧支撑), 则称该函数为紧支集函数。如果 R 为有限大即 $\psi(t)$ 为紧支集函数, 则当尺度参数 $a \rightarrow \infty$ 时, 式 (6.6.9) 变作 $|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)| \rightarrow 0$ 。
- 当尺度参数 $a > R$ 时, 若 N 值越大, 则小波变换逼近原信号 $f(t)$ 的精度 $|\langle f, \psi_a \rangle - f(t_0)|$ 越高。

因此, 从函数逼近的角度出发, 要求小波 $\psi(t)$ 具有紧支撑和 N 阶消失矩, 并且 R 越小与 (或) N 越大, 小波变换逼近信号的精度便越高。另一方面, 紧支集小波才有好的时间局域特性, 并且有利于算法实现。但是, 由不相容原理知, 时间局域特性与频率局域特性是一对矛盾, 从频率分辨率考虑, 又希望小波的时间支撑区大一些。

由小波变换的公式 $WT(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$ 知, 为了使 $WT(a, b)$ 保持信号 $f(t)$ 的相位不发生畸变, 小波 $\psi_{a,b}(t)$ 应该具有线性相位。函数 $g(t)$ 称为对称函数, 若对于某个整数或半整数 T (即 $T/2$ 为整数), $g(t+T) = g(t-T)$ 或 $g(t+\frac{T}{2}) = g(t-\frac{T}{2})$; 若 $g(t+T) = -g(t-T)$ 或 $g(t+\frac{T}{2}) = -g(t-\frac{T}{2})$, 则称 $g(t)$ 为反对称函数。下面的命题表明, 小波的线性相位性质决定于它的对称性或反对称性。

命题 6.6.1 若函数 $g(t)$ 对于某个整数或半整数 T 是对称或反对称的, 则 $g(t)$ 的相位响应是线性的。

证明 参见文献 [203, p.166]。

如前所述, 为了使小波函数能够作为一般函数的积木块, 要求使用的小波构成基函数。基函数可以是非正交的、正交的和双正交的。下面, 我们讨论非正交的小波基函数的构造, 至于正交和双正交小波基函数的构造, 将在 6.7 ~ 6.9 节介绍。

6.6.2 框架理论

所谓非正交展开, 就是利用单个非正交函数的平移与调制等基本运算构造非正交基函数, 然后再用这些基函数对信号作级数展开。其实, 我们对这种非正交展开已不陌生, 因为 Gabor 展开就是这样的典型例子。

在小波分析中使用非正交展开有下面的优点:

(1) 正交小波是相当复杂的函数, 而任何一种“好的”函数都可以作为非正交展开的基小波。

(2) 在某些感兴趣的情况下, 适合相干态的正交基甚至不存在, 因此很自然需要寻找非正交展开。

(3) 非正交展开可以得到高的数值稳定性。

在小波分析中, 非正交展开常使用线性独立基, 而线性独立基的概念与框架密切相关。

定义 6.6.4 (框架) 在平方可求和空间即 $l^2(Z^2)$ 空间的序列集合 $\{\psi_{mn}\}$ 组成一框架, 若存在两个正的常数 A 和 B ($0 < A \leq B < \infty$) 使得下式对所有 $f(t) \in L^2(R)$ 恒成立:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \psi_{mn} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (6.6.10)$$

式中 $\langle f, \psi_{mn} \rangle$ 代表函数 $f(t)$ 与 $\psi_{mn}(t)$ 的内积:

$$\langle f, \psi_{mn} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{mn}^*(t) dt \quad (6.6.11)$$

正常数 A 和 B 分别称为框架的下边界和上边界。

若 $l^2(Z^2)$ 空间内与 g_{mn} 正交的惟一元素是零元素, 则称序列 g_{mn} 是完备的 (complete)。容易验证, 框架是完备的。考查式 (6.6.10) 左边的不等式知, 当框架 $\psi_{mn}(t)$ 与函数 $f(t)$ 正交即 $\langle f, \psi_{mn} \rangle = 0$ 时, 我们有

$$0 \leq A\|f\|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow f = 0$$

即框架是完备的。

定义 6.6.5 (紧凑框架与紧致框架) 令 $\{\psi_{mn}\}$ 组成一框架。若 $B/A \approx 1$, 则称 ψ_{mn} 为紧凑框架 (snug frame)。特别地, 当 $A = B$ 时, 则称 ψ_{mn} 是紧致框架 (tight frame)。

紧凑框架也称几乎紧致框架。

命题 6.6.2 若 $\{g_k(t)\}$ 是具有 $A = B = 1$ 的紧致框架, 并且所有框架元素都具有单位范数, 则框架 $\{g_k(t)\}$ 是标准正交基。

证明 令 g_l 是框架内的某个固定元素。由于 $A = B = 1$, 所以由框架定义得

$$\|g_l\|^2 = \sum_{k \in K} |\langle g_k, g_l \rangle|^2 = \|g_l\|^4 + \sum_{k \neq l} |\langle g_k, g_l \rangle|^2$$

由于 $\|g_l\|^4 = \|g_l\|^2 = 1$, 故上式意味着 $\langle g_k, g_l \rangle = 0$ 对所有 $k \neq l$ 成立。即是说, 框架 $\{g_k(t)\}$ 是正交基。又因为每个框架元素的范数都等于 1, 所以 $\{g_k(t)\}$ 是标准正交基。 ■

定义 6.6.6 (框架算子) 令 $\{g_k, k \in K\}$ 为一已知框架, 若

$$Tf = \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle g_k \quad (6.6.12)$$

是一个将函数 $f \in L^2(R)$ 映射为 $Tf \in L^2(R)$ 的算子, 则称 T 为框架算子。

下面是框架算子的性质, 其中令 $\{g_k, k \in K\}$ 组成框架。

性质 1 框架算子 T 是有界的。

证明 定义 $h = Tf$, 则

$$\begin{aligned} \|h\|^4 &= |\langle Tf, h \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle \langle g_k, h \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in K} |\langle f, g_k \rangle|^2 \sum_{k \in K} |\langle g_k, h \rangle|^2 \\ &\leq B \|f\|^2 \cdot B \|h\|^2 \end{aligned}$$

式中 B 是框架 $\{g_k, k \in K\}$ 的上边界。在得到上面的第一个不等式时使用了 Cauchy-Schwarz 不等式, 而在得到第二个不等式时两次使用了框架的定义。于是, 有 $\|h\|^2 = \|Tf\|^2 \leq B^2 \|f\|^2$ 或 $\|Tf\| \leq B \|f\|$, 即 T 是一个有界算子。 ■

性质 2 框架算子 T 是自伴随的, 即 $\langle f, Th \rangle = \langle Tf, h \rangle$ 对所有函数 f 和 h 成立。

证明 根据框架算子的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \langle f, Th \rangle &= \left\langle f, \sum_{k \in K} \langle h, g_k \rangle g_k \right\rangle = \sum_{k \in K} \langle h, g_k \rangle \langle f, g_k \rangle \\ \langle Tf, h \rangle &= \left\langle \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle g_k, h \right\rangle = \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle \langle g_k, h \rangle \end{aligned}$$

显然, $\langle f, Th \rangle = \langle Tf, h \rangle$ 对所有函数 f 和 h 成立. ■

性质 3 框架算子是正性算子, 即 $\langle f, Tf \rangle > 0$.

证明 利用框架算子定义, 易得

$$\langle f, Tf \rangle = \left\langle f, \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle g_k \right\rangle = \sum_{k \in K} \langle f, g_k \rangle \langle f, g_k \rangle = \sum_{k \in K} |\langle f, g_k \rangle|^2$$

这就证明了框架算子 T 的正性. ■

性质 4 框架算子 T 是可逆的, 即 T^{-1} 存在.

证明 由性质 3 的证明和框架定义知

$$\langle f, Tf \rangle = \sum_{k \in K} |\langle f, g_k \rangle|^2 \geq A \|f\|^2$$

故有

$$\|f\| \cdot \|Tf\| \geq \langle f, Tf \rangle \geq A \|f\|^2$$

即有 $\|Tf\| \geq A \|f\|$, 这意味着 T 是一个下有界的算子. 由 Hilbert 空间理论 (例如参考文献 [185, p.234]) 知, 一个下有界的自伴随算子是可逆的. ■

定义 6.6.7 (正合框架) 若小波框架 $\{\psi_{mn}\}$ 为独立序列的集合, 则称它为正合框架 (exact frame).

在除去任何一个元素后不再是框架的意义上, 正合框架可理解为“正好合适的框架”. 在小波分析中, 正合框架常称为 Riesz 基. 由于 Riesz 基的重要性, 在此给出它的严格定义.

定义 6.6.8 (Riesz 基) 若离散小波基函数族 $\{\psi_{j,k}(t) : j, k \in Z\}$ 是线性独立的, 并且存在正的常数 A 和 B ($0 < A \leq B < \infty$), 使得

$$A \|\{c_{j,k}\}\|_2^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k} \psi_{j,k}|^2 \leq B \|\{c_{j,k}\}\|_2^2 \quad (6.6.13)$$

对于所有平方可求和的序列 $\{c_{j,k}\}$ 恒成立, 其中

$$\|\{c_{j,k}\}\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty \quad (6.6.14)$$

则称二维序列 $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in Z\}$ 是 $L^2(R)$ 内的一个 Riesz 基, 且常数 A 和 B 分别称为 Riesz 下界和上界.

在一些文献中, 也将 Riesz 基称作无条件基 (unconditional basis).

定理 6.6.1 [46].[47,p.456] 令 $\psi(t) \in L^2(R)$, 并且 $\psi_{j,k}(t)$ 是由 $\psi(t)$ 生成的小波, 则以下三个叙述等价:

(1) $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(R)$ 的 Riesz 基;

(2) $\psi_{j,k}$ 是 $L^2(R)$ 的正合框架;

(3) $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(R)$ 的一个框架, 并且还是一个线性无关族, 即 $\sum_j \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(t) = 0$ 意味着 $c_{j,k} \equiv 0$, 而且 Riesz 界和框架界相同。

至此, 我们已经得到了一个基小波或母小波 $\psi(t)$ 用作小波变换时所必须具备的三个条件:

- 完全重构条件 (6.5.9), 它与容许条件 (6.5.2) 等价;
- 基小波 $\psi(t)$ 的稳定性条件 (6.5.11);
- 小波族 $\{\psi_{j,k}\}$ 的线性独立性条件即 Riesz 基或线性独立基条件 (6.6.14).

通过 Gram-Schmidt 标准正交化, 一 Riesz 基可以变成一标准正交基^[58].

小波 $\psi(t) \in L^2(R)$ 称为 Riesz 小波, 若由它按照式 (6.5.16) 生成的离散函数族 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ 为 Riesz 基。

根据是否正交, 小波可分为正交小波、半正交小波、非正交小波和双正交小波。

定义 6.6.9 (正交小波) Riesz 小波 $\psi(t)$ 称作正交小波, 若其生成的离散小波族 $\{\psi_{j,k}(t) : j, k \in Z\}$ 满足正交性条件

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{mn} \rangle = \delta(j-m)\delta(k-n), \quad \forall j, k, m, n \in Z \quad (6.6.15)$$

定义 6.6.10 (半正交小波) Riesz 小波 $\psi(t)$ 称为半正交小波, 若其生成的离散小波族 $\psi_{j,k}(t)$ 满足“跨尺度正交性”

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{mn} \rangle = 0, \quad \forall j, k, m, n \in Z \text{ 但 } j \neq m \quad (6.6.16)$$

由于半正交小波可通过标准正交化运算变为正交小波, 所以后面将不再把半正交小波作为讨论的对象。

定义 6.6.11 (非正交小波) Riesz 小波 $\psi(t)$ 如果不是半正交小波, 则称之为非正交小波。

定义 6.6.12 (双正交小波) Riesz 小波 $\psi(t)$ 称为双正交小波, 若 $\psi(t)$ 及其对偶 $\tilde{\psi}(t)$ 生成的小波族 $\psi_{j,k}(t)$ 和 $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$ 是“双正交的” Riesz 基:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{mn} \rangle = \delta(j-m)\delta(k-n), \quad \forall j, m, k, n \in Z \quad (6.6.17)$$

上面定义的正交实际是单个函数自身的正交性, 而双正交则指两个函数之间的正交性。注意, 双正交小波并不涉及 $\psi(t)$ 和 $\psi_{j,k}(t)$ 自身的正交性。显然, 一个正交小波一定是双正交小波, 但双正交小波一般不是正交小波。因此, 正交小波是双正交小波的特例。

下面是几种典型的小波函数。

(1) Haar 小波

小波函数为 Haar 函数

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.6.18)$$

图 6.6.1 画出了 Haar 小波的波形。容易验证, Haar 小波是一种正交小波, 因为

$$\langle \psi_H(t), \psi_H(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(t) \psi_H^*(t-n) dt = \delta(n)$$

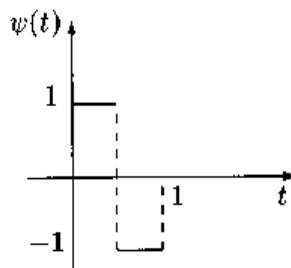


图 6.6.1 Haar 小波

(2) 高斯小波

小波函数为高斯函数, 即

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} \quad (6.6.19)$$

这种小波是连续可微分的。其一阶导数为

$$\psi'(t) = -te^{-t^2/2}$$

(3) 墨西哥草帽小波

高斯小波的二阶导数称为墨西哥草帽小波:

$$\psi(t) = (t^2 - 1)e^{-t^2/2} \quad (6.6.20)$$

因其波形酷似墨西哥草帽而得名, 参见图 6.6.2。