

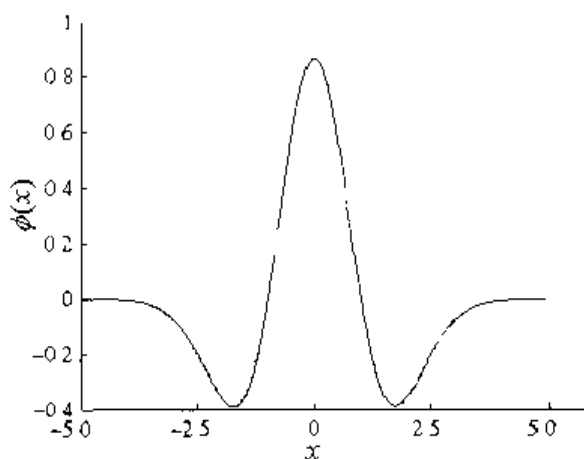


图 6.6.2 墨西哥草帽小波

显然，高斯小波和墨西哥草帽小波都不满足正交条件，所以它们都是非正交小波。

(4) Gabor 小波

Gabor 函数定义为

$$G(t) = g(t - b)e^{j\omega t} \quad (6.6.21)$$

它就是前面介绍过的加窗 Fourier 变换的核函数，其中 $g(t)$ 是一基函数，常取高斯函数。若用尺度参数 a 取 Gabor 函数的伸缩形式，即得到 Gabor 小波：

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{j\omega t} \quad (6.6.22)$$

(5) Morlet 小波定义为

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{j\omega t/a} \quad (6.6.23)$$

它与 Gabor 小波非常类似，只是频率调制项不同。

Haar 小波、高斯小波和墨西哥草帽小波为实小波函数，而 Gabor 小波和 Morlet 小波为复小波函数。前四种小波均满足小波的容许条件式 (6.5.2)，而 Morlet 小波则只是近似满足容许条件。

6.7 多分辨分析

可以毫不夸张地说，没有快速 Fourier 变换 (FFT)，Fourier 分析就无法得到实际应用。同样地，如果没有快速小波变换 (FWT)，小波分析也就只能是信号处理中的一种理论摆设。

1989 年, Mallat^[125] 提出了一种使用二次镜像滤波器 (QMF: quadrature mirror filters) 计算正交小波变换的快速算法, 现在习惯称其为快速小波变换。后来, 这种方法已推广到非正交小波基函数。由于二次镜像滤波器的设计建立在信号的多分辨率分析基础之上, 而且小波分析本身就是多分辨率分析, 所以有必要重点介绍多分辨率分析的理论与方法。

考虑使用多个分辨率对严格平方可积分函数 $u(t) \in L^2(R)$ 进行逼近。若该函数是一信号, 则“用可变分辨率 2^j 去逼近它”也可以等价叙述为“用分辨率 2^j 对信号进行分析”。因此, 多分辨率逼近和多分辨率分析等价。

令 $s(t)$ 是一平方可积分函数, 即 $s(t) \in L^2(R)$ 意味着

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

定义 6.7.1 空间 $L^2(R)$ 内的多分辨率分析是指构造 $L^2(R)$ 空间内的一个子空间列或链 $\{V_j : j \in Z\}$, 使它具备以下性质:

(1) 包容性

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

或简写作 $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in Z$;

(2) 逼近性 (递减性与递增性)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = L^2(R) \quad \text{即} \quad \bigcup_{j < N} V_j = L^2(R), \forall N \quad (\text{递减性})$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = 0 \quad \text{即} \quad \bigcap_{j > N} V_j = \{0\}, \forall N \quad (\text{递增性})$$

(3) 平移不变性

$$s(t) \in V_j \iff s(t-k) \in V_j, \forall k \in Z$$

和伸缩性

$$s(t) \in V_j \iff s(2t) \in V_{j+1}$$

(4) Riesz 基存在性: 存在一函数 $\phi(t) \in V_0$, 其平移 $\{\phi(t-k), k \in Z\}$ 构成参考子空间 V_0 的 Riesz 基。

子空间列或子空间链 $\{V_j : j \in Z\}$ 上述性质的物理解释如下:

包容性: 较低分辨率与较粗的信号内容对应, 从而对应更大的子空间。

逼近性: 所有多分辨率分析子空间的并集代表平方可积分函数 $\phi(t)$ 的整个空间即 $L^2(R)$ 空间。另由包容性知, 所有 $V_j, j \in Z$ 子空间的交集应为零空间。

平移不变性和伸缩性: 函数 $s(t)$ 的平移并不改变其形状, 其时间分辨率保持不变, 故 $s(t)$ 和 $s(t-k)$ 属于同一子空间。时间尺度的加大意味着该函数被展宽, 其时间分辨率减低, 所以要求子空间 V_j 也具有类似的伸缩性, 即 $s(t) \in V_j \iff s(2t) \in V_{j+1}$ 。

Riesz 基存在性: 子空间 V_0 作为参考空间。有了 $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$ 作为 V_0 子空间的 Riesz 基, 即可用这个基函数来展开待逼近的信号 $f(t)$ 。函数 (t) 称为多分辨分析的生成元。由于多分辨分析又叫多尺度分析, 所以多分辨分析的生成元 $\phi(t)$ 习惯称为尺度函数。

需要指出, 多分辨分析存在两类不同的符号:

- Daubechies 符号^[58] 定义 V_j 子空间的分辨率为 2^{-j} , 因此, 随着 j 的减小, 2^{-j} 的值增大, 即子空间 V_j 对应的分辨率降低。此时, 包容性为 $V_j \subset V_{j-1}$, 而伸缩性为 $\phi(t) \in V_j \iff \phi(2t) \in V_{j-1}$ 。并且 $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(R)$ 。
- Mallat 符号^[125] 定义 V_j 子空间的分辨率为 2^j , $V_j \rightarrow L^2(R), j \rightarrow +\infty$ 。此时, j 值越小, 则 2^j 的越小, 即子空间 V_j 对应的分辨率越高。因此, 包容性为 $V_j \subset V_{j+1}$, 而伸缩性为 $\phi(t) \in V_j \iff \phi(2t) \in V_{j+1}$, 并且 $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = L^2(R)$ 。本书采用的就是这种符号。

读者在阅读其他文献时, 需要注意这两类符号之间的区别。

由伸缩性及包容性知 $\phi(\frac{t}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$ 即 $\phi(\frac{t}{2}) \in V_0$, 故 $\phi(\frac{t}{2})$ 可以用 V_0 子空间的 Riesz 基函数 $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$ 展开。令展开公式为

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\phi(t-k)$$

或等价写作

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\phi(2t-k) \quad (6.7.1)$$

这一方程有多个称呼: 细化方程 (refinement equation)、伸缩方程 (dilation equation) 和双尺度方程 (two-scale difference equation), 本书采用最后一个。式 (6.7.1) 中, $\{h(k)\}$ 是平方可求和的序列。

定义滤波器

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{\sqrt{2}} e^{-j\omega k} \quad (6.7.2)$$

注意, 在只是相差一个常数因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的意义上, 滤波器 $H(\omega)$ 与 $h(k)$ 的离散 Fourier 变换等价。容易验证 $H(\omega)$ 是一个周期函数, 其周期为 2π 。

对式 (6.7.1) 两边作 Fourier 变换, 得到尺度函数 $\phi(t)$ 的频谱

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega k/2} \\ &= \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{\sqrt{2}} e^{-j\omega k/2} \\ &= H\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}\quad (6.7.3)$$

当 $\omega = 0$ 时, 上式给出结果 $\Phi(0) = H(0)\Phi(0)$, 只要 $\Phi(0) \neq 0$, 则必有 $H(0) = 1$. 这说明, 滤波器 $H(\omega)$ 是一个低通滤波器.

作变量代换 $\omega' = \frac{\omega}{2}$ 后, 式 (6.7.3) 给出

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{4}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

依此类推下去, 最后有

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \Phi(0) \quad (6.7.4)$$

为了使尺度函数的频谱 $\Phi(\omega)$ 只与 $H(\omega)$ 有关, 我们令

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (6.7.5)$$

称为尺度函数的容许条件. 这样一来, 式 (6.7.4) 便简化为

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (6.7.6)$$

这表明, 尺度函数 $\phi(t)$ 的频谱 $\Phi(\omega)$ 完全由滤波器 $H(\omega)$ 所决定. 换言之, 如果滤波器 $H(\omega)$ 给定, 则尺度函数的频谱 $\Phi(\omega)$ 即惟一确定, 其 Fourier 反变换——尺度函数 $\phi(t)$ 也就惟一确定. 因此, 一个合适的尺度函数的产生归结为滤波器 $H(\omega)$ 的设计.

令 W_j 是 V_{j+1} 在 V_j 内的补空间, 即这些子空间满足关系式

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (6.7.7)$$

式中, 符号 $\oplus$ 表示子空间的直 (接) 和. 所谓直和, 就是子空间 V_{j+1} 的每一个元素都可以用惟一的形式写作子空间 W_j 的一个元素与子空间 V_j 的一个元素之和. 在 6.8 和 6.9 两节, 我们将看到, 子空间 W_j 并不一定是由 V_j 和 V_{j+1} 惟一确定的.

由于子空间 V_j 是用来以分辨率 2^j 逼近原信号或原函数的, 所以子空间 V_j 包含了用分辨率 2^j 逼近原信号或原函数的“粗糙像”信息, 而子空间 W_j 则包含了从分辨率为 2^j 的逼近到分辨率为 2^{j+1} 的逼近所需要的“细节”信息。因此, 有

$$\bigoplus_j W_j = L^2(R) \quad (6.7.8)$$

若函数 $\psi(t)$ 的平移集合 $\{\psi(t-k): k \in Z\}$ 是子空间 W_0 的 Riesz 基, 则称函数 $\psi(t)$ 为小波函数, 或简称小波。于是, 小波函数的集合 $\{\phi_{j,k}: j, k \in Z\}$ 是 $L^2(R)$ 的基函数。子空间 V_j 和 W_j 有时也被分别称为尺度子空间和小波子空间, 因为它们分别由尺度函数和小波函数作基函数。

多分辨分析的主要目的是利用尺度函数构造所需要的小波。为了使得集合 $\{\phi(t-k): k \in Z\}$ 甚至能够逼近最简单的函数 (如常数), 很自然地假定尺度函数和它的整数时间平移服从所谓的“单位分解”, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t-k) = 1, \quad \forall t \in R \quad (6.7.9)$$

总结以上讨论, 我们看到, 在多分辨分析中, 尺度函数应该满足以下两个基本约束条件:

- (1) 容许条件式 (6.7.5);
- (2) 单位分解式 (6.7.9)。

一旦多分辨分析的尺度函数 $\phi(t)$ 被确定, 小波函数 $\psi(t)$ 也就可以构造出来。根据所构造的是正交尺度函数还是双正交尺度函数, 多分辨分析又分为正交和双正交多分辨分析两大类, 它们分别依赖于正交和双正交滤波器组的设计。

6.8 正交滤波器组

我们在上一节已看到, 尺度函数是通过滤波器 $H(\omega)$ 来构造的。为了构造小波, 我们还需要另外一个滤波器 $G(\omega)$ 。滤波器 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 组成一个滤波器组, 简记为 (H, G) 。

在本节, 我们来讨论如何设计滤波器组 (H, G) , 以得到标准正交的尺度函数和小波。这正是正交多分辨分析的目的。

6.8.1 正交多分辨分析

顾名思义, 正交多分辨分析是这样一种多分辨分析: 小波子空间 W_j 定义为 V_j

在 V_{j+1} 里的正交补。因此, 所有小波子空间 $W_j, j \in Z$ 都相互正交, 它们的投影也相互正交。

一多分辨分析是正交多分辨分析的充分必要条件是

$$W_j \perp V_j, \quad \forall j \in Z \quad (6.8.1)$$

用文字叙述为: 子空间 W_j 与 V_j 正交对所有 $j \in Z$ 均成立。这时, 称 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ 为正交分解。在这个意义上, V_j 和 W_j 二者都是 V_{j+1} 的互补子空间, 因此常称 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 上的正交补(空间)。

关于标准正交尺度函数的构造, Mallat 于 1989 年证明了下面的重要结论。

定理 6.8.1 ^[125] 令 V_j (其中 $j \in Z$) 是 L^2 空间的一多分辨逼近, 则存在一个标准正交函数 $\phi(t) \in V_0$ 使得

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad k \in Z \quad (6.8.2)$$

必定是 V_j 内的一个标准正交基, 其中 $\phi(t)$ 为多分辨分析的尺度函数。

上述定理告诉我们, 只要能找到一正交尺度函数 $\phi(t)$, 然后将尺度函数用 2^j 作伸缩, 再在一网格(其间隔与 2^j 成正比)内将伸缩后的结果平移, 即可获得 V_j 空间的标准正交基 $\{\phi_{j,k}(t)\}$ 。因此, 我们的首要任务是构造标准正交的尺度函数:

$$\langle \phi(t-l), \phi(t-k) \rangle = \delta(k-l) \quad (6.8.3)$$

与尺度基函数 $\phi_{j,k}(t)$ 的定义式 (6.8.2) 以及 $\phi_{0,l}(t) = \phi(t-l), \forall l \in Z$ 张成子空间 V_0 的定义相类似, 我们定义

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad k \in Z \quad (6.8.4)$$

且 $\psi_{0,k} = \psi(t-k)$ 张成小波子空间 W_0 。于是, 当 $j=0$ 时, 式 (6.8.1) 意味着尺度函数与小波函数之间的正交, 即有

$$\langle \phi(t-l), \psi(t-k) \rangle = \delta(k-l), \quad \forall l, k \in Z \quad (6.8.5)$$

另一方面, 由式 (6.8.2) 知 $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$, 故 $\psi(t) = \psi_{0,0}(t) \in W_0 \subset V_{-1}$, 即 $\psi(t) \in V_{-1}$ 。这一关系意味着小波函数 $\psi(t)$ 可以用 V_{-1} 子空间的正交基 $\phi_{-1,k}(t) = 2^{1/2} \phi(2t-k)$ 展开为

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \phi(2t-k) \quad (6.8.6)$$

称之为小波函数的“双尺度方程”。

与滤波器 $H(\omega)$ 的定义式 (6.7.2) 相类似, 定义滤波器

$$G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2}} e^{-j\omega k} \quad (6.8.7)$$

显然, $G(\omega)$ 和 $H(\omega)$ 一样, 也是以 2π 为周期的周期函数。

求式 (6.8.6) 定义的小波函数 $\psi(t)$ 的频谱, 得

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega k/2} \\ &= \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2}} e^{-j\omega k/2} \\ &= G\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.8.8)$$

令 $\omega = 0$, 则

$$\Psi(0) = G(0) \Phi(0) \quad (6.8.9)$$

将小波的容许条件式 (6.5.2) 和尺度函数的容许条件式 (6.7.5) 代入式 (6.8.9), 立即有 $G(0) = 0$ 。这说明, 滤波器 $G(\omega)$ 是一个高通滤波器。

低通滤波器 H 和高通滤波器 G 组成一滤波器组, 使用共轭滤波器组 (H^*, G^*) 对原始信号进行分解, 然后用 (H, G) 重构信号, 即得到正交多分辨分析的信号重构^[125], 如图 6.8.1 所示。

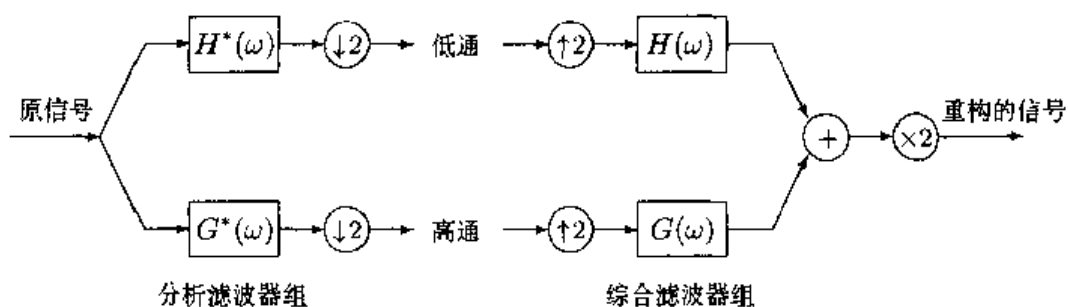


图 6.8.1 正交多分辨分析的信号重构原理图

图中, $\downarrow 2$ 表示下采样 (即每两个样本中取一的采样), 而 $\uparrow 2$ 为上采样 (即每两个样本之间插入一个零), 或称内插。

这种正交多分辨分析包含了滤波、下采样、上采样 (即内插) 和重构等四种基本运算, 它们组成的这一运算形式在信号处理中被称为共轭二次滤波器子带编码方式, 原是 Smith 和 Barnwell 于 1986 年提出的一种图像处理方法^[177]。

6.8.2 正交滤波器组设计

在图 6.8.1 中的滤波器 $H^*(\omega)$ 和 $G^*(\omega)$ 是用来分解信号, 分别得到信号的粗节和细节的, 故 (H^*, G^*) 称为分析滤波器组。与之不同, 滤波器 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 则是用于恢复或重构信号的, 它们组成综合滤波器组。注意, 在形式上, 分析滤波器组 (H^*, G^*) 只是综合滤波器组 (H, G) 的复数共轭而已。

对式 (6.8.8) 依次令 $\omega' = \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}, \dots$, 则可得到

$$\Psi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{k=2}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (6.8.10)$$

在获得滤波器 $\Psi(\omega)$ 后, 其 Fourier 反变换即给出小波函数 $\psi(t)$ 。

总结以上讨论, 我们看到: 要想构造标准正交的尺度函数和小波函数, 就必须适当地设计滤波器组 (H, G) 。

对于任何一个标准正交基 $\{f(t-n): n \in Z\}$ 而言, 下面的命题恒成立。

命题 6.8.1 任何标准正交基 $\{f(t-n): n \in Z\}$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 都满足下式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (6.8.11)$$

证明 根据标准正交的定义和 Parseval 公式 $\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \langle F_1(\omega), F_2(\omega) \rangle$, 易知

$$\begin{aligned} \delta(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-n) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |F(\omega + 2k\pi)|^2 e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(\omega + 2k\pi)|^2 e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \quad (6.8.12)$$

式中使用了下述结果:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \Rightarrow \quad f(t-n) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega n}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega n} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |F(\omega + 2k\pi)|^2 e^{j\omega n} d\omega$$

注意到离散 Fourier 变换对 $\delta(n) \leftrightarrow 1$, 故式 (6.8.12) 意味着式 (6.8.11) 成立。这就完成了本命题的证明 ■

下面, 我们利用命题 6.8.1 建立滤波器 H 和 G 必须满足的条件。

由于尺度函数 $\phi(t)$ 为标准正交基, 故其 Fourier 变换 $\Phi(\omega)$ 满足式 (6.8.11), 即有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (6.8.13)$$

注意, 上式对任何频率 ω 都成立, 故对 $\omega + \pi$ 和 2ω 自然也分别成立, 即分别有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi[\omega + (2k+1)\pi]|^2 = 1, \quad \forall \omega \quad (6.8.14)$$

和

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(2\omega + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(\omega + k\pi)|^2 |\Phi(\omega + k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2k\pi)|^2 |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 + \\ &\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H[\omega + (2k+1)\pi]|^2 |\Phi[\omega + (2k+1)\pi]|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi[\omega + (2k+1)\pi]|^2 \end{aligned}$$

这里利用了 $H(\omega)$ 是周期为 2π 的周期函数这一事实。

将式 (6.8.13) 和式 (6.8.14) 分别应用于上式的两个求和项, 立即得到关于滤波器 H 的重要关系式:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (6.8.15)$$

当希望所构造的小波函数 $\psi(t)$ 也为标准正交基时, 其 Fourier 变换 $\Psi(\omega)$ 同样满足命题 6.8.1。采用与推导式 (6.8.15) 完全类似的方法, 我们又可得到关于滤波器 G 的重要关系式:

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (6.8.16)$$

由尺度函数与小波函数的正交性, 易知

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \psi^*(t-n) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \Psi^*(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega+2k\pi) \Psi^*(\omega+2k\pi) e^{j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in Z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega+2k\pi) \Psi^*(\omega+2k\pi) = 0, \quad \forall \omega \quad (6.8.17)$$

注意到 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 都是周期为 2π 的周期函数, 并利用式 (6.8.17) 和式 (6.8.8), 我们容易证明

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(2\omega+2k\pi) \Psi^*(2\omega+2k\pi) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega+k\pi) \Phi(\omega+k\pi) \cdot G^*(\omega+k\pi) \Phi^*(\omega+k\pi) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega+2k\pi) G^*(\omega+2k\pi) |\Phi(\omega+2k\pi)|^2 + \\
 &\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} H[\omega+2(k+1)\pi] G^*[\omega+(2k+1)\pi] |\Phi[\omega+(2k+1)\pi]|^2 \\
 &= H(\omega) G^*(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega+2k\pi)|^2 + \\
 &\quad H(\omega+\pi) G^*(\omega+\pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi[\omega+(2k+1)\pi]|^2
 \end{aligned}$$

将式 (6.8.13) 和式 (6.8.14) 代入上式, 则有

$$H(\omega) G^*(\omega) + H(\omega+\pi) G^*(\omega+\pi) = 0 \quad (6.8.18)$$

式 (6.8.15)、式 (6.8.16) 及式 (6.8.18) 一起组成了构造标准正交小波时, 滤波器组 (H, G) 必须满足的三个条件, 它们分别来自尺度函数 $\phi(t)$ 的标准正交性、小波函数 $\psi(t)$ 的标准正交性、尺度函数与小波函数之间的正交性。