

容易验证, 当滤波器  $H$  满足式 (6.8.15) 时, 则由滤波器  $H(\omega)$  和

$$G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) \quad (6.8.19a)$$

组成的滤波器组  $(H, G)$  不仅是式 (6.8.18) 的一个解, 而且  $G$  满足式 (6.8.16)。同样, 满足式 (6.8.15) 的滤波器  $H(\omega)$  和

$$G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) \quad (6.8.19b)$$

组成的滤波器组  $(H, G)$  也是式 (6.8.18) 的一个解, 并且  $G$  满足式 (6.8.16)。

上述事实告诉我们, 滤波器组的设计可简化为下面的二步法:

- 设计满足式 (6.8.15) 的滤波器  $H(\omega)$ ;
- 利用式 (6.8.19) 直接计算滤波器  $G(\omega)$ 。

下面分析滤波器组  $(H, G)$  的性质。

取  $G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$  时, 由式 (6.8.19) 可得到两个滤波器系数之间的关系:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= e^{-j\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k) e^{j(\omega+\pi)k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h^*(k) e^{-j(1-k)\omega} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{1-k} h^*(1-k) e^{-j\omega k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

比较最后两个等式两边  $e^{-j\omega k}$  的系数, 可以得到

$$g(k) = (-1)^{1-k} h^*(1-k), \quad k \in Z \quad (6.8.20a)$$

它是  $G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$  的时域表达式。

类似地, 若取  $G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$ , 则

$$g(k) = (-1)^{-k} h^*(1-k), \quad k \in Z \quad (6.8.20b)$$

它与式 (6.8.20a) 只相差一个负号。

由于式 (6.8.19) 具有的形式, 常称  $G$  是  $H$  的镜像滤波器, 称  $G$  和  $H$  为二次镜像滤波器。

对任意两个滤波器  $A(\omega)$  和  $B(\omega)$ , 记

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} A(\omega) & A(\omega + \pi) \\ B(\omega) & B(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad (6.8.21)$$

若

$$M(\omega)M^H(\omega) = I_2 \quad \text{或} \quad M^*(\omega)M^T(\omega) = I_2 \quad (6.8.22)$$

则称  $(A, B)$  为正交滤波器组。式中, 上标  $*$  表示矩阵的共轭, 并且  $I_2$  是一个  $2 \times 2$  单位矩阵。若式 (6.8.22) 右边为  $2I_2$ , 则称  $(A, B)$  为仿酉滤波器组 (paraunitary filter bank)。

容易验证, 满足式 (6.8.15)、式 (6.8.16) 和式 (6.8.18) 的滤波器组  $(H, G)$  满足正交滤波器组的定义。顺便指出, 若在滤波器  $H(\omega)$  和  $G(\omega)$  的定义中撤掉因子  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 则式 (6.8.15) 和式 (6.8.16) 的右边均需要改为 2。此时, 滤波器组  $(H, G)$  就是仿酉滤波器组。

综合以上讨论, 可以得到正交多分辨分析的主要结果如下。

**定理 6.8.2** 令  $V_j(j \in Z)$  是一多分辨向量空间列,  $\phi(t)$  为尺度函数, 并且  $H(\omega)$  是满足式 (6.8.15) 条件的滤波器。若令  $\psi(t)$  的 Fourier 变换  $\Psi(\omega)$  由式 (6.8.8) 给定, 其中滤波器  $G(\omega)$  的系数由式 (6.8.19) 规定, 则由滤波器  $G(\omega)$  产生的函数  $\psi(t)$  是 (标准) 正交小波。

**证明** 参见文献 [125]。

在 6.6 节, 我们曾经分析过小波的光滑性, 即要求小波函数具有  $N$  阶消失矩, 并且  $N$  应该尽可能大。小波具有  $N$  阶消失矩等价于低通滤波器  $H(\omega)$  是  $N$  阶正则的。

**定义 6.8.1** 低通滤波器  $H(\omega)$  是  $N$  阶正则的, 若

$$\left. \frac{d^k H(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\pi} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.8.23a)$$

$$\text{但 } \left. \frac{d^N H(\omega)}{d\omega^N} \right|_{\omega=\pi} \neq 0.$$

注意, 式 (6.8.23a) 也可写作

$$\left. \frac{d^k H(z)}{dz^k} \right|_{z=e^{j\omega}=-1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.8.23b)$$

$$\text{但 } \left. \frac{d^N H(z)}{dz^N} \right|_{z=-1} \neq 0.$$

当式 (6.8.23) 满足时, 构造的尺度函数和小波函数均具有  $q$  阶光滑性, 其中  $q$  与  $N - 1$  成正比。式 (6.8.23) 又可等价写作

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k k^m h(k) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.8.24)$$

下面举几个著名的正交小波为例。

### 1. Haar 小波

令滤波器  $H$  的频率响应表达式为

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) \quad (6.8.25)$$

我们来求出它产生的尺度函数及用滤波器组  $(H, G)$  构造的小波函数的表达式。

首先, 我们容易验证式 (6.8.24) 定义的滤波器  $H$  满足式 (6.8.15)。又易看出  $H(0) = 1$  和  $H(\pi) = 0$ , 所以  $H(\omega)$  是低通滤波器。

由式 (6.7.6) 可求得尺度函数的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega/2^k}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-j\omega/2^k} \cdot \frac{1}{2}(e^{j\omega/2^k} + e^{-j\omega/2^k}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-j\omega/2^k} \cos(\omega/2^k) \\ &= \exp\left[-j\omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\right] \cos(\omega/2^k) \\ &= e^{-j\omega/2} \prod_{k=1}^{\infty} \cos(\omega/2^k) \end{aligned}$$

由于

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos(\omega/2^k) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \quad (6.8.26)$$

故有

$$\Phi(\omega) = e^{-j\omega/2} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \quad (6.8.27)$$

其 Fourier 反变换为

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} e^{j\omega(t-0.5)} d\omega\end{aligned}$$

由 Fourier 反变换公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{jxt} dx = \begin{cases} \pi, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \quad (6.8.28)$$

得

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & |0.5 - t| \leq 0.5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.8.29)$$

这一尺度函数称为 Haar 尺度函数, 图 6.8.2 (a) 画出了其波形。

由式 (6.8.19) 知, 与  $H(\omega)$  对应的高通滤波器为

$$G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega}) \quad (6.8.30)$$

然后由式 (6.8.8) 可求出小波函数  $\psi(t)$  的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\Psi(\omega) &= G\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega/2}) \cdot e^{-j\omega/4} \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \\ &= \frac{1}{2}(e^{-j0.25\omega} - e^{-j0.75\omega}) \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4}\end{aligned}$$

其 Fourier 反变换给出小波函数

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} e^{j\omega(t-0.25)} d\omega - \\ &\quad \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} e^{j\omega(t-0.75)} d\omega\end{aligned} \quad (6.8.31)$$

将 Fourier 反变换公式 (6.8.28) 应用于上式, 得到

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} e^{j\omega(t-0.25)} d\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

和

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} e^{j\omega(t-0.75)} d\omega = \begin{cases} 1, & 0.5 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将这两个 Fourier 反变换结果代入式 (6.8.31), 便得到小波函数的表达式:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.8.32a)$$

$$= \mathcal{X}_{[0,1/2]}(x) - \mathcal{X}_{[1/2,1]}(x) \quad (6.8.32b)$$

式中  $\mathcal{X}_{[a,b]}(x)$  为盒函数, 定义为

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq t < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式 (6.8.32) 定义的小波就是著名的 Haar 小波, 图 6.8.2 (b) 画出了 Haar 小波的波形。从图 6.8.2 容易看出, Haar 尺度函数和 Haar 小波分别是标准正交函数, 而且尺度函数和小波函数之间也正交。

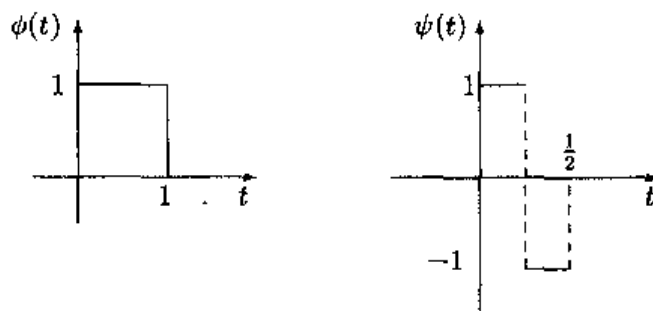


图 6.8.2 Haar 尺度函数  $\phi(t)$  与 Haar 小波  $\psi(t)$

## 2. Shannon 小波

Shannon 小波定义为

$$\psi_{\text{Shannon}}(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t} \quad (6.8.33)$$

Haar 小波和 Shannon 小波在实际中都较少使用, 因为 Haar 小波不光滑, 而 Shannon 小波虽然光滑, 但衰减很慢。

### 3. Daubechies 小波

低通滤波器取作

$$H(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^M Q(e^{-j\omega}) \quad (6.8.34)$$

式中  $Q(e^{-j\omega})$  是  $e^{-j\omega}$  的多项式。

首先选择滤波器  $h(n)$  的长度 (支撑)  $N$ 。滤波器越长, 尺度函数和小波就越光滑。由于滤波器  $H(\omega)$  是  $e^{-j\omega}$  的  $N-1$  阶多项式, 所以  $F(e^{-j\omega})$  是  $e^{-j\omega}$  的  $N-1-M$  阶多项式。根据正交条件, 多项式  $F(e^{-j\omega})$  必须具有最小阶数  $(M-1)$ , 而  $M = N/2$ 。

尺度函数和小波函数的双尺度方程分别为

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \phi(2t - k) \quad (6.8.35)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \phi(2t - k) \quad (6.8.36)$$

利用式 (6.8.35) 产生尺度函数  $\phi(t)$  是不方便的。另外, 利用  $H(\omega)$  求  $\phi(t)$  的函数表达式也是困难的。

Daubechies [56] 提出用下面的迭代方法构造尺度函数。

#### 算法 6.8.1 (尺度函数的迭代构造算法)

**步骤 1** 令初始值  $\phi^{(0)}(t) = p_{[0,1)}(t)$ , 其中

$$p_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

是定义在区间  $[0, 1)$  的矩形窗函数。

**步骤 2** 计算

$$\phi^{(i+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \phi^{(i)}(2t - k) \quad (6.8.37)$$

**步骤 3** 判断  $\phi^{(i)}(t)$  是否收敛。若收敛, 则停止迭代; 否则, 令  $i \leftarrow i + 1$ , 并返回步骤 2 继续迭代, 直至算法收敛。

业已证明 [56], 经过迭代后,  $\phi^{(i)}(t)$  收敛为  $\phi(t)$ , 最多相差一乘数因子。

作为一个例子, 图 6.8.3 示出了迭代构造一尺度函数的前两步递推过程, 其中滤波器系数  $h(k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$ 。

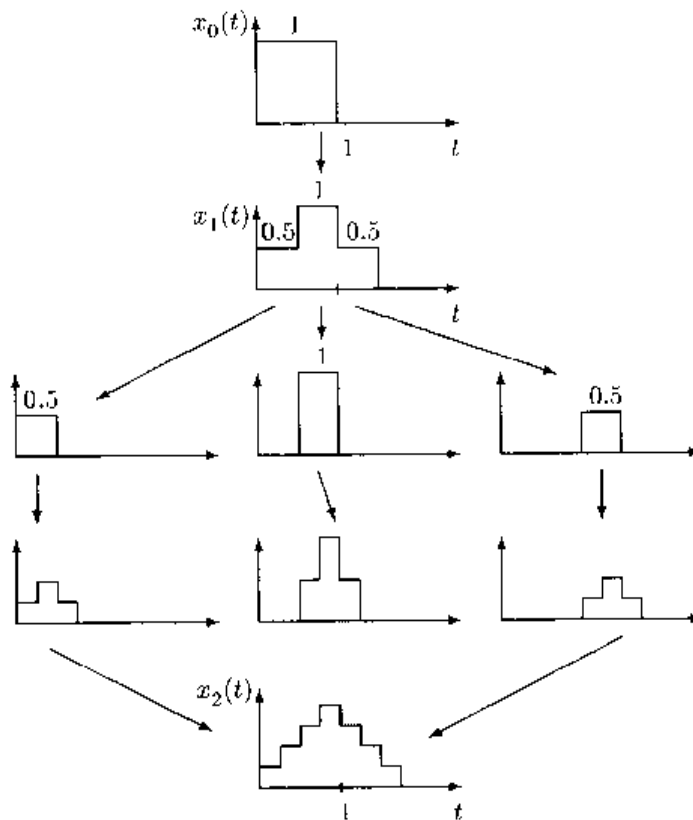


图 6.8.3 尺度函数迭代构造的前两步递推过程

Daubechies 正交小波的构造算法如下 [56]。

**算法 6.8.2** (Daubechies 标准正交小波构造算法)

**步骤 1** 选择尺度滤波器  $H(\omega)$  的长度  $N$ 。

**步骤 2** 令

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^k + \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^N R \left( \frac{z+z^{-1}}{4} \right) \quad (6.8.38)$$

其中  $R(z)$  是一奇次阶多项式, 使得  $P(e^{j\omega})$  对所有  $\omega$  都是非负的。

**步骤 3** 将  $P(z)$  分解为  $P(z) = Q(z)Q(z^{-1})$ , 其中  $Q(z)$  是  $z$  的多项式。最常用的方法是取  $P(z)$  位于单位圆内的根组成多项式  $Q(z)$ 。

**步骤 4** 用式 (6.8.34) 构造尺度滤波器  $H(\omega)$ , 并取  $G(\omega) = -e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi)$  或  $g(k) = (-1)^k h^*(1-k)$ 。

**步骤 5** 使用算法 6.8.1 迭代构造尺度函数  $\phi(t)$ , 并利用式 (6.8.36) 构造小波函数  $\psi(t)$ 。

特别地, 若选择滤波器  $h(n)$  的长度  $N = 4$ , 则  $M = \frac{N}{2} = 2$ , 而  $Q(e^{-j\omega})$  至少必须是  $e^{-j\omega}$  的一阶多项式。令

$$Q(e^{-j\omega}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{-j\omega}$$

则低通滤波器

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \left( \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{-j\omega} \right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-j\omega} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-j2\omega} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-j3\omega} \end{aligned} \quad (6.8.39)$$

即滤波器系数为

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.482962913145 \\ h(1) &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.836516303738 \\ h(2) &= \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.224143868042 \\ h(3) &= \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = -0.129409522551 \end{aligned}$$

为了方便读者参考, 表 6.8.1 列出了 Daubechies 正交小波所使用的 4,6,8 阶尺度滤波器的系数。

表 6.8.1 Daubechies 正交小波的低通滤波器系数<sup>[151]</sup>

| $N$ | $n$ | $h(n)$          | $N$ | $n$ | $h(n)$          | $N$ | $n$ | $h(n)$          |
|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|
| 4   | 0   | 0.482962913145  | 6   | 0   | 0.332670552950  | 8   | 0   | 0.230377813309  |
|     | 1   | 0.836516303738  |     | 1   | 0.806891509311  |     | 1   | 0.714846570553  |
|     | 2   | 0.224143868042  |     | 2   | 0.459877502118  |     | 2   | 0.630880767930  |
|     | 3   | -0.129409522551 |     | 3   | -0.135011020010 |     | 3   | -0.027983769417 |
|     |     |                 |     | 4   | -0.085441273882 |     | 4   | -0.187034811719 |
|     |     |                 |     | 5   | 0.035226291882  |     | 5   | 0.030841381836  |
|     |     |                 |     |     |                 |     | 6   | 0.032883011667  |
|     |     |                 |     |     |                 |     | 7   | -0.010597401785 |

### 6.8.3 快速正交小波变换

非平稳信号的频率是随时间变化的, 这种变化可分为慢变和快变两部分。慢变部分对应为非平稳信号的低频部分, 代表信号的主体轮廓或粗糙像; 而快变部分对

应为信号的高频部分, 表示信号的细节。与此相似, 任何一幅图像也都可以分解为两部分: 轮廓边缘(低频)和细部纹理(高频)。正是在这一基础上, 发展出了图像分解与重构的一个著名的塔式算法(pyramidal algorithm), 其基本思想是: 将原整幅图像  $f(x, y)$  视为一个分辨率为  $2^0 = 1$  的离散逼近  $A_0 f$ , 于是它便可以分解为一个粗分辨率  $2^J$  的逼近  $A_J f$  与若干高分辨率  $2^j (0 < j < J)$  的逐次细节逼近  $D_j f$  之和。

在上述塔式算法的启发下, 结合多分辨分析, Mallat<sup>[125]</sup> 提出了信号的塔式多分辨分解与综合算法, 习惯称其为快速正交小波变换算法, 有时简称为 Mallat 算法。正交快速小波变换算法在小波分析中的地位颇有些类似 FFT 在经典 Fourier 分析中的地位。

正交快速小波变换算法的基本思想如下: 假定已经计算出一函数或信号  $f(t) \in L^2(R)$  在分辨率  $2^j$  下的离散逼近  $A_j f$ , 则  $f(t)$  在分辨率  $2^{j-1}$  的离散逼近  $A_{j-1} f(t)$  可通过用离散低通滤波器  $H$  对  $A_j f(t)$  滤波获得。

令  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$  分别是函数  $f(t)$  在  $2^j$  分辨率逼近下的尺度函数和小波函数, 则其离散逼近  $A_j f(t)$  和细节部分  $D_j f(t)$  可分别表示为

$$A_j f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad \text{和} \quad D_j f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (6.8.40)$$

式中  $c_{j,k}$  和  $d_{j,k}$  分别为  $2^j$  分辨率下的尺度(或粗糙像)系数和小波(或细节)系数。

根据快速正交小波变换算法的分解思想,  $A_j f(t)$  分解为粗糙像  $A_{j-1} f(t)$  与细节  $D_{j-1} f(t)$  之和, 即有

$$A_j f(t) = A_{j-1} f(t) + D_{j-1} f(t) \quad (6.8.41)$$

式中

$$A_{j-1} f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{j-1,m} \phi_{j-1,m}(t) \quad (6.8.42a)$$

和

$$D_{j-1} f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{j-1,m} \psi_{j-1,m}(t) \quad (6.8.42b)$$

于是, 我们有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{j-1,m} \phi_{j-1,m}(t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{j-1,m} \psi_{j-1,m}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{j,m} \phi_{j,m}(t) \quad (6.8.43)$$

下面分别研究  $c_{j-1,k}$  与  $c_{j,m}$  的关系, 以及  $d_{j-1,k}$  与  $d_{j,m}$  的关系。注意, 尺度函数  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$  分别为(标准)正交函数。

首先, 由尺度函数的双尺度方程, 我们得到

$$\phi_{j-1,k}(t) = 2^{(j-1)/2} \phi(2^{j-1}t - k) = 2^{(j-1)/2} \cdot \sqrt{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \phi(2^j t - 2k - i)$$

作变量代换  $m' = 2k + i$ , 则上式变为

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,k}(t) &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} h(m' - 2k) 2^{j/2} \phi(2^j t - m') \\ &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} h(m' - 2k) \phi_{j,m'}(t) \end{aligned} \quad (6.8.44)$$

两边同乘  $\phi_{j,m}^*(t)$ , 然后作关于  $t$  的积分, 并利用  $\phi_{j,k}(t)$  的标准正交性, 即有

$$\langle \phi_{j-1,k}, \phi_{j,m} \rangle = h(m - 2k)$$

取复数共轭后, 得

$$\langle \phi_{j,m}, \phi_{j-1,k} \rangle = h^*(m - 2k) \quad (6.8.45)$$

类似地, 由小波函数的双尺度方程, 我们有

$$\begin{aligned} \psi_{j-1,k}(t) &= 2^{(j-1)/2} \psi(2^{j-1}t - k) \\ &= 2^{(j-1)/2} \sqrt{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i) \phi(2^j t - 2k - i) \\ &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} g(m' - 2k) \phi_{j,m'}(t) \end{aligned} \quad (6.8.46)$$

两边同乘  $\phi_{j,m}^*(t)$ , 并作关于  $t$  的积分, 即得

$$\langle \phi_{j,m}, \psi_{j-1,k} \rangle = g^*(m - 2k) \quad (6.8.47)$$

在式 (6.8.43) 两边同乘某个合适的函数, 再作关于  $t$  的积分, 并利用有关的正交性, 可得到以下三个重要结果.

(1) 同乘  $\phi_{j-1,k}^*(t)$ , 并利用式 (6.8.45), 则有

$$c_{j-1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(m - 2k) c_{j,m} \quad (6.8.48)$$

(2) 同乘  $\psi_{j-1,k}^*(t)$ , 并利用式 (6.8.47), 又有

$$d_{j-1,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^*(m - 2k) d_{j,m} \quad (6.8.49)$$