

(3) 同乘 $\phi_{j,k}^*(t)$, 并利用式 (6.8.45) 和式 (6.8.47), 则有

$$c_{j,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m-2k)c_{j-1,m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m-2k)d_{j-1,m} \quad (6.8.50)$$

定义无穷维向量 $c_j = [c_{j,k}]_{k=-\infty}^{\infty}$, $d_j = [d_{j,k}]_{k=-\infty}^{\infty}$ 和矩阵 $H = [H_{m,k}]_{m,k=-\infty}^{\infty}$, $G = [G_{m,k}]_{m,k=-\infty}^{\infty}$, 其中 $H_{m,k} = h^*(m-2k)$, 且 $G_{m,k} = g^*(m-2k)$, 则式 (6.8.48) ~ 式 (6.8.50) 可分别简记为

$$\begin{cases} c_{j-1} = Hc_j \\ d_{j-1} = Gc_j \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (6.8.51)$$

和

$$c_j = H^*c_{j-1} + G^*d_{j-1}, \quad j = J, \dots, 1, 0 \quad (6.8.52)$$

式中 H^* 和 G^* 分别是 H 和 G 的共轭矩阵。

式 (6.8.51) 便是快速 (正交) 小波变换算法 (或称 Mallat 塔式分解算法), 而式 (6.8.52) 即是快速 (正交) 小波反变换算法 (或称 Mallat 塔式重构算法), 它们分别如图 6.8.4 (a) 和 (b) 所示。如画成垂直形式, 这两种算法的塔式结构便一目了然。

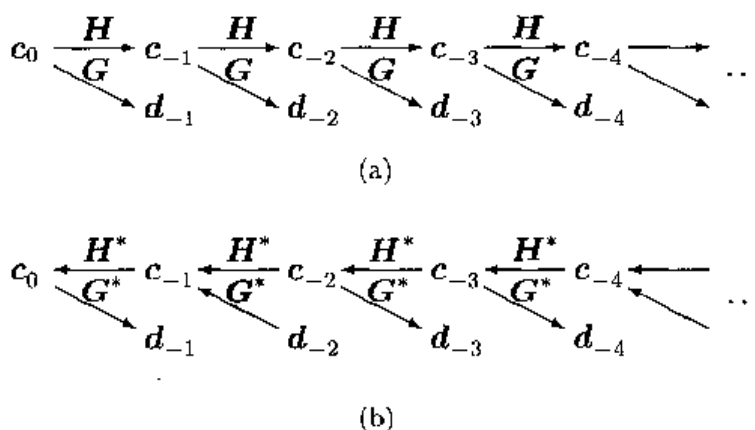


图 6.8.4 快速正交小波变换算法 (a) 和反变换算法 (b)

在结束正交多分辨率分析的讨论之前, 有必要强调指出, 在实际应用中, 通常希望小波具有以下性质^[92]:

- 紧支撑: 如果尺度函数和小波是紧支撑的, 则滤波器 H 和 G 就是有限冲激响应的滤波器, 它们在正交快速小波变换的求和就是有限项的求和。这显然有利于实现。如果它们不是紧支撑的, 也希望它们是快速衰减的, 以使得滤波器 H 和 G 都可以用 FIR 滤波器合理近似。

- 对称性: 如果尺度函数和小波是对称的, 则滤波器就具有广义的线性相位。若滤波器不具有线性相位, 则信号通过滤波器后, 会发生相位的畸变。因此, 滤波器的线性相位要求在信号处理应用中是非常重要的。
- 光滑性: 小波的光滑性在压缩应用中起着重要的作用。令小的系数 $c_{j,k}$ 为零, 再将这些小系数所对应的分量 $c_{j,k}\psi_{j,k}$ 从原函数中除去, 我们就可以实现原函数的压缩。如果原函数表示一幅图像, 但小波不光滑, 则压缩图像的误差就很容易用肉眼看出。小波越光滑, 滤波器的频率局域性就越好。
- 正交性: 我们知道, 在信号的任何一种线性展开或逼近中, 正交基是最佳的基函数。因此, 当使用正交的尺度函数时, 能够提供最佳的信号逼近。

事实上, 业已证明^[56], Haar 小波是惟一同时具有紧支撑、对称性、正交性的实值小波。然而, Haar 小波却不是连续的函数, 不具有光滑性。

利用共轭二次滤波器实现快速小波变换算法的优点是: 只需要设计两个滤波器 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 。但是, 这种共轭二次滤波器本身存在以下严重缺点^[47,p.126],

- 除非 H 和 G 均取 Haar 滤波器, 否则它们不可能同时是有限冲激响应 (FIR) 和线性相位的 (即具有实的对称系数)。但是, 由 Haar 滤波器产生的小波是非连续的, 即不具有光滑性, 因此这种小波没有实际意义。
- 由于 H 和 G 分别是二次型方程 (6.8.15) 和 (6.8.16) 的解, 所以它们的系数没有简单的表达式。
- 当 H 取 FIR 滤波器时, 二次型方程的求解采用的方法是先构造 $|H(\omega)|^2$, 然后再求 $H(\omega)$ 。但是, 这一方法不能推广到多维情况。
- 在 FIR 滤波器的情况下, 子空间 V_j 除了只是尺度函数 $\{\phi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 外, 没有任何其他简单和直接的定义。例如, 它们不可能由样条函数组成 (Haar 情况除外)。

6.9 双正交滤波器组

为了克服共轭二次滤波器的缺点, 我们就不能在多分辨率分析中使用正交尺度函数和正交小波, 需要转而使用双正交的尺度函数和双正交的小波函数。这样一种多分辨率分析称为双正交多分辨率分析。

6.9.1 双正交多分辨率分析

FIR 滤波器容易实现, 而线性相位又是保持信号不失真的先决条件。因此, 从

实际应用出发, 我们自然希望分析滤波器组和综合滤波器组都可以用具有线性相位的 FIR 滤波器构造。为此, 需要对图 6.8.1 的结构加以改造。改造是简单的: 分析滤波器组 $(\tilde{H}^*, \tilde{G}^*)$ 是另一滤波器组 $(\tilde{H}, \tilde{G})$ 的共轭形式, 其结果如图 6.9.1 所示。

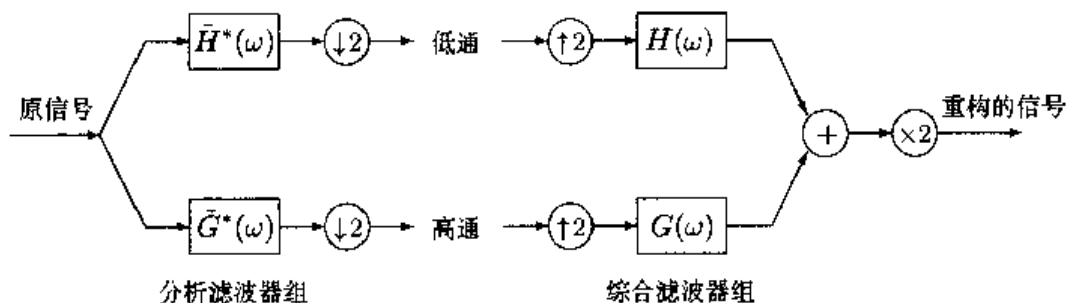


图 6.9.1 双正交多分辨分析的信号重构原理图

由于增加了两个滤波器, 使得我们在滤波器设计上存在更大的自由度, 从而四个滤波器 $H(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $\tilde{H}(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 都有可能用线性相位的 FIR 滤波器来实现。

令使用滤波器 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\omega)$ 构造的函数分别是尺度函数 $\phi(t)$ 和对偶尺度函数 $\tilde{\phi}(t)$, 而由滤波器 $G(\omega)$ 和 $\tilde{G}(\omega)$ 构造的函数分别是小波函数 $\psi(t)$ 和对偶小波函数 $\tilde{\psi}(t)$ 。双正交多分辨分析实际由两个多分辨分析组成: 一个是尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 产生的多分辨分析, 即 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 另外一个则是对偶尺度函数 $\tilde{\phi}(t)$ 和对偶小波函数 $\tilde{\psi}(t)$ 产生的对偶多分辨分析, 即 $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$ 。

需要注意的是, 小波子空间 W_j 不再是尺度子空间 V_j 的正交补, 而对偶小波子空间 $\tilde{W}_j$ 也不是对偶尺度子空间 $\tilde{V}_j$ 的正交补。但是, 这四个子空间之间仍然存在下面的正交补关系:

$$\left. \begin{aligned} W_j &\perp \tilde{V}_j \\ \tilde{W}_j &\perp V_j \end{aligned} \right\} \quad (6.9.1)$$

即是说, 小波子空间 W_j 是对偶尺度子空间 $\tilde{V}_j$ 在 $\tilde{V}_{j+1}$ 里的正交补, 而对偶小波子空间 $\tilde{W}_j$ 则是尺度子空间 V_j 在 V_{j+1} 里的正交补(空间)。由式 (6.9.1) 易知

$$\tilde{W}_j \perp W_{j'} \quad \forall j \neq j'$$

$\tilde{W}_j$ 和 W_j 对应的多分辨分析子空间分别为 V_j 和 $\tilde{V}_j$ 。注意, 尺度函数 $\phi(t)$ 仍然需要满足容许条件式 (6.7.5) 和单位分解式 (6.7.9)。

现在的任务是如何设计滤波器组 (H, G) 和 $(\tilde{H}, \tilde{G})$, 以构造双正交的小波函数。为此, 我们从信号的完全重构出发, 分析这四个滤波器之间的约束条件 [47, pp.127-128]。

令离散信号 $s(n)$ 的 Fourier 变换为

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-jn\omega} \quad (6.9.2)$$

通过滤波器 $\hat{H}$ 和 $\tilde{G}$ 的作用, 离散信号 $s(n)$ 被分别变换成一逼近序列 $a(n)$ 与一细节序列 $d(n)$, 它们的 Fourier 变换分别定义为

$$A(\omega) = \frac{1}{2}[\hat{H}^*(\omega)S(\omega) + \hat{H}^*(\omega + \pi)S(\omega + \pi)] \quad (6.9.3)$$

$$D(\omega) = \frac{1}{2}[\tilde{G}^*(\omega)S(\omega) + \tilde{G}^*(\omega + \pi)S(\omega + \pi)] \quad (6.9.4)$$

于是, 重构的信号 $r(n)$ 的频域形式可写作

$$R(\omega) = \alpha(\omega)S(\omega) + \beta(\omega)S(\omega + \pi) \quad (6.9.5)$$

式中

$$\alpha(\omega) = H(\omega)\hat{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) \quad (6.9.6)$$

$$\beta(\omega) = H(\omega)\hat{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) \quad (6.9.7)$$

当 $\alpha(\omega) = 1$ 和 $\beta(\omega) = 0$ 对所有 $\omega \in [-\pi, \pi]$ 成立时, 式 (6.9.4) 给出我们想要的结果 $R(\omega) = S(\omega)$, 其时域表示为 $r(n) = s(n)$, 即实现了离散信号 $s(n)$ 的完全重构。即是说, 信号完全重构的条件为

$$H(\omega)\hat{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) = 1 \quad (6.9.8a)$$

$$H(\omega)\hat{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0 \quad (6.9.8b)$$

定义 6.9.1 考虑滤波器组 (A, B) 及其对偶滤波器组 $(\tilde{A}, \tilde{B})$, 令

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A(\omega) & A(\omega + \pi) \\ B(\omega) & B(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\omega) & \tilde{B}(\omega + \pi) \\ \tilde{B}(\omega) & \tilde{A}(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad (6.9.9)$$

若

$$\tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{M} = \mathbf{I}_2 \quad \text{或} \quad \mathbf{M}^T \tilde{\mathbf{M}}^* = \mathbf{I}_2 \quad (6.9.10)$$

其中 $\mathbf{I}_2$ 为 2×2 单位矩阵, 则称 (A, B) 和 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为双正交滤波器组。

可以证明 (见习题 6.10), 滤波器组 (H, G) 和 $(\hat{H}, \tilde{G})$ 满足上述定义, 所以它们是双正交滤波器组。

令 $z = e^{j\omega}$, 则式 (6.9.8a) 和式 (6.9.8b) 可分别写作

$$\begin{aligned} H(z)\tilde{H}(z^{-1}) + G(z)\tilde{G}(z^{-1}) &= 1 \\ H(z)\tilde{H}(-z^{-1}) + G(z)\tilde{G}(-z^{-1}) &= 0 \end{aligned}$$

其解为

$$H(z) = \frac{\Delta_H}{\Delta} \quad \text{和} \quad G(z) = \frac{\Delta_G}{\Delta} \quad (6.9.11)$$

式中

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{H}(z^{-1}) & \tilde{G}(z^{-1}) \\ \tilde{H}(-z^{-1}) & \tilde{G}(-z^{-1}) \end{vmatrix} \quad (6.9.12a)$$

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{G}(z^{-1}) \\ 0 & \tilde{G}(-z^{-1}) \end{vmatrix} = \tilde{G}(-z^{-1}) \quad (6.9.12b)$$

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} \tilde{H}(z^{-1}) & 1 \\ \tilde{H}(-z^{-1}) & 0 \end{vmatrix} = -\tilde{H}(-z^{-1}) \quad (6.9.12c)$$

显然, 欲使 $H(z)$ 和 $G(z)$ 避免无限冲激响应解, 方程组的行列式 Δ 就必须为单项式 αz 。为简单计, 选择 $\Delta = -z$, 则式 (6.9.12a) 给出

$$[-z^{-1}\tilde{G}(-z^{-1})]\tilde{H}(z^{-1}) + [z^{-1}\tilde{G}(z^{-1})]\tilde{H}(-z^{-1}) = 1 \quad (6.9.13a)$$

此时, 式 (6.9.12b) 的解为

$$H(z) = -z^{-1}\tilde{G}(-z^{-1}) \quad \text{或} \quad H(-z) = z^{-1}\tilde{G}(z^{-1}) \quad (6.9.13b)$$

将它们代入式 (6.9.13b), 立即得到

$$H(z)\tilde{H}(z^{-1}) + H(-z)\tilde{H}(-z^{-1}) = 1 \quad (6.9.14)$$

满足这一条件的滤波器 $\tilde{H}(\omega)$ 称为 $H(\omega)$ 的对偶滤波器。若令

$$P(z) = H(z)\tilde{H}(z^{-1}) \quad (6.9.15)$$

则式 (6.9.14) 可以进一步简写作

$$P(z) + P(-z) = 1 \quad (6.9.16)$$

因此, 滤波器 $H(z)$ 及其对偶滤波器 $\tilde{H}(z)$ 可以通过求解方程式 (6.9.16) 得到。

另一方面, 式 (6.9.12c) 的解为 $G(z) = z^{-1}\tilde{H}(-z^{-1})$ 。将它和前面得到的解 $H(-z) = z^{-1}\tilde{G}(z^{-1})$ 合并在一起, 即可写作

$$G(z) = z^{-1}\tilde{H}(-z^{-1}) \quad \text{或} \quad G(\omega) = e^{-j\omega}\tilde{H}^*(\omega + \pi) \quad (6.9.17a)$$

$$\tilde{G}(z) = z^{-1}H(-z^{-1}) \quad \text{或} \quad \tilde{G}(\omega) = e^{-j\omega}H^*(\omega + \pi) \quad (6.9.17b)$$

式中 $\tilde{G}(\omega)$ 称为 $G(\omega)$ 的对偶滤波器。

上面的结果适用于选择 $\Delta = -z$ 的情况。若选择 $\Delta = z$, 则式 (6.9.12a) 给出结果

$$[z^{-1}\tilde{G}(-z^{-1})]\tilde{H}(z^{-1}) + [-z^{-1}\tilde{G}(z^{-1})]\tilde{H}(-z^{-1}) = 1 \quad (6.9.18a)$$

此时, 式 (6.9.12b) 和式 (6.9.12c) 的解分别为

$$G(z) = -z^{-1}\tilde{H}(-z^{-1}) \quad (6.9.18b)$$

$$\tilde{G}(z) = -z^{-1}H(-z^{-1}) \quad (6.9.18c)$$

将式 (6.9.18b) 和式 (6.9.18c) 代入式 (6.9.18a), 同样得到式 (6.9.14)。这说明当分析滤波器组 $(H, \tilde{H})$ 设计出来之后, 由式 (6.9.17) 或式 (6.9.18) 选择综合滤波器组 $(G, \tilde{G})$ 的两种方法只是形式上的不同, 对信号的完全重构并没有任何影响。顺便指出, 有的文献采用式 (6.9.17), 有的文献则使用式 (6.9.18)。

6.9.2 双正交滤波器组设计

总结以上讨论, 我们可以得出正交滤波器组设计的步骤如下:

- (1) 先根据式 (6.9.16) 确定滤波器 $H(z)$ 和 $\tilde{H}(z)$;
- (2) 利用式 (6.9.17) 或式 (6.9.18) 选择滤波器 $G(z)$ 和 $\tilde{G}(z)$ 。

关于满足式 (6.9.16) 的滤波器组 $(\tilde{H}, H)$ 的 FIR 结构, Vetterli 与 Herley^[199] 证明了下面的重要结果。

命题 6.9.1 满足完全重构条件的线性相位实 FIR 滤波器 $H(z)$ 和 $\tilde{H}(z)$ 具有下列形式当中的一种形式:

- (1) 两个滤波器都是对称的、奇数长度的, 它们的长度相差 2 的奇数倍。
- (2) 一个滤波器是对称的, 另一个滤波器是反对称的, 两个滤波器均为偶数长度, 并且二者长度相等或相差 2 的偶数倍。
- (3) 一个滤波器是奇数长度的, 另一个滤波器是偶数长度的, 二者的零点全部在单位圆上。两个滤波器或是对称的, 或一个是对称的, 而另一个是反对称的。

注意, 形式 (3) 的滤波器几乎没有什么实际意义, 是一种平凡解。

观察式 (6.9.15) 的结构知, 多项式 $P(z)$ 和 $P(-z)$ 的系数具有以下特点:

(1) $P(z)$ 中 z 的所有奇次幂项都被 $P(-z)$ 的相同幂次项抵消, 即 $p(z)$ 中 z^n (n 为奇数) 的系数 $p(n)$ 满足约束条件

$$p(n) = -p(-n), \quad n \text{ 为奇数} \quad (6.9.19)$$

(2) $P(z)$ 中 z 的所有偶次幂项都应该等于零, 只有零次幂项的系数各等于 1, 即 $p(z)$ 中 z^{-2n} 的系数 $p(2n)$ 满足条件

$$p(2n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (6.9.20)$$

有意思的是, 基于信号完全重构的滤波器组将导致双正交的尺度函数和小波函数。证明是简单的。

首先, 将滤波器 $H(\omega)$ 的定义式 (6.7.2) 和 $G(\omega)$ 的式 (6.8.7) 改写为 Z 变换的形式:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{\sqrt{2}} z^{-k} \quad (6.9.21a)$$

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2}} z^{-k} \quad (6.9.21b)$$

类似地, 我们定义

$$\tilde{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(k)}{\sqrt{2}} z^{-k} \quad (6.9.22a)$$

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}(k)}{\sqrt{2}} z^{-k} \quad (6.9.22b)$$

其次, 式 (6.9.16) 和式 (6.9.20) 一并意味着 $H(z)\tilde{H}(z^{-1})$ 和 $H(-z)\tilde{H}(-z^{-1})$ 中 z 的所有偶次幂项系数等于零, 而零次幂项系数等于 $\frac{1}{2}$ 。具体结果如下:

(1) 将式 (6.9.21a) 和式 (6.9.22a) 代入 $H(z)\tilde{H}(z^{-1})$, 即得

$$\sum_k h(k)\tilde{h}(k-2n) = \delta(n) \quad (6.9.23)$$

这表明, 低通滤波器系数 $h(k)$ 和它的对偶低通滤波器系数 $\tilde{h}(k)$ 是双正交的。

(2) 由式 (6.9.17) 或式 (6.9.18) 知 $G(z)\tilde{G}(z^{-1}) = H(-z)\tilde{H}(-z^{-1})$ 。将式 (6.9.21b) 和式 (6.9.22b) 代入 $H(-z)\tilde{H}(-z^{-1})$, 并注意到该乘积中 z 的所有偶次幂项系数等于

零, 而零次幂项系数等于 $\frac{1}{2}$, 又有

$$\sum_k g(k)\tilde{g}(k-2n) = \delta(n) \quad (6.9.24)$$

这表明, 高通滤波器系数 $g(k)$ 和它的对偶高通滤波器系数 $\tilde{g}(k)$ 也是双正交的。

(3) 利用式 (6.9.17a) 得

$$G(z)\tilde{H}(z) = z^{-1}\tilde{H}(z^{-1})\tilde{H}(-z^{-1})$$

注意到 $\tilde{H}(z^{-1})\tilde{H}(-z^{-1})$ 只有 z 的零次幂和偶次幂项系数不等于零, 而所有奇次幂项的系数均为零, 所以 $G(z)\tilde{H}(z) = z^{-1}\tilde{H}(z^{-1})\tilde{H}(-z^{-1})$ 只有 z 的奇次幂项系数不等于零, 而零次幂和所有偶次幂项的系数皆为零。这意味着

$$\sum_k g(k)\tilde{h}(k-2n) = 0, \quad \forall n \quad (6.9.25)$$

类似地, 还可以证明

$$\sum_k h(k)\tilde{g}(k-2n) = 0, \quad \forall n \quad (6.9.26)$$

总结以上讨论, 即可得出一重要结论: 从信号完全重构条件出发, 图 6.9.1 的分析滤波器组 $(\tilde{H}, \tilde{G})$ 和综合滤波器组 (H, G) 在频域或 Z 变换域必须服从式 (6.9.7) 和式 (6.9.8) 的条件。在时域, 这些滤波器等价于服从双正交条件式 (6.9.23) ~ 式 (6.9.26)。

6.9.3 双正交小波设计

滤波器组的上述理论可以用来设计双正交的小波函数。

首先考虑尺度函数和对偶尺度函数的迭代构造。

(1) 用一单位直流信号 $U(x) = 1$ (其中 $x \in [0, 1]$) 作为尺度函数迭代的初始值 $\phi^{(0)}(x)$ 。若令滤波器 $H^{(0)}(z) = h^{(0)}(0) = 1$, 则初始值可写作

$$\phi^{(0)}(x) = U(x) = h^{(0)}(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.9.27)$$

(2) 对 $\phi^{(0)}(x)$ 作 $2\downarrow$ 采样 (下采样), 再将采样结果通过滤波器 $H(z)$, 得到第一次迭代的尺度函数 $\phi^{(1)}(x)$, 如图 6.9.2 (a) 左半部分所示。由于用 2 下采样后再滤波等价于先用 $H(z^2)$ 滤波再下采样, 故左半部分等价画作右半部分。若令等效滤波器

$$H^{(1)}(z) = H(z^2) = \prod_{m=1}^1 H(z^{2^m})$$

则第一次迭代产生的尺度函数是分段不变的函数, 可表示为

$$\phi^{(1)}(x) = 2^{1/2} h^{(1)}(k), \quad 2^{-1}k \leq x < 2^{-1}(k+1)$$

其中 $h^{(1)}(k)$ 表示滤波器 $H^{(1)}(z)$ 的第 k 个系数。注意, 此时 $H^{(1)}(z)$ 的长度是 $H(z)$ 的两倍。

(3) 然后, 对 $\phi^{(1)}(x)$ 作 $2\downarrow$ 采样再滤波, 又可迭代第二次迭代的尺度函数 $\phi^{(2)}(x)$ 。依此类推, 第 i 次迭代产生的尺度函数即是 $U(x)$ 通过 i 次级联的下采样 + 滤波的输出结果, 如图 6.9.2 (b) 所示。显然, 这一结果可等价画成图 6.9.2 (c)。

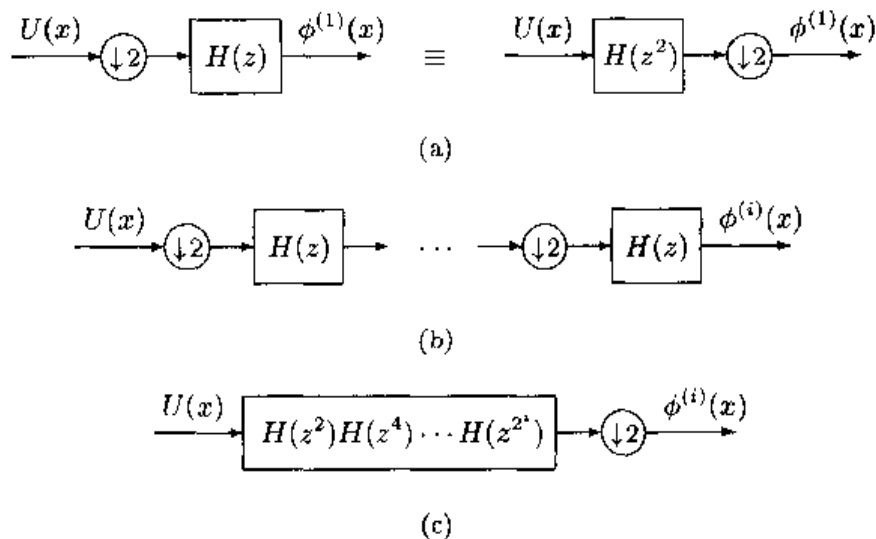


图 6.9.2 尺度函数的迭代产生

等价滤波器的 Z 变换形式为

$$H^{(i)}(z) = \prod_{m=1}^i H(z^{2^m}) \quad (6.9.28)$$

而以 $U(x)$ 作输入时, 等价滤波器的输出为

$$\phi^{(i)}(x) = 2^{i/2} h^{(i)}(k), \quad 2^{-i}k \leq x < 2^{-i}(k+1) \quad (6.9.29a)$$

式中 $h^{(i)}(k)$ 表示滤波器 $H^{(i)}(z)$ 的第 k 个系数。

若将图 6.9.2 中的滤波器 $H(z)$ 换成 $\tilde{H}(z)$, 则等价滤波器的输出为

$$\tilde{\phi}^{(i)}(x) = 2^{i/2} \tilde{h}^{(i)}(k), \quad 2^{-i}k \leq x < 2^{-i}(k+1) \quad (6.9.29b)$$

式中 $\tilde{h}^{(i)}(k)$ 表示滤波器 $\tilde{H}^{(i)}(z)$ 的第 k 个系数。

在迭代构造尺度函数和对偶尺度函数的过程中, 又可以使用公式

$$\psi^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g^{(i)}(k) \phi^{(i)}(2x - k), \quad 2^{-i}k \leq x < 2^{-i}(k+1) \quad (6.9.29c)$$

$$\tilde{\psi}^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{g}^{(i)}(k) \tilde{\phi}^{(i)}(2x - k), \quad 2^{-i}k \leq x < 2^{-i}(k+1) \quad (6.9.29d)$$

分别构造小波函数 $\psi^{(i)}(x)$ 和对偶小波函数 $\tilde{\psi}^{(i)}(x)$ 。

式 (6.9.29a) ~ 式 (6.9.29d) 组成了尺度函数 $\phi(x)$ 、对偶尺度函数 $\tilde{\phi}(x)$ 、小波函数 $\psi(x)$ 和对偶小波函数 $\tilde{\psi}(x)$ 的迭代构造算法。问题是: 如果滤波器组 (H, G) 和 $(\tilde{H}, \tilde{G})$ 满足完全重构条件, 我们是否就一定能够得到双正交的小波函数呢? 下面就来回答这个问题。

既然尺度函数和小波函数是迭代产生的, 当然我们希望它们能够收敛为连续函数。根据构造算法知, 若尺度函数收敛为连续函数, 则小波函数也必然收敛为连续函数。为了保证尺度函数收敛为连续函数, 由式 (6.8.23) 知, 低通滤波器 $H(\omega)$ 应该具有尽可能大的消失矩阶数 N 。要求这一条件的理由有两个:

- 若满足式 (6.8.23a) 和式 (6.8.23b) 的整数 N 越大, 则该滤波器迭代产生的尺度函数收敛为连续函数的可能性就越大;
- 产生的小波将具有 N 阶消失矩, 即有 $\int x^k \psi(x) dx = 0, k = 0, 1, \dots, N-1$ 。这一性质对我们使用小波变换表示光滑的函数是非常有用的。

在后面的讨论中, 我们将假定低通滤波器 $H(\omega)$ 具有足够大的消失矩阶数, 以保证迭代构造的尺度函数收敛为一连续函数。

由式 (6.9.29) 知, 第 i 次迭代的滤波器长度 $L^{(i)} = (2^i - 1)(L - 1) + 1$ 。显然, 随着 $i \rightarrow \infty$, 滤波器将变成 IIR 滤波器。然而, 对于尺度函数 $\phi^{(i)}(x)$ 而言, 其定义域为 $x \in [0, L - 1]$ 。

由式 (6.9.28) 和式 (6.9.29a) 得

$$\phi^{(i)}(x) = 2^{i/2} \sum_{k=0}^{L-1} h(k) h^{(i-1)}(n - 2^{i-1}k), \quad 2^{-i}n \leq x < 2^{-i}(n+1) \quad (6.9.30)$$

为了用 $\phi^{(i-1)}(x)$ 书写 $h^{(i-1)}(n - 2^{i-1}k)$, 注意到

$$\phi^{(i-1)}(2x - k) = 2^{(i-1)/2} h^{(i-1)}(n), \quad 2^{-i+1}n \leq 2x - k < 2^{-i+1}(n+1)$$

或写作

$$\phi^{(i-1)}(2x - k) = 2^{(i-1)/2} h^{(i-1)}(n - 2^{i-1}k), \quad 2^{-i}n \leq x < 2^{-i}(n+1) \quad (6.9.31)$$