

1. Gabor 原子网络的结构

假定每组观测信号向量有 L 个数据, 即 $\mathbf{x}_i = [x_i(1), \dots, x_i(L)]^T$ 。令 $\{g_k, k = 1, \dots, K\}$ 是具有 K 个不同尺度的 Gabor 原子向量, 其中 $g_k = [g_k(1), \dots, g_k(L)]^T$, 它对信号向量 $\mathbf{x}_i$ 中的 L 个数据进行加权求和, 而 $g_k(t)$ 定义为

$$g_k(t) = \frac{1}{\sqrt{s_k}} g\left(\frac{t - u_k}{s_k}\right) e^{j\xi_k t}, \quad k = 1, \dots, K \quad (6.10.5)$$

式中 s_k, u_k 和 ξ_k 分别表示 Gabor 原子变换的尺度、时移和频率调制参数。这些参数需要自适应调节, 直到某个代价函数最小化。

图 6.10.3 中的神经网络由以下三层组成:

(1) 输入层: 这一层有 K 个节点 $\phi_1, \dots, \phi_K$, 它们称为 Gabor 原子节点。每个 Gabor 原子节点的作用函数取绝对值 (复数情况为幅值) 函数, 用 ϕ_{ik} 表示与第 i 组观测信号向量对应的 Gabor 原子的第 k 个节点, 因此, ϕ_{ik} 定义为 Gabor 原子向量 $g_k = g(u_k, \xi_k, s_k)$ 与信号向量 $\mathbf{x}_i$ 之间的内积的绝对值, 即有

$$\phi_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} |\langle g_k, \mathbf{x}_i \rangle| = \left| \int \frac{1}{\sqrt{s_k}} g^*\left(\frac{t - u_k}{s_k}\right) e^{-j\xi_k t} x_i(t) dt \right| \quad (6.10.6)$$

它表示第 k 个 Gabor 原子节点 $g_k(t)$ 与第 i 个信号 $x_i(t)$ 之间的相关。

(2) 隐层: 该层有 H 个节点 $o_1, \dots, o_H$ 。输入层中第 k 个 Gabor 原子节点的输出 ϕ_{ik} 被神经网络的权系数 $w_{kh}^{(1)}$ 加权求和, 得到

$$\text{net}_{ih}^{(1)} = \sum_{k=1}^K \phi_{ik} w_{kh}^{(1)}, \quad h = 1, \dots, H \quad (6.10.7)$$

它表示当输入层输入信号 $\mathbf{x}_i$ 时, 隐层第 h 个节点的输出。式中, 上标 (1) 表示隐层。

假定隐层采用的激励函数为 S 型函数

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (6.10.8)$$

于是, 被输入 $\text{net}_{ih}^{(1)}$ 激励的 S 型函数给出第 h 个隐层节点的输出

$$o_{ih} = f\left(\text{net}_{ih}^{(1)}\right) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_{ih}^{(1)}}}, \quad h = 1, \dots, H \quad (6.10.9)$$

(3) 输出层: 本层有 M 个节点 $y_1, \dots, y_M$ 。第 m 个节点 y_m 的输入为

$$\text{net}_{im}^{(2)} = \sum_{h=1}^H o_{ih} u_{hm}^{(2)}, \quad m = 1, \dots, M \quad (6.10.10)$$

这一输入激励式 (6.10.8) 定义的 S 型函数, 得到第 m 个输出节点的输出

$$y_{im} = f(\text{net}_{im}^{(2)}) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_{im}^{(2)}}}, \quad m = 1, \dots, M \quad (6.10.11)$$

式中 $\text{net}_{im}^{(2)}$ 和 y_{im} 分别是输出层第 m 个节点的输入和输出, 下标 i 表示 Gabor 原子网络的第 i 组输入信号 x_i 。

如图 6.10.3 所示, 整个 Gabor 原子神经网络分为两个部分: 特征抽取部分和信号分类部分。输入层为特征抽取部分, 而隐层和输出层组成信号分类部分。所使用的学习算法为误差反传 (BP) 算法。

2. 训练算法和测试算法

在学习阶段, 隐层的权系数 $w_{kh}^{(1)}$ 和输出层的权系数 $w_{hm}^{(2)}$ 以及 Gabor 原子参数 u_k, ξ_k 和 s_k 都需要自适应调整, 以使得期望输出向量 d 和输入信号向量 x_i 的实际输出 y_i 之间的误差平方和最小化, 即

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M (d_{im} - y_{im})^2 = \min \quad (6.10.12)$$

称之为后向传播误差, 简称反传误差。

可以证明^[174], 代价函数 E 相对于第 k 个 Gabor 原子节点的时移参数 u_k 、尺度参数 s_k 和频率调制参数 ξ_k 的偏导数分别为

$$\frac{\partial E}{\partial u_k} = - \sum_{i=1}^K \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial u_k} \quad (6.10.13)$$

$$\frac{\partial E}{\partial s_k} = - \sum_{i=1}^K \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial s_k} \quad (6.10.14)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_k} = - \sum_{i=1}^K \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \xi_k} \quad (6.10.15)$$

式中

$$\delta_{ih}^{(1)} = \sum_{m=1}^M \delta_{im}^{(2)} w_{hm}^{(2)} o_{ih} (1 - o_{ih}) \quad (6.10.16)$$

而 $\delta_{im}^{(2)} = (d_{im} - y_{im}) y_{im} (1 - y_{im})$ 。

令第 1 类信号的 N_1 组观测向量为 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_1}$, 第 2 类信号的 N_2 组观测向量是 $\mathbf{x}_{N_1+1}, \dots, \mathbf{x}_{N_1+N_2}$, 而第 P 类信号有 N_P 组观测向量 $\mathbf{x}_{N_1+\dots+N_{P-1}+1}, \dots, \mathbf{x}_N$.

在训练阶段的每一步迭代中, 权系数和 Gabor 原子参数自适应更新, 以减小误差 E 。这一过程迭代进行, 直到 Gabor 原子网络达到稳定。当网络收敛时, Gabor 原子节点表示时间-频率-尺度三维空间的最优部分, 即对于所给定的所有训练样本, 这些 Gabor 原子参数对这些信号的分类或决策是最可靠的。为了加速网络的收敛和稳定, 文献 [174] 使用具有自适应学习速率的梯度下降法, 对网络的权系数和偏差值进行更新。

对于实信号, Gabor 原子也是实的。在这种情况下, 式 (6.10.6) 可以计算为

$$\begin{aligned}\phi_{ik} &= \left| \int \frac{1}{\sqrt{s_k}} g\left(\frac{t-u_k}{s_k}\right) \cos(\xi_k t) x_i(t) dt \right| \\ &= \left| \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t-u_k)^2/s_k^2} \cos(\xi_k t) x_i(t) dt \right|\end{aligned}\quad (6.10.17)$$

在离散时间情况下, 上式中的积分应该用求和代替。此时, 式 (6.10.13) ~ 式 (6.10.15) 可以改写作 [174]

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial u_k} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \frac{2}{s_k^2} \pi(t_l - u_k) \times \\ &\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2/s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l)\end{aligned}\quad (6.10.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial s_k} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \left(-\frac{1}{2s_k} + \frac{2}{s_k^3} \pi(t_l - u_k)^2 \right) \times \\ &\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2/s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l)\end{aligned}\quad (6.10.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \xi_k} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H \delta_{ih}^{(1)} w_{kh}^{(1)} \frac{\theta_{ik}}{\phi_{ik}} \sum_{l=1}^L \left[-t_l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s_k}} e^{-\pi(t_l - u_k)^2/s_k^2} \cos(\xi_k t_l) x_i(t_l) \right]\end{aligned}\quad (6.10.20)$$

令 $\mathcal{X}_p$ 代表第 p 类目标信号。已知 N 组训练样本 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ 和特征参数集合 $\{u_k, \xi_k, s_k\}$ 的组数 K , 下面的训练算法可以抽取第 p 类信号的 K 组特征参数。

算法 6.10.1 (第 p 类目标的训练算法)

步骤 1 初始化 Gabor 原子参数 $u_k, \xi_k, s_k, k = 1, \dots, K$ 及 Gabor 原子网络的权系数 $w_{kh}^{(1)}$ 和 $w_{hm}^{(2)}$ 。

步骤 2 利用初始化的 Gabor 原子参数计算 Gabor 原子变换, 对所有 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$

和 K 个 Gabor 原子节点计算式 (6.10.17) 的 ϕ_{ik} , 其中, 期望信号 $d_{i1} = \cdots = d_{iM} = 1$, 若 $x_i \in \mathcal{X}_p$; 否则, 期望信号等于 0。

步骤 3 将 $\phi_{ik}(k = 1, \cdots, K)$ 输入到 Gabor 原子网络的分类部分。

步骤 4 对所有训练样本计算 Gabor 原子网络的输出。

步骤 5 计算网络的误差 E 。若 E 小于某个预先设定的阈值, 则训练结束, 跳至步骤 9。否则, 继续下一步。

步骤 6 利用 BP 算法调节每一层的权系数。

步骤 7 根据式 (6.10.18) ~ 式 (6.10.20) 的梯度和梯度下降法, 更新 Gabor 原子参数三元组 $\{u_k, \xi_k, s_k\}$ 。

步骤 8 返回步骤 2, 并重复以上步骤。

步骤 9 存储 K 个 Gabor 原子参数三元组 $\{u_k^{(p)}, \xi_k^{(p)}, s_k^{(p)}\}$ 和网络权系数矩阵 $\mathbf{W}_1^{(p)}$ 和 $\mathbf{W}_2^{(p)}$ 。

注释 1 算法 6.10.1 可以同时对其 $p = 1, \cdots, P$ 并行实现, 从而得到 P 类目标的特征参数和 P 个训练好的 Gabor 原子神经网络。

注释 2 隐层 $H \times K$ 维权系数矩阵 $\mathbf{W}_1^{(p)}$ 和输出层 $M \times H$ 维权系数矩阵 $\mathbf{W}_2^{(p)}$ 分别为

$$\mathbf{W}_1^{(p)} = \begin{bmatrix} w_{11}^{(1)} & w_{21}^{(1)} & \cdots & w_{K1}^{(1)} \\ w_{12}^{(1)} & w_{22}^{(1)} & \cdots & w_{K2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{1H}^{(1)} & w_{2H}^{(1)} & \cdots & w_{KH}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.10.21)$$

$$\mathbf{W}_2^{(p)} = \begin{bmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{21}^{(2)} & \cdots & w_{H1}^{(2)} \\ w_{12}^{(2)} & w_{22}^{(2)} & \cdots & w_{H2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{1M}^{(2)} & w_{2M}^{(2)} & \cdots & w_{HM}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.10.22)$$

一旦每类目标信号的 K 个特征参数三元组被抽取, 以及 P 个 Gabor 原子网络训练好以后, 下面的算法即可用于一个测试样本 x 所属于的信号类别。

算法 6.10.2 (测试算法)

步骤 1 输入所存储的 Gabor 原子参数三元组 $\{u_k, \xi_k, s_k\}, k = 1, \cdots, K$ 和所存储的权系数矩阵 $\mathbf{W}_1^{(p)}, \cdots, \mathbf{W}_2^{(p)}$ 。

步骤 2 计算输入层的输出 $\phi_k = |\langle g_k, x \rangle|$, 并令 $\phi = [\phi_1, \cdots, \phi_K]^T$ 。

步骤 3 利用下面的公式计算 $\mathbf{n}^{(1)} = [\text{net}_1^{(1)}, \dots, \text{net}_H^{(1)}]^T$ 和隐层输出 o_h :

$$\mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{W}_1^{(p)} \phi \quad (6.10.23)$$

$$o_h = f(\text{net}_h^{(1)}) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_h^{(1)}}}, \quad h = 1, \dots, H \quad (6.10.24)$$

步骤 4 计算

$$\mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{W}_2^{(p)} \mathbf{o} \quad (6.10.25)$$

$$y_m = f(\text{net}_m^{(2)}) = \frac{1}{1 + e^{-\text{net}_m^{(2)}}}, \quad m = 1, \dots, M \quad (6.10.26)$$

式中 $\mathbf{o} = [o_1, \dots, o_H]^T$ 。

步骤 5 根据输出 $y_1, \dots, y_m$ 等于 1 或 0, 判断测试样本是否属于第 p 类目标。

算法 6.10.2 也可对 $p = 1, \dots, P$ 并行实现。关于初始化参数 $u_k^{(1)}, \xi_k^{(1)}$ 和 $s_k^{(1)}$ 的选择, 可参考文献 [174]。

高分辨雷达接收机的距离像为非平稳信号, 其二维时频表示为 [42]

$$S(t, f) = e^{-j4\pi R(t)/c} \iint \rho(x, y) e^{-j2\pi[xf_x(t) - yf_y(t)]} dx dy \quad (6.10.27)$$

式中, $R(t)$ 是目标旋转中心到雷达的距离, $\rho(x, y)$ 为目标的反射密度函数, x 和 y 分别为水平和垂直方向, c 为光速, 而 f_x 和 f_y 为频率在 x 和 y 方向上的分量。

若已知几类目标的距离像数据, 欲对某些新测试数据判断它们属于何种目标, 这一任务称为雷达目标识别。文献 [174] 从物理学的观点, 分析了三维 Gabor 变换用于雷达目标识别的合理性:

(1) 时移参数 u_k 是 Gabor 变换滑动窗函数的中心, 因此对应于目标的离散时间事件 (主要体现为目标的散射中心——发动机、天线罩、出气口等的位置), 它们是飞机识别的关键部位。

(2) 频率调制参数 ξ_k 反映了 Gabor 变换的相位, 因此表示目标的离散频率事件 (蒙皮材料、发动机、天线罩等对电磁波的辐射和散射特性)。

(3) 尺度参数 s_k 反映了飞机的几何尺寸 (特别是机长和翼宽)。

这些关系说明, 具有时移、频率调制和尺度三种参数的三维 Gabor 变换适合用作雷达目标分类与识别的信号处理工具。

6.10.3 实验结果

为了说明 Gabor 原子网络作为信号分类方法的有效性, 文献 [174] 分别介绍了微波暗室数据和高分辨雷达实测数据的实验结果。共采用了 7 种信号分类方法:

- (1) 距离像方法: 直接使用原始的距离像作为径向基神经网络 (分类器) 的输入。
- (2) FFT 方法: 用距离像的快速 Fourier 变换的幅值作径向基神经网络的输入。
- (3) Gabor 变换方法: 选择距离像的 Gabor 变换系数作为特征向量, 并用这些系数训练径向基神经网络。
- (4) 小波变换方法: 选择距离像的小波变换系数作为特征向量, 并用这些系数训练径向基神经网络。
- (5) LDB-DP 方法: 使用文献 [94] 的局部鉴别基—鉴别跟踪 (LDB-DP) 方法抽取特征, 并用线性鉴别分析作为分类器。
- (6) Gabor 原子网络方法: Gabor 原子参数随机初始化。
- (7) Gabor 原子网络方法: 使用局部鉴别基 (LDB) 方法对 Gabor 原子参数初始化。

表 6.10.1 列出的是 7 种方法对微波暗室数据的识别结果, 表 6.10.2 为 7 种方法对高分辨雷达数据的识别结果。其中, 微波暗室数据共有 1084 组距离像 (B-52 模型飞机: 322 组, Q6: 311 组, Q7: 451 组) 和高分辨雷达的实测数据 (雅克 -42, 安 -26 和 桨状飞机各 500 组距离像数据)。这些数据与 5.10 节使用的数据相同, 第 1, 6, 11, ... 个数据为训练组, 第 2, 7, 12, ... 个数据为第 1 测试组, 依次类推, 共 4 个测试组。

经过计算, 原始的微波暗室数据的信噪比约为 25dB, 而高分辨雷达的实测数据的信噪比约为 23dB。

从表中可以看出, 用 7 种方法提取特征获得的识别率的排列顺序为: FFT < Gabor 变换 $\approx$ 小波变换 < LDB-DP < 距离像 < Gabor 原子网络 (随机初始化) < Gabor 原子网络 (用 LDB 算法初始化)。

表 6.10.1 微波暗室数据的识别率 (%)^[174]

分 类 方 法	训练集	测 试 集			
		1	2	3	4
距离像	91.4	89.8	90.8	90.7	91.6
FFT	78.8	77.5	76.4	77.0	78.5
Gabor 变换	85.1	84.0	85.7	84.4	84.5
小波变换	84.5	85.3	85.1	84.5	84.2
LDB-DP	89.2	88.7	88.6	88.6	89.0
Gabor 原子网络 (随机初始化)	91.6	90.7	91.1	91.6	92.0
Gabor 原子网络 (用 LDB 初始化)	94.3	93.2	93.7	93.1	93.2

表 6.10.2 雷达实测数据的识别率 (%)^[174]

分 类 方 法	训练集	测 试 集			
		1	2	3	4
距离像	88.3	87.1	88.8	88.3	87.5
FFT	73.4	72.5	74.0	73.6	74.5
Gabor 变换	83.8	81.5	83.3	82.6	83.7
小波变换	83.2	82.7	83.1	81.9	82.8
LDB-DP	85.7	85.2	84.6	84.1	85.6
Gabor 原子网络 (随机初始化)	90.5	88.4	88.9	90.1	88.7
Gabor 原子网络 (用 LDP 初始化)	92.0	90.3	91.5	91.0	90.8

上述结果可定性解释如下:

- 由于 FFT 幅度仅利用了信号的全局频率强度信息, 不能表示距离像中的局部时频信息, 因此它的识别率最低。
- Gabor 变换和小波变换都是用时间-频率-尺度 (TFS) 空间的单个切片对信号进行表示, 所包含的信息比 TFS 空间的信息明显少, 因此, 它们的识别率要低于其他基于 TFS 空间的信号表示方法。Gabor 变换和小波变换之间的优劣取决于信号的具体特性, 在雷达目标识别中, 它们基本相当。
- LDB-DP 方法是 TFS 空间内的信号表示方法, 因此识别率高于 Gabor 变换和小波变换。但是, 由于它只是取单个具有最大鉴别能力的特征参数组, 所以它的分辨率不如在 TFS 空间内搜索多个最优特征参数组的 Gabor 原子网络方法。
- 距离像方法直接利用测试样本的距离像与距离像库之间的匹配, 实现分类。这种方法的主要缺点是: 需要进行复杂的预处理, 需要存储大量的距离像作模板, 并且模板匹配的计算量大, 不适合用作实时目标识别。

图 6.10.4 和图 6.10.5 分别画出了 Gabor 原子网络方法用于微波暗室数据和雷达实测数据的识别率与特征组数 K 、隐层数目 H 之间的变化关系。

归纳以上讨论, 无论是从物理学的观点看, 还是从非平稳信号分析与处理的角度出发, 基于时间-频率-尺度三维空间的 Gabor 变换都适合用作高分辨雷达目标分类的工具。

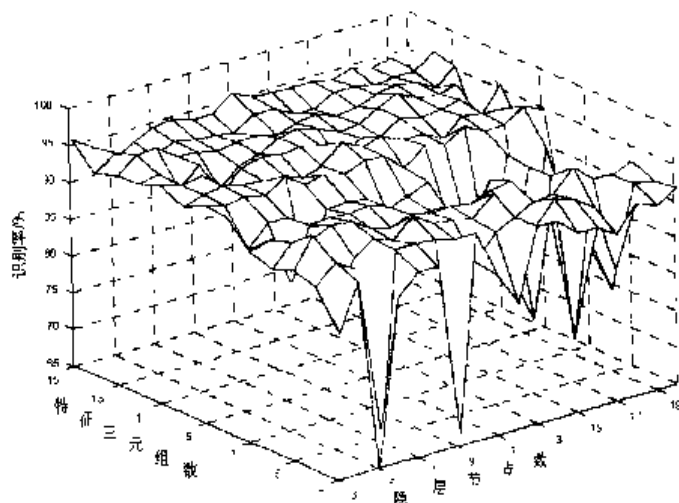


图 6.10.4 识别率与特征参数组数 K 、隐层节点个数 H 的关系 (微波暗室数据)

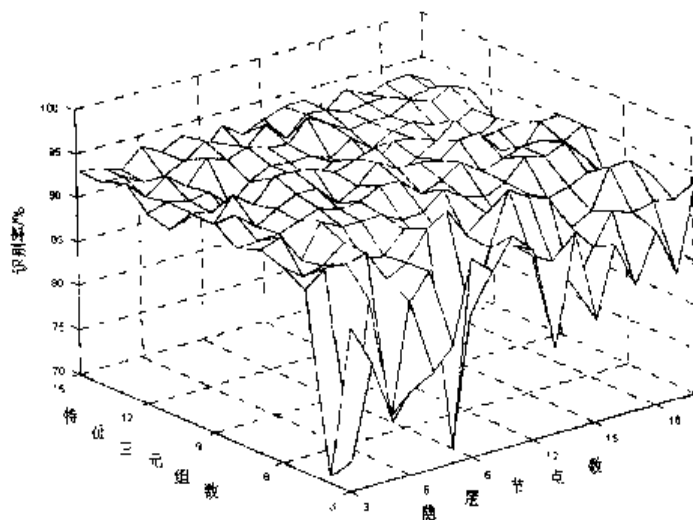


图 6.10.5 识别率与特征参数组数 K 、隐层节点个数 H 的关系 (雷达实测数据)

本章小结

本章首先介绍了信号局部变换的两种基本形式、解析信号和不相容原理。然后，围绕时频信号分析的线性变换，先介绍了短时 Fourier 变换，并讲述了临界采样和过采样的 Gabor 变换。

小波分析是本章的一个重点，它包含了两个基本问题：小波的设计和小波变换的快速算法。我们从框架理论、多分辨分析和滤波器组理论三个角度，详细地讨论了小波的设计方法和快速小波包含的实现。

最后,介绍了一种信号分类的 Gabor 原子神经网络方法及其在高分辨雷达目标识别中的应用例子。

习 题

6.1 求下列信号的瞬时频率 $\omega_i(t)$ 和平均频率 $\bar{\omega}$:

(1) 归一化的高斯信号

$$s(t) = g(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right), \quad \alpha > 0$$

(2) 具有高斯包络的线性调频信号

$$s(t) = g(t)e^{jmt^2}$$

6.2 令

$$Y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) \gamma^*(u-t) e^{-j\omega u} du$$

表示 $y(t)$ 的短时 Fourier 变换。用 $y(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的 Fourier 变换表示 $Y(t, \omega)$, 并利用这一表示说明为什么要求 $\gamma(t)$ 是窄带函数?

6.3 试对短时 Fourier 变换的下列性质加以证明:

- (1) 短时 Fourier 变换是一种线性时频表示;
- (2) 短时 Fourier 变换具有频移不变性:

$$\tilde{z}(t) = z(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow \text{STFT}_{\tilde{z}}(t, \omega) = \text{STFT}_z(t, \omega - \omega_0)$$

6.4 令窗函数

$$g(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right)$$

求高斯信号

$$s(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

的短时 Fourier 变换 $\text{STFT}(t, \omega)$ 。

6.5 证明信号 $z(t)$ 可以利用短时 Fourier 反变换恢复或重构, 即

$$z(t) = \frac{1}{g^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}(t, f) e^{j2\pi ft} df$$

6.6 令 $e_1 = [1, 0]^T$ 和 $e_2 = [0, 1]^T$. 定义 $g_1 = e_1$, $g_2 = -0.5e_1 + 0.5\sqrt{3}e_2$, $g_3 = -0.5e_1 - 0.5\sqrt{3}e_2$. 试问 $\{g_i, i = 1, 2, 3\}$ 组成框架吗? 若不是, 请说明理由; 如果是, 那么它又是何种框架?

6.7 证明任何一个框架 $\{g_k, k \in K\}$ 都是 L_2 空间的完备集合.

6.8 证明产生标准正交小波的滤波器 $G(\omega)$ 满足条件

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1$$

6.9 令 P 是一概率测度, 其支撑区为 $[-\epsilon, \epsilon] \subset [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. 已知一尺度函数的 Fourier 变换为

$$\Phi(\omega) = \left[\int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi} dP \right]^{1/2}$$

它是一积分的非负平方根, 证明这一尺度函数是正交函数.

6.10 证明满足信号完全重构条件

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega) = 1$$

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega + \pi) + G(\omega)\tilde{G}^*(\omega + \pi) = 0$$

的滤波器组 (H, G) 和对偶滤波器组 $(\tilde{H}, \tilde{G})$ 是双正交滤波器组.

6.11 令 $\tilde{f}(t)$ 是 $f(t)$ 的双正交的对偶函数, 即

$$\langle f(t-n), \tilde{f}(n-k) \rangle = \delta(n-k)$$

并且 $F(\omega)$ 和 $\tilde{F}(\omega)$ 分别是 $f(t)$ 和 $\tilde{f}(t)$ 的 Fourier 变换. 证明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi)\tilde{F}^*(\omega + 2k\pi) = 1, \quad \forall \omega$$

6.12 假设函数 $f(t)$ 和 $\tilde{g}(t)$ 满足双正交关系

$$\langle f(t-n), \tilde{g}(n-k) \rangle = 0, \quad \forall n, k$$

函数 $\tilde{f}(t)$ 和 $g(t)$ 之间也存在双正交关系:

$$\langle \tilde{f}(t-n), g(n-k) \rangle = 0, \quad \forall n, k$$

证明: 这些函数的 Fourier 变换服从恒等式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi)\tilde{G}^*(\omega + 2k\pi) = 0, \quad \forall \omega$$