和

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega+2k\pi)\tilde{G}^*(\omega+2k\pi)=0, \quad \forall\, \omega$$

6.13　令尺度函数、对偶尺度函数、小波函数、对偶小波函数满足以下双正交关系：

$$\langle \phi(t-n), \tilde{\phi}(t-k)\rangle = \delta(n-k)$$
$$\langle \psi(t-n), \tilde{\psi}(t-k)\rangle = \delta(n-k)$$
$$\langle \phi(t-n), \tilde{\psi}(t-k)\rangle = 0$$
$$\langle \psi(t-n), \tilde{\phi}(t-k)\rangle = 0$$

证明：分析滤波器组 $(\tilde{H},\tilde{G})$ 和综合滤波器组 (H,G) 满足完全重构条件

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega)+G(\omega)\tilde{G}^*(\omega)=1$$
$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega+\pi)+G(\omega)\tilde{G}^*(\omega+\pi)=0$$

6.14　证明尺度函数 $\phi(t)$ 的双尺度方程若改写为 $\phi_{jk}(t)$ 的方程，则有

$$\phi_{jk}(t)=\sum_l h(l-2k)\phi_{j+1,l}(t)$$

6.15　证明尺度函数 $\phi(2t)$ 可以用尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 展开成两个级数之和：

$$\phi(2t-k)=\sum_l \tilde{h}(k-2l)\phi(t-l)+\sum_l \tilde{g}(k-2l)\psi(t-l)$$

6.16　令低通滤波器

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\Omega| \leqslant \left|\frac{\pi}{2}\right| \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

并且

$$G(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}H^*(\omega+\pi)$$

试求由 $G(\omega)$ 产生的小波函数 $\psi(t)$。

6.17　令 $g(t)=\sqrt{2\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}, t \geqslant 0$。证明 $g(t)$ 的双正交函数 $\gamma(t)$ 由下式给出：

$$\gamma(t)=\begin{cases}-\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}, & -1 \leqslant t < 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}}, & 0 < t \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

6.18 令

$$H_{\text{Zak}}(t,f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(t-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kf}$$

是函数 $\{h(t)\}$ 的 Zak 变换，证明对于任意整数 n，恒有

$$H_z(t-n,f)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nf}H_z(t,f)$$

6.19 令 $H_{\text{Zak}}(t,f)$ 和 $G_{\text{Zak}}(t,f)$ 分别是函数 $h(t)$ 和 $g(t)$ 的 Zak 变换。已知

$$\langle h,g_{mn}\rangle^2=\int_0^1\int_0^1 H_{\text{Zak}}(t,f)G_{\text{Zak}}^*(t,f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(mt-nf)}\mathrm{d}t\mathrm{d}f$$

试从这一关系式出发，推导下面的恒等式：

$$\sum_m\sum_n|\langle h,g_{mn}\rangle|^2=\int_0^1\int_0^1|H_{\text{Zak}}(t,f)|^2|G_{\text{Zak}}(t,f)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}f$$

并利用上述恒等式证明 $\{g_{mn}(t)\}$ 为一框架，当且仅当

$$A\leqslant|G_{\text{Zak}}(t,f)|^2\leqslant B$$

在 $(t,f)\in[0,1]\times[0,1]$ 几乎处处成立。

(提示：使用 Poisson 求和公式。)

6.20 令

$$y(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{mn}g(t-m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nt}$$

是函数 $y(t)$ 的 Gabor 展开，试证明 Gabor 展开系数 a_{mn} 可以由

$$a_{mn}=\int_0^1\int_0^1\frac{Y_{\text{Zak}}(t,f)}{G_{\text{Zak}}(t,f)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(nt+mf)}\mathrm{d}t\mathrm{d}f$$

确定，式中 $Y_{\text{Zak}}(t,f)$ 和 $G_{\text{Zak}}(t,f)$ 分别是 $y(t)$ 和 $h(t)$ 的 Zak 变换。

第 7 章　时频信号分析 —— 非线性变换

在信号处理中，信号的频谱和功率谱是两个最重要的物理量。基于 Fourier 变换的信号频域表示 (频谱) 及其能量的频域分布 (功率谱) 揭示了信号在频域的特征，它们在传统的信号分析与处理的发展史上发挥了极其重要的作用。但是，频谱和功率谱并不能告诉我们其中某个频率分量出现的具体时间及变化趋势。然而，在许多实际应用场合，信号是非平稳的，它的相关函数和功率谱等统计量都是时变函数。仅仅了解这类信号在时域或频域的全局特性，远远不能满足我们的实际需要，我们最希望得到的乃是信号的频谱和功率谱随时间变化的情况。

在前一章，我们讨论了短时 Fourier 变换、小波变换和 Gabor 变换三种线性的时频表示，它们使用时间和频率的联合函数 (取线性变换形式) 描述信号的频谱随时间的变化情况。同样地，也可以使用时间和频率的联合函数来描述信号的能量密度随时间变化的情况。非平稳信号的这种“能量化”表示简称为信号的时频分布。由于能量本身是信号的二次型表示，所以时频分布是非平稳信号的一种非线性变换 (“能量化”的二次型变换)。

本章将从时频分布的一般理论入手，介绍各种时频分布的形式、数学性质以及如何改进它们的时频聚集性能。

7.1　时频分布的一般理论

尽管短时 Fourier 变换、Gabor 变换与小波变换这些线性时频表示能够有效描述非平稳信号的局域性能，但是当使用时频表示来描述非平稳信号的能量变化时，二次型的时频表示却是一类更加直观和合理的信号表示方法，因为能量本身就是一种二次型表示。

许多二次型时频表示都可以粗略地表示能量。两个突出的例子是谱图 (spectrogram) 和尺度图 (scalogram)。谱图定义为短时 Fourier 变换的模值的平方：

$$\mathrm{SPEC}(t,\omega) = |\mathrm{STFT}(t,\omega)|^2$$

而尺度图定义为小波变换的模值的平方:

$$\mathrm{SCAL}(a,b) = |\mathrm{WT}(a,b)|^2$$

但是，谱图和尺度图对能量分布的描述是非常粗糙的，因为它们并不满足对能量分布更严格的要求。

为了更加准确地描述非平稳信号随时间变化的能量分布，我们有必要研究其他性能更好的"能量化"二次型时频表示。由于这类时频表示能够描述信号的能量密度分布，所以常将它们统称为时频分布。实际上，时频分布在许多特性上优于谱图和尺度图。为了更好地理解各种时频分布，在研究具体的时频分布之前，有必要先讨论它们的基本概念以及对它们的基本性质要求。

7.1.1 时频分布的定义

我们对复信号的二次型 (双线性) 变换 $z(t)z^*(t)$ 并不陌生，因为在平稳信号里就是用它得到相关函数和功率谱的，即有

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)z^*(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{7.1.1}$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.1.2}$$

除了式 (7.1.1) 的非对称形式外，自相关函数也可采用对称形式定义为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}t \tag{7.1.3}$$

平稳信号自相关函数和功率谱的上述定义公式很容易推广到非平稳信号，而且在非平稳信号分析中，对称形式的时变自相关函数 $R_z(t,\tau)$ 比非对称形式更有用，因为信号 $z(t)$ 的对称形式的双线性变换 $z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 更能表现出非平稳信号的某些重要特性. 不过，对非平稳信号采用式 (7.1.3) 类似的双线性变换时，为了体现信号的局部时频特性，应作类似于短时 Fourier 变换中的滑窗处理，同时沿 τ 轴加权，得到时变相关函数

$$R(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u-t,\tau) z\left(u+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}u \tag{7.1.4}$$

式中 $\phi(t,\tau)$ 为窗函数，而 $R(t,\tau)$ 称为"局部相关函数". 对局部相关函数作 Fourier 变换，又可得到时变功率谱，也就是信号能量的时频分布，即有

$$P(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.1.5}$$

这表明，时频分布 $P(t,\omega)$ 也可以利用局部相关函数 $R(t,\tau)$ 来定义。事实上，如果取不同的局部相关函数形式，就能够得到不同的时频分布。这将在以后各节讨论。

7.1.2 时频分布的基本性质要求

既然是非平稳信号能量分布的表示，时频分布就应该具备一些基本的性质。

性质 1　时频分布必须是实的 (且希望是非负的)。

性质 2　时频分布关于时间 t 和 ω 的积分应给出信号的总能量 E，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega=E\quad(\text{信号总能量})\tag{7.1.6}$$

性质 3　边缘特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(t,\omega)\mathrm{d}t=|Z(\omega)|^2\quad\text{和}\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(t,\omega)\mathrm{d}\omega=|z(t)|^2\tag{7.1.7}$$

即时频分布关于时间 t 和频率 ω 的积分分别给出信号在频率 ω 的谱密度和信号在 t 时刻的瞬时功率。

性质 4　时频分布的一阶矩给出信号的瞬时频率 $\omega_i(t)$ 和群延迟 $\tau_g(\omega)$，即

$$\omega_i(t)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\omega P(t,\omega)\mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}P(t,\omega)\mathrm{d}\omega}\quad\text{和}\quad\tau_g(\omega)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}tP(t,\omega)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}P(t,\omega)\mathrm{d}t}\tag{7.1.8}$$

性质 5　有限时间支撑

$$z(t)=0\ (|t|>t_0)\ \Rightarrow\ P(t,\omega)=0\ (|t|>t_0)\tag{7.1.9}$$

和有限频率支撑

$$Z(\omega)=0\ (|\omega|>\omega_0)\ \Rightarrow\ P(t,\omega)=0\ (|\omega|>\omega_0)\tag{7.1.10}$$

有限支撑是从能量角度对时频分布提出的一个基本性质。在信号处理中，作为工程上的近似，往往要求信号具有有限的时宽和有限的带宽。如果信号 $z(t)$ 只在某个时间区间取非零值，并且信号的频谱 $Z(\omega)$ 也只在某个频率区间取非零值，则称信号 $z(t)$ 及其频谱是有限支撑的。类似地，如果在 $z(t)$ 和 $Z(\omega)$ 的总支撑区以外，信号的时频分布等于零，就称时频分布是有限支撑的。Cohen [53] 提出一种理想的时频分布也应该具有有限支撑性质，即凡在信号 $z(t)$ 和它的频谱 $Z(\omega)$ 等于零的各区域，时频分布 $P(t,\omega)$ 也都应该等于零。

应当指出，作为能量密度的表示，时频分布不仅应是实数，而且应当是非负的。但是，正如后面将看到的那样，实际的时频分布却难以保证取正值。

和其他线性函数一样，线性时频表示满足线性叠加原理，这给多分量信号的分析和处理带来很大的方便，因为我们可以先对各个单分量信号单独进行分析和处理，然后再将结果叠加即可。与线性时频表示不同，二次型时频分布不再服从线性叠加原理，这使得多分量信号的时频分析不再能像线性时频表示的处理那样简单。例如，由谱图的定义容易看出，两个信号之和 $z_1(t)+z_2(t)$ 的谱图并不等于各个信号谱图之和，即

$$\mathrm{SPEC}_{z_1+z_2}(t,\omega)=|\mathrm{STFT}_{z_1+z_2}(t,\omega)|^2$$

与

$$\mathrm{SPEC}_{z_1}(t,\omega)+\mathrm{SPEC}_{z_2}(t,\omega)=|\mathrm{STFT}_{z_1}(t,\omega)|^2+|\mathrm{STFT}_{z_2}(t,\omega)|^2$$

明显不相等。就是说，STFT 的线性结构在二次型谱图中被破坏了。

与线性时频表示服从“线性叠加原理”相类似，任何二次型时频表示都满足所谓的“二次叠加原理”。因此，有必要对它作重点介绍。

令

$$z(t)=c_1z_1(t)+c_2z_2(t) \tag{7.1.11}$$

则任何二次型时频分布服从下面的二次叠加原理：

$$\begin{aligned}P_z(t,\omega)=&|c_1|^2P_{z_1}(t,\omega)+|c_2|^2P_{z_2}(t,\omega)+\\&c_1c_2^*P_{z_1,z_2}(t,\omega)+c_2c_1^*P_{z_2,z_1}(t,\omega)\end{aligned} \tag{7.1.12}$$

式中 $P_z(t,\omega)=P_{z,z}(t,\omega)$ 代表信号 $z(t)$ 的“自时频分布”（简称“信号项”或“自项”），它是 $z(t)$ 的双线性函数；而 $P_{z_1,z_2}(t,\omega)$ 表示信号分量 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 的“互时频分布”（简称“交叉项”），它是 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 的双线性函数。交叉项通常相当于干扰。

将二次叠加原理推广到 p 分量信号 $z(t)=\sum_{k=1}^{p}c_kz_k(t)$，则可得到以下一般规则：

(1) 每个信号分量 $c_kz_k(t)$ 都有一个自（时频分布）分量即信号项 $|c_k|^2P_{z_k}(t,\omega)$；

(2) 每一对信号分量 $c_kz_k(t)$ 和 $c_lz_l(t)$（其中 $k\neq l$）都有一个对应的互（时频分布）分量即交叉项 $c_kc_l^*P_{z_k,z_l}(t,\omega)+c_lc_k^*P_{z_l,z_k}(t,\omega)$。

因此，对于一个 p 分量信号 $z(t)$，时频分布 $P_z(t,\omega)$ 将包含 p 个信号项以及 $\binom{p}{2}=p(p-1)/2$ 个两两组合的交叉项。由于交叉项个数随信号分量个数的增多为二次增加，因此信号分量越多，交叉项就越严重。

在大多数的实际应用中，时频信号分析的主要目的是抽取出信号分量，并且抑制掉作为干扰存在的交叉项。因此，通常希望一种时频分布应该具有尽可能强的信号项和尽可能弱的交叉项。可以说，交叉项抑制既是时频分布设计的重点，也是一个难点。这将是贯穿本章以后各节的主要讨论话题。

7.2 Wigner - Ville 分布

时频分布的性质分为宏观性质 (如实值性、总能量保持性) 和局部性质 (如边缘特性、瞬时频率等)。为了正确描述信号的局部能量分布，我们希望凡是信号具有局部能量的地方，时频分布也聚集在这些地方，这就是时频局部聚集性，它是衡量时频分布的重要指标之一。一种时频分布即使具有理想的宏观性质，但如果在局部出现虚假信号 (即局部聚集性差)，那么它也是一种不实际的时频分布。换句话说，宁可一些宏观性质得不到满足，时频分布也要有良好的局部特性。

如何得到一种局部聚集性好的时频分布呢？由于 Wigner-Ville 分布是最早问世的时频分布，而其他所有时频分布又都可以看作是 Wigner-Ville 分布的加窗形式 (详见 7.4 节)，所以 Wigner-Ville 分布被视为所有时频分布之母。本节就先来讨论和分析这种时频分布。

7.2.1 数学性质

前节指出，取不同形式的局部相关函数，可以得到不同的时频分布。现在考虑一种既简单又有效的局部相关函数形式：使用时间冲激函数 $\phi(u-t,\tau)=\delta(u-t)$ (对 τ 不加限制，而在时域取瞬时值) 作窗函数，即局部相关函数取为

$$\begin{aligned}R_z(t,\tau)&=k_z(t,\tau)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-t)z\left(u+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}u\\&=z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

称之为信号 $z(t)$ 的瞬时相关函数或双线性变换。

对瞬时相关函数 $k_z(t,\tau)$ 作关于滞后 τ 的 Fourier 变换，即得到

$$W_z(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\underset{\tau\to\omega}{\mathcal{F}}[k_z(t,\tau)]\tag{7.2.2}$$

式中 $\mathcal{F}_{\tau\to\omega}$ 表示关于滞后 τ 的 Fourier 变换。由于这种分布最早是 Wigner [207] 于

1932 年在量子力学中引入的，而 Ville [200] 于 1948 年把它作为一种信号分析工具提出，所以现在习惯称之为 Wigner-Ville 分布。

Wigner-Ville 分布也可以用信号频谱 $Z(\omega)$ 定义为

$$W_Z(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Z\left(\omega+\frac{\nu}{2}\right)Z^*\left(\omega-\frac{\nu}{2}\right)e^{j\nu t}d\nu \tag{7.2.3a}$$

下面讨论 Wigner-Ville 分布的主要数学性质。

1. 实值性

Wigner-Ville 分布 $W_z(t,\omega)$ 是 t 和 ω 的实函数。

证明 由定义式 (7.2.2)，我们有

$$W_z^*(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}z^*\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{j\omega\tau}d\tau$$

对上该式右边边作变量代换 $\tau=-\tau'$，并将结果与式 (7.2.2) 比较，则有 $W_z^*(t,\omega)=W_z(t,\omega)$，故 $W_z(t,\omega)$ 必为实函数。 ■

2. 时移不变性

若 $\tilde{z}(t)=z(t-t_0)$，则 $W_{\tilde{z}}(t,\omega)=W_z(t-t_0,\omega)$。

证明 将 $\tilde{z}(t)=z(t-t_0)$ 代入定义式 (7.2.2)，立即知时移不变性成立。 ■

3. 频移不变性

若 $\tilde{z}(t)=z(t)e^{j\omega_0 t}$，则 $W_{\tilde{z}}(t,\omega)=W_z(t,\omega-\omega_0)$。

证明 由定义式 (7.2.2) 知

$$\begin{aligned}W_{\tilde{z}}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)e^{j\omega_0(t+\frac{\tau}{2})}z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega_0(t-\frac{\tau}{2})}e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}d\tau=W_z(t,\omega-\omega_0)\end{aligned}$$

4. 时间边缘特性

Wigner-Ville 分布满足时间边缘特性 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\omega)d\omega=|z(t)|^2$ (瞬时功率)。

证明 由定义式 (7.2.2) 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\omega)d\omega&=\int_{-\infty}^{\infty}z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\omega\right]d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\delta(\tau)d\tau=z(t)z^*(t)\\&=|z(t)|^2\end{aligned}$$

式中使用了大家熟知的 Fourier 变换对 $\delta(t)\leftrightarrow 1$。 ■

除了以上基本性质外,Wigner-Ville 分布还具有另外一些基本性质, 参见表 7.2.1。

表 7.2.1 Wigner-Ville 分布的重要数学性质

P1 (实值性)	$W_z^*(t,\omega)=W_z(t,\omega)$
P2 (时移不变性)	$\tilde{z}(t)=z(t-t_0)\Rightarrow W_{\tilde{z}}(t,\omega)=W_z(t-t_0,\omega)$
P3 (频移不变性)	$\tilde{z}(t)=z(t)e^{j\omega_0 t}\Rightarrow W_{\tilde{z}}(t,\omega)=W_z(t,\omega-\omega_0)$
P4 (时间边缘特性)	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\omega)d\omega=\|z(t)\|^2$
P5 (频率边缘特性)	$\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\omega)dt=\|Z(\omega)\|^2$
P6 (瞬时频率)	$\omega_i(t)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}tW_z(t,\omega)d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\omega)d\omega}$
P7 (群延迟)	$\tau_g(\omega)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}tW_z(t,\omega)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\omega)dt}$
P8 (有限时间支撑)	$z(t)=0\ (t\notin[t_1,t_2])\Rightarrow W_z(t,\omega)=0\ (t\notin[t_1,t_2])$
P9 (有限频率支撑)	$Z(\omega)=0\ (\omega\notin[\omega_1,\omega_2])\Rightarrow W_z(t,\omega)=0\ (\omega\notin[\omega_1,\omega_2])$
P10 (Moyal 公式)	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_x(t,\omega)W_y(t,\omega)d\omega=\|(x,y)\|^2$
P11 (卷积性)	$\tilde{z}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}z(u)h(t-u)du\Rightarrow W_{\tilde{z}}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}W_z(u,\omega)W_h(t-u,\omega)du$
P12 (乘积性)	$\tilde{z}(t)=z(t)h(t)\Rightarrow W_{\tilde{z}}(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_z(t,\nu)W_h(t,\omega-\nu)d\nu$
P13 (Fourier 变换性)	$W_Z(\omega,t)=2\pi W_z(t,-\omega)$

时间边缘特性 P4 和频率边缘特性 P5 表明, Wigner-Ville 分布不能保证在整个时频平面上是正的。换言之, Wigner-Ville 分布违背了一个真正的时频能量分布不得为负的原则。这有时会导致无法解释的结果。

对式 (7.2.3a) 取复数共轭, 并利用实值性 $W_z^*(t,\omega)=W_z(t,\omega)$, 即可将 Wigner-Ville 分布的定义式 (7.2.3a) 等价写作

$$W_Z(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}Z^*\left(\omega+\frac{\tau}{2}\right)Z\left(\omega-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\nu t}d\nu \tag{7.2.3b}$$

例 7.2.1 复谐波信号的 Wigner-Ville 分布

当信号 $z(t)=e^{j\omega_0 t}$ 为单个复谐波信号时, 其 Wigner-Ville 分布为

$$\begin{aligned}W_z(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\omega_0\left(t+\frac{\tau}{2}-t+\frac{\tau}{2}\right)\right]\exp(-j\omega\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-j(\omega-\omega_0)\tau]d\tau\\&=2\pi\delta(\omega-\omega_0)\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

而当信号 $z(t)=e^{j\omega_1 t}+e^{j\omega_2 t}$ 是两个复谐波信号叠加而成时，其 Wigner-Ville 分布

$$\begin{aligned}W_z(t,\omega)&=W_{\text{auto}}(t,\omega)+W_{\text{cross}}(t,\omega)\\&=W_{z_1}(t,\omega)+W_{z_2}(t,\omega)+2\text{Re}[W_{z_1,z_2}(t,\omega)]\end{aligned}\tag{7.2.5}$$

式中，信号项即自项为

$$W_z(t,\omega)=2\pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega-\omega_2)]$$

而交叉项为

$$\begin{aligned}W_{z_1,z_2}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\omega_1\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-j\omega_2\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\exp(-j\omega\tau)d\tau\\&=\exp[(\omega_1-\omega_2)t]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-j\left(\omega-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\tau\right]d\tau\\&=2\pi\delta(\omega-\omega_m)\exp(\omega_d t)\end{aligned}$$

其中 $\omega_m=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ 表示两个频率的平均值，而 $\omega_d=\omega_1-\omega_2$ 为两个频率之差。因此，两个复谐波信号的 Wigner-Ville 分布可表示为

$$W_z(t,\omega)=2\pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega-\omega_2)]+4\pi\delta(\omega-\omega_m)\cos(\omega_d t)\tag{7.2.6}$$

这表明，Wigner-Ville 分布 $W_{\text{auto}}(t,\omega)$ 的信号项是沿着复谐波信号两个频率直线上的带状冲激函数，幅值为 2π。由信号项可以正确地检测出复谐波信号的两个频率。除了信号项外，在两个频率的平均频率 ω_m 处还存在一个比较大的交叉项，其包络为 $2\pi\cos(\omega_d)$，与两个频率之差 ω_d 有关。

这个例子还可推广到 p 个复谐波信号叠加的情况：Wigner-Ville 分布的信号项表现为沿每个谐波频率直线上的 p 条带状冲激函数。如果信号 $z(t)$ 的样本数据有限，则 Wigner-Ville 分布的信号项沿每个谐波频率的直线上呈鱼的背鳍状分布，不再是理想的带状冲激函数。从这个例子还可看出，Wigner-Ville 分布的交叉项是比较严重的。

7.2.2 与演变谱的关系

定义解析信号的 $z(t)$ 的时变自相关函数为

$$R_z(t,\tau)=\text{E}\left\{z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right\}\tag{7.2.7}$$

其中 E 代表数学期望。