

类似于平稳信号功率谱的定义, 时变自相关函数的 Fourier 变换定义为 $z(t)$ 的时变功率谱, 即

$$\begin{aligned} S_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ z \left(t + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

时变功率谱常称作演变谱 (evolutionary spectrum)。若交换数学期望与积分两个算子的位置, 则式 (7.2.8) 给出以下结果:

$$S_z(t, \omega) = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} z \left(t + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \quad (7.2.9)$$

这表明, 信号 $z(t)$ 的演变谱等于该信号的 Wigner-Ville 分布 $W_z(t, \omega)$ 的数学期望, 即有

$$S_z(t, \omega) = E\{W_z(t, \omega)\} \quad (7.2.10)$$

由于这一关系, 有时也将演变谱称作 Wigner-Ville 谱。

众所周知, 在平稳随机信号的相关分析中, 两个随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的相干度定义为

$$\alpha_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_x(\omega)S_y(\omega)}} \quad (7.2.11)$$

式中 $S_{xy}(\omega)$ 为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互功率谱, 而 $S_x(\omega)$ 和 $S_y(\omega)$ 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的功率谱。

类似地, 可以定义两个非平稳随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的相干度。由于这种相干度是时间和频率两个变量的函数, 所以称其为时频相干度函数, 定义为

$$\alpha_{xy}(t, \omega) = \frac{S_{xy}(t, \omega)}{\sqrt{S_x(t, \omega)S_y(t, \omega)}} \quad (7.2.12)$$

式中 $S_x(t, \omega)$ 和 $S_y(t, \omega)$ 分别是信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的 (自) 演变谱或 Wigner-Ville 谱, 而 $S_{xy}(t, \omega)$ 是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互演变谱或互 Wigner-Ville 谱, 由下式定义:

$$\begin{aligned} S_{xy}(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ x \left(t + \frac{\tau}{2} \right) y^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= E\{W_{xy}(t, \omega)\} \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

由定义式 (7.2.12) 容易证明时频相干度函数具有下列一些性质。

性质 1: $0 \leq |\alpha_{xy}(t, \omega)| \leq 1$ 。

性质 2: 若 x 和 y 在时间 t 不相关, 即 $R_{xy}(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}) = 0$ (对所有 τ), 则 $S_{xy}(t, \omega) = 0$ 。

性质 3: 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是非平稳信号 $q(t)$ 分别通过线性移不变滤波器 H_1 和 H_2 得到的输出, 则

$$\alpha_{xy}(t, \omega) = \frac{S_q(t, \omega) ** W_{h_1, h_2}(t, \omega)}{\sqrt{S_q(t, \omega) ** W_{h_1}(t, \omega)} \sqrt{S_q(t, \omega) ** W_{h_2}(t, \omega)}} \quad (7.2.14)$$

其中 $**$ 表示二维卷积, 且

$$W_{h_1, h_2}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) h_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.2.15)$$

是滤波器 H_1 和 H_2 的冲激响应 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的互 Wigner-Ville 分布。

7.2.3 基于 Wigner-Ville 分布的信号重构

现在考虑离散解析信号 $z(n)$ 如何从 Wigner-Ville 分布中恢复或重构。令 $z(n)$ 具有长度 $2L + 1$, 离散 Wigner-Ville 分布定义为

$$W_z(n, k) = 2 \sum_{m=-L}^L z(n+m) z^*(n-m) e^{-j4\pi km/N} \quad (7.2.16)$$

取上式两边的离散 Fourier 反变换, 并作变量代换 $n = \frac{n_1+n_2}{2}$ 和 $m = \frac{n_1-n_2}{2}$, 则有

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-L}^L W_z\left(\frac{n_1+n_2}{2}, k\right) e^{j2\pi(n_1-n_2)k/N} = z(n_1) z^*(n_2) \quad (7.2.17)$$

当 $n_1 = n_2 = n$ 时, 式 (7.2.17) 简化为

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-L}^L W_z(n, k) = |z(n)|^2 \quad (7.2.18)$$

若取 $n_1 = 2n, n_2 = 0$, 则式 (7.2.14) 给出下列结果:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-L}^L W_z(n, k) e^{j4\pi nk/N} = z(2n) z^*(0) \quad (7.2.19)$$

这表明, 偶数字号的采样信号 $z(2n)$ 可以由离散 Wigner-Ville 分布 $W_z(n, k)$ 惟一重构, 至多相差一复数 $z^*(0)$ 倍。类似地, 如果在式 (7.2.17) 中令 $n_1 = 2n-1$ 和 $n_2 = 1$,

则有

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-L}^L W_z(n, k) e^{j4\pi(n-1)k/N} = z(2n-1)z^*(1) \quad (7.2.20)$$

这意味着, 奇数序号的采样信号 $z(2n-1)$ 可以由 $W_z(n, k)$ 惟一恢复, 至多相差复数 $z^*(1)$ 倍。

式 (7.2.19) 和式 (7.2.20) 一并表明, 离散 Wigner-Ville 分布的逆问题可以分解为两个较小的逆问题: 求偶数序号的样本和求奇数序号的样本, 即如果已知离散采样信号 $z(n)$ 的离散 Wigner-Ville 分布, 则偶数序号和奇数序号的采样信号可以分别在下列复指数常数倍范围内惟一恢复:

$$\frac{z^*(0)}{|z(0)|} = e^{j\phi}, \quad \text{和} \quad \frac{z^*(1)}{|z(1)|} = e^{j\phi_0} \quad (7.2.21)$$

这个结果告诉我们, 如果已知信号 $z(n)$ 两个相邻 (一偶一奇) 的非零样本值, 则可以实现离散信号 $z(n)$ 的准确重构。

那么, 如何实现上述信号重构或综合呢? 求瞬时相关函数, 得

$$k_z(n, m) = \frac{1}{2} \sum_{k=-L}^L W_z(n, k) e^{j4\pi km/N} = z(n+m)z^*(n-m) \quad (7.2.22)$$

如前所述, 我们只要求偶数样本 $z_e(n') = z(2n')$ 。为了重构 $z(2n')$, 我们构造一个 $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ 维矩阵 A_e , 其元素为

$$a_e(i, j) = k_z(i+j, i-j) = z_e(i)z_e^*(j) \quad (7.2.23)$$

矩阵 A_e 的秩为 1, 因为 A_e 是所需要重构的偶数样本信号向量的外积。该矩阵的特征值分解为

$$A_e = \sum_{i=1}^{N/2} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* \quad (7.2.24)$$

式中 λ_i 和 $\mathbf{e}_i$ 分别是 A_e 的第 i 个特征值和对应的特征向量。由于 A_e 的秩等于 1, 故只有第一个特征值非零, 而其他 $\frac{N}{2} - 1$ 个特征值全部等于零。于是, 信号的重构偶数样本由下式给出:

$$\mathbf{z}_e = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{e}_1 e^{j\phi_e} \quad (7.2.25)$$

其中

$$\mathbf{z}_e = [z(0), z(2), \dots, z(N/2)]^T \quad (7.2.26)$$

这与前面的结论是一致的：偶数样本可以在相差一复指数常数范围内准确重构。这意味着，利用 Wigner-Ville 分布重构信号会产生相位丢失，因此这种信号重构不适用于要求相位信息的场合。

如第 6 章 6.2 节所述，实信号的功率谱存在负频率分量。这些负频率分量不仅会带来冗余，而且也会产生交叉项。为了减小交叉项干扰，Boashash^[20] 建议使用解析信号 $z_a(t)$ 的 Wigner-Ville 分布 $W_{z_a}(t, \omega)$ 。由于解析信号是一个只有正频率分量的半带函数 (handband function)，所以 $W_{z_a}(t, \omega)$ 可以避免由负频率分量引起的交叉项。

然而，必须注意的是，解析信号 $z_a(t)$ 在多个方面与原来的实信号 $z(t)$ 不同。例如，原时限信号 $z(t) = 0, t \notin [t_1, t_2]$ 的解析信号 $z_a(t)$ 就不再是时限的，因为解析信号是带限的。因此，对于一个实信号，究竟是直接使用它的 Wigner-Ville 分布，还是使用解析信号的 Wigner-Ville 分布 $W_{z_a}(t, \omega)$ ，在选择时需要小心。不过，在抑制交叉项为主要考虑时，应该选择使用解析信号的 Wigner-Ville 分布。

7.3 模糊函数

如前所述，Wigner-Ville 分布是对瞬时相关函数 $k_z(t, \tau) = z(t + \frac{\tau}{2}) z^*(t - \frac{\tau}{2})$ 的时延参数 τ 的 Fourier 变换。如果我们改而对瞬时相关函数的时间变量 t 作 Fourier 变换，则得到另一种重要的时频分布函数：

$$\begin{aligned} A_z(\tau, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k_z(t, \tau) e^{-j\nu t} dt = \mathcal{F}[k_z(t, \tau)] \quad (7.3.1) \\ &\quad t \rightarrow \nu \end{aligned}$$

在雷达信号处理中，这种时频分布称为雷达模糊函数。

雷达模糊函数主要用于分析对发射信号匹配滤波后的信号分辨性能。由于匹配滤波器的冲激响应与信号的共轭倒数成正比，当雷达把一般目标视为“点”目标时，回波信号的波形与发射信号相同，但有不同的时延 τ 和不同的频偏 ν (即多普勒角频率)，这就使得雷达模糊函数成了雷达信号匹配滤波输出对 τ, ν 的二维响应。

在非平稳信号处理中，模糊函数采用的是不同的定义：对瞬时相关函数作关于时间 t 的 Fourier 反变换而不是 Fourier 变换，即模糊函数定义为

$$A_z(\tau, \nu) = \mathcal{F}^{-1}[k_z(t, \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\nu t} dt \quad (7.3.2a) \quad t \rightarrow \nu$$

模糊函数也可以用信号的 Fourier 变换 $Z(\omega)$ 定义为

$$A_z(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Z^* \left(\omega + \frac{\nu}{2} \right) Z \left(\omega - \frac{\nu}{2} \right) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (7.3.2b)$$

对比模糊函数和 Wigner-Ville 分布知, 它们都是信号的双线性变换或瞬时相关函数 $k_z(t, \tau)$ 的某种线性变换, 后者变换到时频平面, 表示能量分布, 为能量域表示; 而前者则变换到时延-频偏平面, 表示相关, 为相关域表示。既然模糊函数表示相关, 而 Wigner-Ville 分布表示能量分布, 那么 Wigner-Ville 分布应该是模糊函数的某种 Fourier 变换。由 Wigner-Ville 分布的定义式 (7.2.2), 容易证明

$$\begin{aligned} W_z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z \left(t + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z \left(u + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} \delta(u-t) du d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z \left(u + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} e^{j\nu(u-t)} du d\tau d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z \left(u + \frac{\tau}{2} \right) z^* \left(u - \frac{\tau}{2} \right) e^{j\nu u} du \right] e^{-j(\nu t + \omega\tau)} d\nu d\tau \end{aligned}$$

式中使用了熟知的 Fourier 变换 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\nu(u-t)} d\nu = \delta(u-t)$ 。将模糊函数的定义式 (7.3.2) 代入上式, 立即有

$$W_z(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) e^{-j(\nu t + \omega\tau)} d\nu d\tau \quad (7.3.3)$$

即是说, Wigner-Ville 分布与模糊函数的二维 Fourier 变换等价, 只是相差一个常数因子 $\frac{1}{2\pi}$ 。

根据定义式 (7.3.2), 不难证明模糊函数具有以下性质。

P1 (共轭对称性) 模糊函数是共轭对称的, 即有

$$A_z(\tau, \nu) = A_z^*(-\tau, -\nu) \quad (7.3.4)$$

P2 (时移模糊性) 模糊函数的模对时移不敏感, 即有

$$\tilde{z}(t) = z(t - t_0) \Rightarrow A_{\tilde{z}}(\tau, \nu) = A_z(\tau, \nu) e^{j2\pi t_0 \nu} \quad (7.3.5)$$

P3 (频移模糊性) 模糊函数的模对频移也不敏感, 即

$$\tilde{z}(t) = z(t) e^{j\omega_0 t} \Rightarrow A_{\tilde{z}}(\tau, \nu) = A_z(\tau, \nu) e^{j2\pi f_0 \tau} \quad (7.3.6)$$

P4 (时延边缘特性)

$$A_z(0, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(\omega - \frac{1}{2}\nu\right) Z^*\left(\omega + \frac{1}{2}\nu\right) d\omega \quad (7.3.7)$$

P5 (频偏边缘特性)

$$A_z(\tau, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt \quad (7.3.8)$$

P6 (总能量保持性)

$$A_z(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\omega)|^2 d\omega = E \text{ (信号总能量)} \quad (7.3.9)$$

P7 (瞬时频率)

$$\omega_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial A_z(\tau, \nu)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} e^{j\nu t} d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} A_z(0, \nu) e^{j\nu t} d\nu} \quad (7.3.10)$$

P8 (群延迟)

$$\tau_g(\nu) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial A_z(\tau, \nu)}{\partial \nu} \right]_{\nu=0} e^{j\nu \tau} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, 0) e^{j\nu \tau} d\tau} \quad (7.3.11)$$

P9 (有限时延支撑) 若 $z(t) = 0, t \notin [t_1, t_2]$, 则 $A_z(\tau, \nu) = 0, \tau > t_2 - t_1$.

P10 (有限频偏支撑) 若 $Z(\omega) = 0, \omega \notin [\omega_1, \omega_2]$, 则 $A_z(\tau, \nu) = 0, \nu > \omega_2 - \omega_1$.

P11 (Moyal 公式)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) A_x^*(\tau, \nu) d\tau d\nu = \left| \int_{-\infty}^{\infty} z(t) x^*(t) dt \right|^2 = |\langle z, x \rangle|^2 \quad (7.3.12)$$

特别地, 若 $x(t) = z(t)$, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_z(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt \right]^2 \quad (7.3.13)$$

称之为模糊函数的 体积不变性。

P12 (卷积性) 若 $z(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t-u) du$, 则

$$A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau, \nu') A_h(\tau - \tau', \nu) d\tau' \quad (7.3.14)$$

P13 (乘积性) 若 $z(t) = x(t)h(t)$, 则

$$A_z(\tau, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau, \theta) A_h(\tau, \nu - \theta) d\theta \quad (7.3.15)$$

P14 (Fourier 变换) 信号 $z(t)$ 的 Fourier 变换 $Z(\omega)$ 的模糊函数 $A_Z(\tau, \nu)$ 与原信号的模糊函数 $A_z(\tau, \nu)$ 有以下关系:

$$A_Z(\tau, \nu) = 2\pi A_z(\tau, -\nu) \quad (7.3.16)$$

为了方便读者使用, 现将模糊函数的上述性质列于表 7.3.1 中。

表 7.3.1 模糊函数的重要数学性质

P1 (共轭对称性)	$A_z(\tau, \nu) = A_z^*(-\tau, -\nu)$
P2 (时移模糊性)	$\hat{z}(t) = z(t - t_0) \Rightarrow A_{\hat{z}}(\tau, \nu) = A_z(\tau, \nu) e^{j2\pi t_0 \nu}$
P3 (频移模糊性)	$\hat{z}(t) = z(t) e^{j\omega_0 t} \Rightarrow A_{\hat{z}}(\tau, \nu) = A_z(\tau, \nu) e^{j\omega_0 \tau}$
P4 (时延边缘特性)	$A_z(0, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega - \frac{1}{2}\nu) Z^*(\omega + \frac{1}{2}\nu) d\omega$
P5 (频偏边缘特性)	$A_z(\tau, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t + \frac{\tau}{2}) z^*(t - \frac{\tau}{2}) dt$
P6 (总能量保持性)	$A_z(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) ^2 d\omega = E$
P7 (瞬时频率)	$\omega_s(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial A_z(\tau, \nu)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} e^{j\nu t} d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} A_z(0, \nu) e^{j\nu t} d\nu}$
P8 (群延迟)	$\tau_g(\nu) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial A_z(\tau, \nu)}{\partial \nu} \right]_{\nu=0} e^{j\nu \tau} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, 0) e^{j\nu \tau} d\tau}$
P9 (有限时延支撑)	$z(t) = 0, t \notin [t_1, t_2] \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = 0, \tau > t_2 - t_1$
P10 (有限频偏支撑)	$Z(\omega) = 0, \omega \notin [\omega_1, \omega_2] \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = 0, \nu > \omega_2 - \omega_1$
P11 (Moyal 公式)	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\tau, \nu) A_z^*(\tau, \nu) d\tau d\nu = \left \int_{-\infty}^{\infty} z(t) x^*(t) dt \right ^2 = \langle z, x \rangle ^2$
P12 (卷积性)	$z(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau, \nu') A_h(\tau - \tau', \nu) d\tau'$
P13 (乘积性)	$z(t) = x(t)h(t) \Rightarrow A_z(\tau, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_x(\tau, \theta) A_h(\tau, \nu - \theta) d\theta$
P14 (Fourier 变换)	$A_Z(\nu, \tau) = 2\pi A_z(\tau, -\nu)$

既然模糊函数也是信号的一种时频分布, 那么它必然也服从二次叠加原理, 即存在交叉项, 故有必要考查两个信号之间的互模糊函数。

信号 $z(t)$ 和 $g(t)$ 之间的互模糊函数定义为

$$A_{z,g}(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) g^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\nu t} dt \quad (7.3.17)$$

注意, 在一般情况下, 互模糊函数取复值, 它没有共轭对称性, 即

$$A_{z,g}(\tau, \nu) \neq A_{g,z}^*(\tau, \nu) \quad (7.3.18)$$

下面通过两个例子, 说明模糊函数与 Wigner-Ville 之间的关系。

例 7.3.1 考虑单个高斯信号

$$z(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)^2 + j\omega_0 t\right] \quad (7.3.19)$$

由定义式 (7.2.2), 可得信号 $z(t)$ 的 Wigner-Ville 分布为

$$W_z(t, \omega) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\alpha}{4}\tau^2 - j(\omega - \omega_0)\tau - \alpha(t-t_0)^2\right] d\tau$$

将 5.1 节的积分公式 (5.1.20) 代入上式, 并将结果整理得

$$W_z(t, \omega) = 2 \exp\left[-\alpha(t-t_0)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_0)^2\right] \quad (7.3.20)$$

又由定义式 (7.3.2a) 得模糊函数

$$A_z(\tau, \theta) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + j\omega_0\tau\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha t^2 + 2\left(\alpha t_0 + j\frac{\theta}{2}\right)t - \alpha t_0^2\right] dt$$

将积分公式 (5.1.20) 代入上式, 即有

$$A_z(\tau, \theta) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + \frac{1}{4\alpha}\theta^2\right)\right] \exp[j(\omega_0\tau - t_0\theta)] \quad (7.3.21)$$

比较式 (7.3.20) 与式 (7.3.21) 知, Wigner-Ville 分布 $W_z(t, \omega)$ 以信号参数 (t_0, ω_0) 为中心, 而模糊函数 $A_z(\tau, \theta)$ 则以原点 $(0, 0)$ 为中心, 是一振荡波形, 其相位 $\omega_0\tau - t_0\theta$ 与信号的时间移位 t_0 和频率调制 ω_0 有关。

例 7.3.2 一非平稳信号由两个高斯函数叠加而成:

$$z(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t-t_1)^2 + j\omega_1 t\right) + \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t-t_2)^2 + j\omega_2 t\right)\right] \quad (7.3.22)$$

其中 $t_1 > t_2$ 和 $\omega_1 - \omega_2$ 。

由习题 7.5 知, 信号 $z(t)$ 的 Wigner-Ville 分布的信号项 (白项) 和交叉项分别为

$$W_{\text{auto}}(t, \omega) = 2 \sum_{i=1}^2 \exp\left(-\alpha(t-t_i)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_i)^2\right) \quad (7.3.23)$$

和

$$W_{\text{cross}}(t, \omega) = 4 \exp \left[-\alpha(t - t_m)^2 - \frac{1}{\alpha}(\omega - \omega_m)^2 \right] \times \cos[(\omega - \omega_m)t_d + \omega_d t] \quad (7.3.24)$$

式中

$$t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad \text{和} \quad \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (7.3.25)$$

分别为两个谐波信号时延的平均值和频率的平均值, 而

$$t_d = t_1 - t_2 \quad \text{和} \quad \omega_d = \omega_1 - \omega_2 \quad (7.3.26)$$

分别是两个谐波信号时延差与频率差。

可以证明 (见习题 7.9), 信号 $z(t)$ 的模糊函数的信号项和交叉项分别为

$$A_{\text{auto}}(\tau, \theta) = \exp \left[-\left(\frac{\alpha}{4}\tau^2 + \frac{1}{4\alpha}\theta^2 \right) \right] \sum_{i=1}^2 \exp[j(\omega_i \tau - t_i \theta)] \quad (7.3.27)$$

$$A_{\text{cross}}(\tau, \theta) = \exp[j(\omega_m \tau + \theta t_m + \omega_d t_m)] \left\{ \exp \left[-\frac{1}{4\alpha}(\theta + \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau - t_d)^2 \right] + \exp \left[-\frac{1}{4\alpha}(\theta - \omega_d)^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau + t_d)^2 \right] \right\} \quad (7.3.28)$$

从这个例子可以看出, 对于两个复谐波叠加的信号, 其 Wigner-Ville 分布和模糊函数具有以下特点:

(1) Wigner-Ville 分布的两个信号项即自项是分开的, 它们分别以 (t_1, ω_1) 和 (t_2, ω_2) 为中心, 而两个互 Wigner-Ville 分布则合在一起, 组成交叉项, 以 (t_m, ω_m) 为中心;

(2) 模糊函数的两个信号项合在一起, 以原点 $(0, 0)$ 为中心, 而两个互模糊函数则分开, 它们分别以 $(t_d, -\omega_d)$ 和 $(-t_d, \omega_d)$ 为中心。

例 7.3.3 考虑两个调制的高斯信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的叠加:

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad (7.3.29)$$

式中

$$x(t) = e^{j\omega_1(t-t_1)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(t-t_1)^2} \quad (7.3.30)$$

$$y(t) = e^{j\omega_2(t-t_2)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(t-t_2)^2} \quad (7.3.31)$$

图 7.3.1 示出了信号 $z(t)$ 的 Wigner-ville 分布和模糊函数。

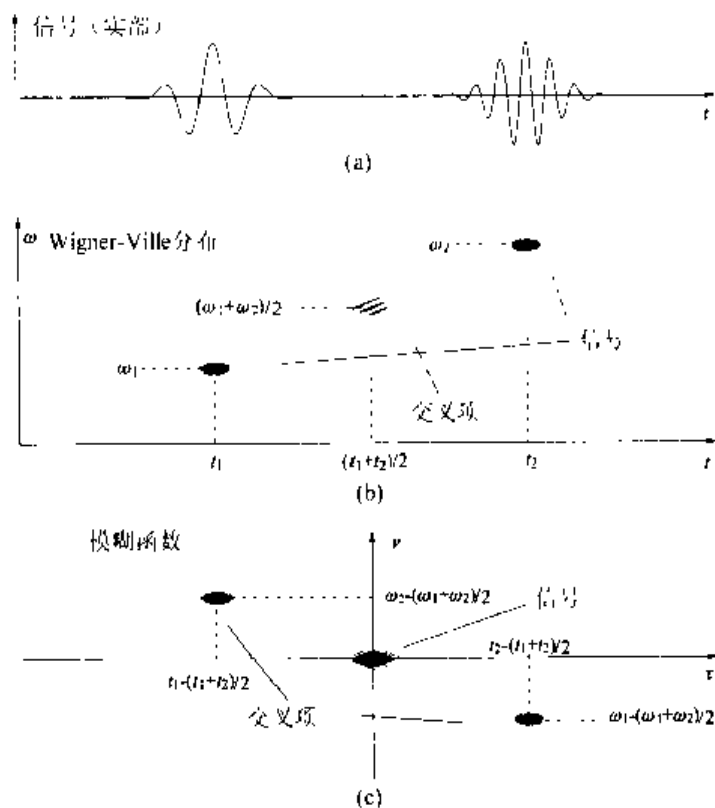


图 7.3.1 两个调制高斯信号的 Wigner-Ville 分布和模糊函数 [132,p.278]

推而广之, 对于多分量信号, 各个分量信号的模糊函数都以原点 $(0,0)$ 为中心, 混合在一起。从这个意义上讲, 这种时频函数对各分量信号是模糊的。然而, 模糊函数所有的交叉项一般都离原点比较远。由于模糊函数的二维 Fourier 变换即为 Wigner-Ville 分布, 所以如同平稳信号的时域和频域表示的作用一样, 非平稳信号的能量域表示 (时频分布) 和相关域表示 (模糊函数) 在非平稳信号的分析与处理中具有同等重要的意义。

7.4 Cohen 类时频分布

自从 1948 年 Wigner-Ville 分布出现后, 它在许多领域得到了广泛的应用。人们在实践中发现, 针对不同的应用需要, 应该对 Wigner-Ville 分布作某些改进, 从而出现了一系列其他形式的时频分布。1966 年, Cohen [52] 发现众多的时频分布只是 Wigner-Ville 分布的变形, 它们可以用统一的形式表示。概括地讲, 在这种统一表示里, 不同的时频分布只是对 Wigner-Ville 分布加不同的核函数而已, 而对于时频分布各种性质的要求则反映在对核函数的约束条件上。这种统一的时频分布现在习惯上被称为 Cohen 类时频分布。